Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XIII. Capitel. Von der Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50547

würdiger ist, da alsdann alle 3 Wurzeln reel sind. In diesem Falle kann man nur Gebrauch von der Cardanischen Formel machen, wenn man Näherungsmethoden auf sie anwendet, z. B. indem man sie in eine unendliche Reihe verwandelt. Lambert hat in seinem Werke (Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen) besondere Tafeln gegeben, welche dienen, auf eine leichte Art den numerischen Werth der Wurzeln der Gleichungen vom 3ten Grade, sowohl im irreduciblen, als auch in andern Fällen, zu finden. Man kann auch dazu die gewöhnlichen Sinustafeln gebrauchen. S. l'Astronomie sphérique de M. Mauduit, Paris 1765.

Wer mehr über die Auflösung der Gleichungen, sowohl direct, als durch Näherung, nachzulesen wünscht, dem empfehle ich l'Histoire des Mathematiques, Clairauts Algebra, le Cours de Mathematiques de Mr. Bezoud und auch dem von Bossut — und welcher Deutsche der Mathematik sich widmender wird die Kästnerischen Schriften ungelesen lassen?

XII. Capitel.

Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratische Gleichungen genannt werden.

§. 189.

Wenn die höchste Potenz der Zahl x zum vierten Grade hinauf steigt, so werden solche Gleichungen vom vierten Grade auch biquadratische genannt, und also wird von diesen die allgemeine Form seyn: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
Von diesen müssen wir nun vor allen Dingen die so genannten reinen biquadratischen Gleichungen betrachten, deren Form $x^4 = f$ ist, woraus

aus man sogleich auf beyden Seiten die Wurzel vom vierten Grade auszieht, da man dann $x = \sqrt[4]{f}$ erhält.

§. 190.

Da x^4 das Quadrat von x^2 ist, so wird die Rechnung um vieles deutlicher, wenn man erstlich nur die Quadratwurzel auszieht, da man denn $x^2 = \sqrt{f}$ bekömmt; hernach zieht man nochmals die Quadratwurzel aus, so bekömmt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, so daß $\sqrt{\sqrt{f}}$ nichts anders ist, als die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von f.

Hat man z. B. folgende Gleichung: $x^4 = 2401$, so findet man daraus erstlich $x^2 = 49$ und dann $x = 7$.

§. 191.

Auf diese Art läßt sich aber nur eine Wurzel finden. Da es aber bey den cubischen Gleichungen immer drey Werthe für x giebt, so läßt sich nicht ohne Grund vermuthen, daß eine biquadratische Gleichung vier Wurzeln haben werde, welche auch auf diese Art herausgebracht werden können. Denn da aus dem letzten Beyspiele nicht nur folget, daß $x^2 = 49$, sondern auch, daß $x^2 = -49$, so erhalten wir aus jenem folgende zwey Wurzeln: $x = 7$, $x = -7$, aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$, und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$, welches die vier biquadratischen Wurzeln aus 2401 sind. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

§. 192.

Auf diese reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen nicht nur das zweyte, sondern auch das vierte Glied fehlt, oder die folgende Form haben: $x^4 + fx^2 + g = 0$, welche man

man nach der Regel der quadratischen Gleichungen auflösen kann. Denn setzt man $x^2 = y$, so hat man $y^2 + fy + g = 0$, oder $y^2 = -fy - g$, woraus

$$y = -\tfrac{1}{2}f \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}f^2 - g)} = \frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}$$

gefunden wird. Da nun $x^2 = y$, so wird daraus

$$x = \pm \sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}},$$

wo die zweydeutigen Zeichen $\pm$ alle vier Wurzeln angeben.

§. 193.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, so kann man dieselbe immer als ein Product aus vier Factoren ansehen. Denn multiplicirt man diese vier Factoren mit einander $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, so findet man folgendes Product $x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq + pr + ps + qr + qs + rs)x^2 - (pqr + pqs + prs + qrs)x + pqrs$, welche Formel auf keine andere Art gleich 0 werden kann, als wenn einer von obigen vier Factoren $= 0$ ist. Dieses kann daher auf viererley Art geschehen, I.) wenn $x = p$, II.) $x = q$, III.) $x = r$, IV.) $x = s$, welches also die vier Wurzeln dieser Gleichung sind.

§. 194.

Betrachtet man diese Form etwas genauer, so findet man, daß in dem zweiten Gliede die Summe aller vier Wurzeln vorkömmt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Gliede ist der Coefficient die Summe der Producte aus immer zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, und der zweyte Factor ist x_2; im vierten Gliede sieht man die Summe der Producte aus immer drey Wurzeln, welche mit $-x$ multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

Anmerk. Der obige Satz sollte so ausgedrückt werden. Wenn $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$; so ist (wenn p, q, r, s die Wurzeln wären)

$$A = -p - q - r - s = -(p + q + r + s)$$
$$B = (-p.-q) + (-p.-r) + (-p.-s) + (-q.-r) + (-q.-s) + (-r.-s) = (pq + pr + ps + qr + qs + rs)$$
$$C = (-p.-q.-r) + (-p.-q.-s) + (-p.-r.-s) + (-q.-r.-s) = -(pqr + pqs + prs + qrs)$$
$$D = -p.-q.-r.-s = pqrs.$$

Aehnliche Erinnerungen habe ich auch schon §. 133. Anmerk. 1 gemacht.

§. 195.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, so kann eine solche biquadratische Gleichung keine Rationalwurzeln haben, welche nicht zugleich Theiler des letzten Gliedes sind, daher man aus diesem Grunde alle Rationalwurzeln, wenn dergleichen vorhanden sind, leicht finden kann, wenn man nun für x nach und nach einen jeden Theiler des letzten Gliedes setzt, und zusieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geschehe. Hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. B. $x = p$, so darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x - p$ dividiren und den Quotienten gleich 0 setzen; dies wird eine cubische Gleichung geben, die nach den obigen Regeln weiter aufgelöset werden kann.

§. 196.

Hierzu wird aber nun durchaus erfordert, daß alle Glieder aus ganzen Zahlen bestehen, und daß das erste keinen andern Coefficient als 1 hat. Wenn daher in einigen Gliedern Brüche vorkommen, so müssen diese vorher weggeschaft werden; dies kann jederzeit geschehen, wenn man für x schreibt: y getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt. Z. B. wenn folgende Gleichung vor-

vorkäme: $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0$, so setze man, weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potenzen vorkommen, $x = \frac{y}{6}$,

so wird $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}y^2}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0$, welches mit 6^4 multiplicirt, $y^4 - 3y^3 + 12y^2 - 162y + 72 = 0$ giebt. Wollte man nun untersuchen, ob diese Gleichung Rationalwurzeln habe, so müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben, um zu sehen, in welchen Fällen die Formel wirklich 0 werde.

§. 197.

Da aber die Wurzeln sowohl negativ als positiv seyn können, so müßte man mit einem jeden Theiler zwey Proben anstellen, die erste, da derselbe positiv, die andere, da derselbe negativ genommen würde. Man hat aber auch hier wieder zu bemerken, daß, so oft die zwey Zeichen + und − mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln habe; so oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden seyn müssen *). Da nun in unserm

Bey-

*) Diese Regel gilt allgemein für Gleichungen von allen Graden; die Franzosen schreiben die Erfindung derselben Descartes, die Engländer Harriot zu; der l'Abbé *de Gua* ist der erste gewesen, der davon einen allgemeinen Beweis gegeben hat. Man sehe die Mem. de l'Académie des Sciences de Paris, 1741 oder den Holländischen Nachdruck von 1747. Der kürzeste und strengste Beweis ist von Kästner. Siehe dessen Analysis des Unendlichen 2te Aufl. Seite 129 § 190. Noch muß ich erinnern, daß jene Regel nur für Gleichuugen gilt, die lauter mögliche Wurzeln haben. Denn unmögliche Wurzeln kann man weder als bejaht noch als verneint ansehen, daher solche auch nicht nach einer solchen Regel beurtheilt werden können.

Beyspiele 4 Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und also hat man nicht nöthig einen Theiler des letzten Gliedes negativ zu nehmen.

§. 198.

Es sey z. B. folgende Gleichung gegeben: $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$. Hier kommen nun zwey Abwechselungen der Zeichen und auch zwey Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwey positive und auch zwey negative Wurzeln habe, welche alle Theiler der Zahl 12 seyn müssen. Da nun diese Theiler 1, 2, 3, 4, 6, 12 sind, so probire man erstlich mit $x = +1$. Weil auch wirklich, wenn man 1 anstatt x in der Gleichung setzt, 0 heraus kömmt, so ist eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$, so kömmt folgendes $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$, und daher giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man setze ferner $x = 2$, so wird unsere Formel wieder $= 0$, und also $x = 2$ eine Wurzel; hingegen $x = -2$ geht nicht an. Setzt man weiter $x = 3$, so kömmt $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$; geht also auch nicht an. Man setze aber $x = -3$, so kömmt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$; folglich ist $x = -3$ eine Wurzel. Eben so findet man auch, daß $x = -4$ eine Wurzel seyn werde, also daß alle vier Wurzeln rational, und zwar zwey positiv und zwey negativ sind, nemlich: I.) $x = 1$, II.) $x = 2$, III.) $x = -3$, IV.) $x = -4$.

§. 199.

Wenn aber keine Wurzel rational ist, so läßt sich auch durch diesen Weg keine finden; daher man auf solche Mittel bedacht gewesen ist, um in diesen

Fällen

Fällen die Irrationalwurzeln ausdrücken zu können. Man hat auch wirklich zwey verschiedene Wege entdeckt, um solche Wurzeln zu finden, die biquadratische Gleichung mag auch beschaffen seyn wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeine Untersuchungen erläutern, so wird es gut seyn, vorher noch einige besondre Fälle aufzulösen, welche öfters mit Nutzen gebraucht werden können.

§. 200.

Wir wollen setzen, die Gleichung sey so beschaffen, daß die Zahlen in den Gliedern oder die Coefficienten rückwärts eben so fortgehen als vorwärts, wie in folgender Gleichung geschieht:

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + mx + 1 = 0,$$

welche man noch etwas allgemeiner auf folgende Art vorstellen kann:

$$x^4 + max^3 + na^2x^2 + ma^3x + a^4 = 0.$$

Eine solche Form kann jedesmal als ein Product zweyer Factoren, welche quadratische Gleichungen sind, angesehen werden, welche sich leicht bestimmen lassen. Denn man setze für diese Gleichung folgendes Product: $(x^2 + pax + a^2)(x^2 + qax + a^2) = 0$, wo p und q gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung herauskomme. Es wird aber durch wirkliche Multiplication gefunden:

$$x^4 + (p+q)ax^3 + (pq+2)a^2x^2 + (p+)qa^3x + a^4 = 0;$$

damit also diese Gleichung mit der gegebenen einerley sey, so werden folgende zwey Stücke erfordert: I.) daß $p + q = m$, und II.) daß $pq + 2 = n$, folglich $pq = n - 2$.

Die erstere quadrirt, giebt $p^2 + 2pq + q^2 = m^2$, und wenn man hiervon die andere viermal genommen, nemlich $4pq = 4n - 8$, subtrahirt, so bleibt übrig $p^2 - 2pq + q^2 = m^2 - 4n + 8$, wovon die

Quadratwurzel $p - q = \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$ ist. Da nun $p + q = m$, so erhalten wir durch die Addition: $2p = m + \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$ oder $p = \frac{m + \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}}{2}$; durch die Subtraction aber bekommen wir: $2q = m - \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$ oder $q = \frac{m - \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so darf man nur einen jeden der Factoren $= 0$ setzen, um daraus die Werthe von x zu finden. Der erste giebt $x^2 + pax + a^2 = 0$ oder $x^2 = - pax - a^2$, woraus man findet $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2a^2}{4} - a^2\right)}$ oder $x = -\frac{pa}{2} \pm a\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - 1\right)}$ oder $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2 - 4)}$; der andere Factor giebt aber $x = -\frac{a^2}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(q^2 - 4)}$ und also hat man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Anmerk. Solche Gleichungen kann man reciproke Gleichungen nennen, weil sie sich nicht verändern, wenn man in ihnen $\frac{1}{x}$ statt x setzt. Aus dieser Eigenschaft folgt, daß wenn z. B. a eine Wurzel wäre, auch $\frac{1}{a}$ eine seyn muß; dieses ist die Ursache, warum dergleichen Gleichungen sich auf andere bringen lassen, deren Grad um die Hälfte kleiner ist. de *Moivre* giebt in seinen Miscellaneis analyticis, Seite 71. allgemeine Formeln für die Reduction solcher Gleichungen von beliebigem Grade. Deutsche finden dergleichen in den analytischen Entdeckungen u. s. w. von Hulbe. Berlin, 1794.

§. 201.

Um dies zu erläutern, so sey folgende Gleichung gegeben: $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$. Hier ist nun $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, daher $m^2 - 4n + 8 = 36$ und die Quadratwurzel daraus $= 6$ seyn wird. Wir bekommen also $p = \frac{-4 + 6}{2} = 1$ und

$q = -$

$q = -\frac{4-6}{2} = -5$, woraus die vier Wurzeln seyn werden: I.) und II.) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; ferner die III.) und IV.) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also folgende:

I.) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, II.) $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$,

III.) $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, IV.) $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$,

von welchen die zwey ersten imaginär oder unmöglich, die beyden andern aber möglich sind, weil man $\sqrt{21}$ so genau anzeigen kann als man will, indem man die Wurzel durch Decimalbrüche ausdrückt. Denn da 21 so viel ist als 21,00000000, so ziehe man daraus die Quadratwurzel wie folget:

```
         21|00|00|00|00|4,5825
         16|
      85|500
        |425
     908|7500
        |7264
    9162|23600
        |18324
   91645|527600
        |458225
          69375
```

Da nun $\sqrt{21} = 4,5825$, so ist die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4,7912$, und die vierte $x = 0,2087$, welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil die vierte Wurzel dem Bruch $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kömmt, so wird dieser Werth der Gleichung auch ziemlich ein Genüge leisten. Man setze also $x = \frac{1}{5}$, so bekömmt man $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$, und dieses sollte $= 0$ seyn, welches ziemlich genau eintrift.

§. 202.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflösung statt findet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß das zweyte und vierte Glied verschiedene Zeichen haben. Eine solche Gleichung ist daher: $x^4 + max^3 + na^2x^2 - ma^3x^3 + a^4 = 0$, welche durch folgendes Product vorgestellt werden kann: $(x^2 + pax - a^2)(x^2 + qax - a^2) = 0$. Denn durch die Multiplication bekömmt man $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq - 2)a^2x^2 - (p+q)a^3x + a^4$, welche mit der gegebenen einerley wird, wenn erstlich $p+q=m$, und hernach $pq-2=n$ oder $pq=n+2$; denn auf diese Art wird das vierte Glied von selbst einerley. Man quadrire, wie vorher, die erste Gleichung, so hat man $p^2 + 2pq + q^2 = m^2$. Hiervon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekömmt man $p^2 - 2pq + q^2 = m^2 - 4n - 8$, woraus die Quadratwurzel giebt:
$p - q = \sqrt{(m^2 - 4n - 8)}$; daher erhalten wir $p = \frac{m + \sqrt{(m^2 - 4n - 8)}}{2}$ und $q = \frac{m - \sqrt{(m^2 - 4n - 8)}}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so giebt der erste Factor diese zwey Wurzeln $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2 + 4)}$ und der zweyte Factor giebt diese: $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(q^2 + 4)}$ und so hat man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. 203.

Es sey z. B. folgende Gleichung gegeben: $x^4 - 3 \cdot 2x^3 + 3 \cdot 8x + 16 = 0$. Hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$; daher $\sqrt{(m^2 - 4n - 8)} = 1$; folglich $p = \frac{-3+1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3-1}{2} = -2$, woraus die zwey erstern Wurzeln seyn werden: $x = 1 \pm \sqrt{5}$, und die zwey letztern: $x = 2 \pm \sqrt{8}$, so daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden: I.) $x = 1 + \sqrt{5}$, II.) $x = 1 - \sqrt{5}$, III.) $x = 2 + \sqrt{8}$, IV.) $x = 2 - \sqrt{8}$. Die vier Factoren unserer Gleichung sind also $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$, welche wirklich mit einander multiplicirt, unsere Gleichung hervorbringen müssen. Denn der erste und zweyte mit einander multiplicirt, geben $x^2 - 2x - 4$, und die beyden andern geben $x^2 - 4x - 4$, und diese zwey Producte wieder mit einander multiplicirt, geben $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, welches gerade die gegebene Gleichung ist.

XIV. Capitel.

Von der Regel des Bombelli, die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf cubische zu bringen.

§. 204.

Da schon oben gezeigt ist, wie die cubischen Gleichungen durch Hülfe der Regel des Cardan aufgelöset werden können, so kömmt es hauptsächlich bey den biquadratischen Gleichungen darauf an, daß