Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XIV. Capitel. Von der Regel des Bombelli.

§. 203.

Es sey z. B. folgende Gleichung gegeben: $x^4 - 3 \cdot 2x^3 + 3 \cdot 8x + 16 = 0$. Hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$; daher $\sqrt{(m^2 - 4n - 8)} = 1$; folglich $p = \frac{-3+1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3-1}{2} = -2$, woraus die zwey erstern Wurzeln seyn werden: $x = 1 \pm \sqrt{5}$, und die zwey letztern: $x = 2 \pm \sqrt{8}$, so daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden: I.) $x = 1 + \sqrt{5}$, II.) $x = 1 - \sqrt{5}$, III.) $x = 2 + \sqrt{8}$, IV.) $x = 2 - \sqrt{8}$. Die vier Factoren unserer Gleichung sind also $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$, welche wirklich mit einander multiplicirt, unsere Gleichung hervorbringen müssen. Denn der erste und zweyte mit einander multiplicirt, geben $x^2 - 2x - 4$, und die beyden andern geben $x^2 - 4x - 4$, und diese zwey Producte wieder mit einander multiplicirt, geben $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, welches gerade die gegebene Gleichung ist.

XIV. Capitel.

Von der Regel des Bombelli, die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf cubische zu bringen.

§. 204.

Da schon oben gezeigt ist, wie die cubischen Gleichungen durch Hülfe der Regel des Cardan aufgelöset werden können, so kömmt es hauptsächlich bey den biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf cubische Gleichungen zu bringen wisse, weil ohne Hülfe der cubischen Gleichungen es nicht möglich ist, die biquadratischen auf eine allgemeine Art aufzulösen. Denn wenn man auch eine Wurzel gefunden hat, so erfordern doch die übrigen Wurzeln eine cubische Gleichung, woraus man sogleich erkennt, daß die Gleichungen von einem höhern Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

Hierzu hat nun schon vor vielen Jahren ein Italiener, Namens Bombelli, eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen *).

§. 205.

Es sey daher die allgemeine biquadratische Gleichung gegeben: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur mögliche Zahlen bedeuten können. Nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerley sey:

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

wo es nur darauf ankommt die Buchstaben p und q und r so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskömmt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so erhält man:

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 &+ \tfrac{1}{4}a^2x^2 + apx + p^2 \\ &+ 2px^2 - 2qrx - r^2 \\ &- q^2x^2 \end{aligned}$$

Hier sind nun die zwey ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerley; für das dritte Glied muß man setzen: $\frac{1}{4}a^2 + 2p - q^2 = b$, woraus man bekömmt $q^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2p - b$. Für das vierte Glied

*) Diese Methode gehört vielmehr dem Ludewig Ferrari. Man nennt sie uneigentlich die Regel des Bombelli, eben so, wie man die von Scipio Ferreo erfundene Methode, dem Cardan zuschreibt.

Glied muß man setzen $ap - 2qr = c$; hieraus erhält man $2qr = ap - c$. Für das letzte Glied aber $p^2 - r^2 = d$, woraus $r^2 = p^2 - d$ wird. Aus diesen drey Gleichungen müssen nun die drey Buchstaben p, q und r bestimmt werden.

§. 206.

Um dieses auf die leichteste Art zu bewerkstelligen, so nehme man von der ersten Gleichung $q^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2p - b$ das vierfache, d. i. $4q^2 = a^2 + 8p - 4b$; dieses multiplicire man mit der letzten Gleichung $r^2 = p^2 - d$, so bekömmt man folgende Gleichung: $4q^2r^2 = 8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - d(a^2 - 4b)$. Nun quadrire man die mittlere Gleichung $2qr = ap - c$, wovon das Quadrat ist $4q^2r^2 = a^2p^2 - 2acp + c^2$. Wir haben also zwey Werthe für $4q^2r^2$, welche einander gleich gesetzt, folgende Gleichung geben: $8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - d(a^2 - 4b) = a^2p^2 - 2acp + c^2$; oder wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, $8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - c^2$, welches eine cubische Gleichung ist, aus welcher in jedem Falle der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden muß.

§. 207.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d die drey Werthe des Buchstaben p gefunden, wozu es hinreicht, wenn man nur einen davon entdeckt hat, so erhält man daraus sogleich die beyden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird $q = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b)}$ seyn, und aus der zweyten erhält man $r = \frac{ap - c}{2q}$. Wenn aber diese drey Buchstaben für einen jeden Fall gefunden sind, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgendergestalt bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf die Form $(x^2+\frac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0$ gebracht haben, so ist $(x^2+\frac{1}{2}ax+p)^2=(qx+r)^2$; und die Quadratwurzel davon $x^2+\frac{1}{2}ax+p=qx+r$, oder auch $x^2+\frac{1}{2}ax+p=-qx-r$. Die erstere giebt $x^2=(q-\frac{1}{2}a)x-p+r$, woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey werden aber aus der andern gefunden, welche $x^2=-(q+\frac{1}{2}a)x-p-r$ ist.

§. 208.

Um diese Regel mit einem Beyspiele zu erläutern, so sey folgende Gleichung gegeben: $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$, welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen, giebt $a=-10$, $b=35$, $c=-50$, $d=24$; woraus zur Bestimmung des Buchstaben p folgende Gleichung entsteht: $8p^3-140p^2+808p-1540=0$; welche durch 4 dividirt, $2p^3-35p^2+202d-385=0$ giebt. Die Theiler der letzten Zahl sind 1, 5, 7, 11 u. s. f., von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p=5$, so kömmt $250-875+1010-385=0$, folglich ist $p=5$. Will man auch setzen $p=7$, so erhält man $686-1715+1414-385=0$; also ist $p=7$ die zweyte Wurzel. Man dividire, um die dritte zu finden, die Gleichung durch 2, so kömmt $p^3-\frac{35}{2}p^2+101p-\frac{385}{2}=0$, und da die Zahl im zweyten Gliede $\frac{35}{2}$ die Summe aller drey Wurzeln ist, die beyden erstern aber zusammen 12 machen, so muß die dritte $\frac{11}{2}$ seyn; also haben wir nun alle drey Wurzeln. Es wäre aber genug, nur eine zu wissen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer biquadratischen Gleichung herauskommen müssen.

§. 209.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdann $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$ und $r = \frac{-50+50}{0} = \frac{0}{0}$. Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung: $r^2 = p^2 - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$; daher unsere beyden Quadratgleichungen seyn werden:

$$\text{I.)}\ x^2 = 5x - 4,\quad \text{II.)}\ x^2 = 5x - 6.$$

Die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln: $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$. Die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.

Will man aber $p = 7$ setzen, so wird $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ und $r = \frac{-70+50}{4} = -5$, woraus folgende zwey Quadratgleichungen entstehen: I.) $x^2 = 7x - 12$, II.) $x^2 = 3x - 2$; die erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, daher $x = 4$ und $x = 3$. Die zweyte giebt die Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$; daher $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier schon vorher gefundenen Wurzeln sind. Eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werth $p = \frac{11}{2}$. Denn da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55+50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden quadratischen Gleichungen fließen:

$$\text{I.)}\ x^2 = 6x - 8,\quad \text{II.)}\ x^2 = 4x - 3.$$

Aus der erstern bekömmt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also

also $x = 3$ und $x = 1$, welches die schon gefundenen vier Wurzeln sind.

§. 210.

Es sey ferner folgende Gleichung gegeben: $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$ ist; daher unsre cubische Gleichung seyn wird: $8p^3 + 96p - 256 = 0$, d. i. $p^3 + 12p - 32 = 0$; diese Gleichung wird noch einfacher, wenn man $p = 2t$ setzt; da wird nemlich $8t^3 + 24t - 32 = 0$ oder $t^3 + 3t - 4 = 0$. Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist. Hieraus findet man $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4$. Daher sind die beyden Quadratgleichungen $x^2 = 2x + 2$ und $x^2 = -2x - 6$; folglich die Wurzeln $x = 1 \pm \sqrt{3}$, und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

§. 211.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe in folgendem Beyspiele ganz wiederholen:

Es sey daher die Gleichung $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0$ gegeben, welche in der Formel $(x^2 - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$ enthalten seyn soll. Hier ist im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil -3 die Hälfte der Zahl -6 im zweyten Gliede der Gleichung ist; diese Form aber entwickelt giebt $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - q^2)x^2 - (6p + 2qr)x + p^2 - r^2 = 0$, mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung und so bekömmt man:
I.) $2p + 9 - q^2 = 12$, II.) $6p + 2qr = 12$, III.) $p^2 - r^2 = 4$; aus der ersten erhalten wir $q^2 = 2p - 3$, aus der zweyten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr = 6 - 3p$,

$3p$, aus der dritten $r^2 = p^2 - 4$. Nun multiplicire man r^2 und q^2 mit einander, so bekömmt man $q^2r^2 = 2p^3 - 3p^2 - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kömmt $q^2r^2 = 36 - 36p + 9p^2$; daher erhalten wir folgende Gleichung: $2p^3 - 3p^2 - 8p + 12 = 9p^2 - 36p + 36$, oder $2p^3 - 12p^2 + 28p - 24 = 0$, durch 2 dividirt, giebt $p^3 - 6p^2 + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel $p = 2$ ist; daraus wird $q^2 = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$. Unsere Gleichung wird also seyn: $(x^2 - 3x + 2)^2 = x^2$, daraus die Quadratwurzel $x^2 - 3x + 2 = \pm x$; gilt das obere Zeichen, so hat man $x^2 = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $x^2 = 2x - 2$, woraus diese vier Wurzeln gefunden werden: $x = 2 \pm \sqrt{2}$, und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

XV. Capitel.

Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§. 212.

Wie durch die obige Regel des Bombelli die biquadratischen Gleichungen mit Hülfe einer cubischen aufgelöset werden, so hat man seitdem noch einen neuen Weg entdeckt, um eben diesen Zweck zu erreichen, der aber von dem vorigen durchaus abweicht, und daher wohl eine besondere Erklärung verdient *).

§. 213.

*) Die in diesem Capitel enthaltene Methode ist von Euler selbst. Er hat sie in dem sechsten Theil der ältern Petersburgischen Commentarien bekannt gemacht.