Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XV. Capitel. Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

$3p$, aus der dritten $r^2 = p^2 - 4$. Nun multiplicire man r^2 und q^2 mit einander, so bekömmt man $q^2r^2 = 2p^3 - 3p^2 - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kömmt $q^2r^2 = 36 - 36p + 9p^2$; daher erhalten wir folgende Gleichung: $2p^3 - 3p^2 - 8p + 12 = 9p^2 - 36p + 36$, oder $2p^3 - 12p^2 + 28p - 24 = 0$, durch 2 dividirt, giebt $p^3 - 6p^2 + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel $p = 2$ ist; daraus wird $q^2 = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$. Unsere Gleichung wird also seyn: $(x^2 - 3x + 2)^2 = x^2$, daraus die Quadratwurzel $x^2 - 3x + 2 = \pm x$; gilt das obere Zeichen, so hat man $x^2 = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $x^2 = 2x - 2$, woraus diese vier Wurzeln gefunden werden: $x = 2 \pm \sqrt{2}$, und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

XV. Capitel.

Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§. 212.

Wie durch die obige Regel des Bombelli die biquadratischen Gleichungen mit Hülfe einer cubischen aufgelöset werden, so hat man seitdem noch einen neuen Weg entdeckt, um eben diesen Zweck zu erreichen, der aber von dem vorigen durchaus abweicht, und daher wohl eine besondere Erklärung verdient *).

§. 213.

*) Die in diesem Capitel enthaltene Methode ist von Euler selbst. Er hat sie in dem sechsten Theil der ältern Petersburgischen Commentarien bekannt gemacht.

§. 213.

Man setze, die Wurzel einer biquadratischen Gleichung habe die Form: $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo die Buchstaben p, q und r die drey Wurzeln einer solchen cubischen Gleichung andeuten: $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, so daß $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ und $pqr = h$ seyn wird. Dieses vorausgesetzt, so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wodurch man erhält: $x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p + q + r = f$, so wird $x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$ seyn. Nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird $x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2}$. Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, so wird $x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g = 8\sqrt{pqr}.(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$. Weil aber $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$ und $pqr = h$, also $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, so gelangen wir zu der biquadratischen Gleichung: $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$, von welcher die Wurzel gewiß $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ ist, und wo p, q und r die drey Wurzeln von der obigen cubischen Gleichung:

$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0 \text{ sind.}$$

§. 214.

Die herausgebrachte biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweyte Glied x^3 darin fehlt. Denn man kann immer eine jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir dies hernach zeigen wollen.

Es sey daher diese biquadratische Gleichung gegeben: $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe

selbe daher mit der gefundenen Form, um dadurch die Buchstaben f, g und h zu bestimmen. Dazu wird erfordert, daß I.) $2f = a$, also $f = \frac{a}{2}$, II.) $8\sqrt{h} = b$, also $h = \frac{b^2}{64}$, III.) $f^2 - 4g = -c$, oder $\frac{a^2}{4} - 4g + c = 0$, oder $\frac{1}{4}a^2 + c = 4g$, folglich $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$.

§. 215.

Aus der gegebenen Gleichung: $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$ findet man daher die Buchstaben f, g und h also bestimmt: $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$, und $h = \frac{1}{64}b^2$ oder $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$. Hieraus mache man diese cubische Gleichung: $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln suchen muß. Diese mögen nun folgende seyn: I.) $z = p$, II.) $z = q$, III.) $z = r$; aus welchen, wenn sie gefunden worden sind, eine Wurzel unserer biquadratischen Gleichung seyn wird, $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

§. 216.

So scheint es zwar, daß nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden sey, allein da ein jedes Quadratwurzelzeichen sowohl negativ als positiv genommen werden kann, so enthält diese Form sogar alle vier Wurzeln.

Wollte man alle Veränderungen der Zeichen gelten lassen, so kämen 8 verschiedene Werthe für x heraus, wovon doch nur 4 gelten können. Denn es ist zu bemerken, daß das Product dieser drey Glieder, nemlich $\sqrt{pqr}$ gleich seyn müsse dem $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daher wenn $\frac{1}{8}b$ positiv ist, so muß das Product der Theile auch positiv seyn, in welchem Fall nur diese vier Aenderungen gelten:

I.) x

$$\text{I.)}\ x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$
$$\text{II.)}\ x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r},$$
$$\text{III.)}\ x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r},$$
$$\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

ist aber $\frac{1}{8}b$ negativ, so sind die 4 Werthe von x folgende:

$$\text{I.)}\ x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r},$$
$$\text{II.)}\ x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r},$$
$$\text{III.)}\ x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$
$$\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}.$$

Mit Hülfe dieser Anmerkung können in jedem Fall alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie man aus folgendem Beyspiele ersehen kann.

§. 217.

Es sey folgende biquadratische Gleichung gegeben, in welcher das zweyte Glied fehlt: $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$, welche mit der obigen Formel verglichen, $a = 25$, $b = -60$ und $c = 36$ giebt, woraus man ferner erhält: $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$ und $h = \frac{225}{4}$. Folglich ist nunmehr unsere cubische Gleichung:

$$z^3 - \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0.$$

Um die Brüche wegzubringen, setze man $z = \frac{u}{4}$, so wird $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2}\cdot\frac{u^2}{16} + \frac{769}{16}\cdot\frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, woraus man, wenn man mit 64 multiplicirt, $u^3 - 50u^2 + 769u - 3600 = 0$ erhält, wovon die drey Wurzeln gefunden werden müssen, welche alle drey positiv sind, und wovon eine Wurzel $u = 9$ ist. Um die zweyte zu finden, so theile man $u^3 - 50u^2 + 769u - 3600$ durch $u - 9$, und da kömmt diese neue Gleichung: $u^2 - 41u + 400 = 0$ oder $u^2 = 41u - 400$, woraus $u = \frac{41}{2} + \sqrt{\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)}$ =

$= \frac{41 \pm 9}{2}$ gefunden wird. Folglich sind die drey Wurzeln $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$; daher wir nunmehr erhalten:

$$\text{I.)}\ z = \tfrac{9}{4},\quad \text{II.)}\ z = 4,\quad \text{III.)}\ z = \tfrac{25}{4}.$$

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben p, q und r, so daß $p = \frac{9}{4}$, $q = 4$, $r = \frac{25}{4}$. Weil nun $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$, und dieser Werth $= \frac{1}{8}b$ negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ darnach richten. Es muß nemlich entweder nur ein $(-)$ oder drey $(-)$ vorhanden seyn. Da nun $\sqrt{p} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{q} = 2$ und $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, so werden die vier Wurzeln unserer gegebenen Gleichung seyn:

$$\begin{aligned}
&\text{I.)}\ x = \tfrac{3}{2} + 2 - \tfrac{5}{2} = 1,\\
&\text{II.)}\ x = \tfrac{3}{2} - 2 + \tfrac{5}{2} = 2,\\
&\text{III.)}\ x = -\tfrac{3}{2} + 2 + \tfrac{5}{2} = 3,\\
&\text{IV.)}\ x = -\tfrac{3}{2} - 2 - \tfrac{5}{2} = -6,
\end{aligned}$$

aus welchen folgende vier Factoren der Gleichung entstehen: $(x-1)(x-2)(x-3)(x+6) = 0$, wovon die beyden ersten $x^2 - 3x + 2$, die beyden letztern aber $x^2 + 3x - 18$ geben, und diese zwey Producte mit einander multiplicirt, bringen gerade unsere Gleichung hervor.

§. 218.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie eine biquadratische Gleichung, in welcher das zweyte Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden könne, darin das zweyte Glied fehlt; hierzu dient folgende Regel:

Es sey folgende allgemeine Gleichung gegeben: $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$. Hier setze man zu y den vierten Theil des Coefficienten von dem zweyten Gliede, nemlich $\frac{1}{4}a$, und schreibe dafür einen neuen Buchstaben x, so daß $y + \frac{1}{4}a = x$, folglich $y = x - \frac{1}{4}a$; daraus wird $y^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$, ferner $y^3 = x^3 - \frac{3}{4}ax^2 + \frac{3}{16}a^2x - \frac{1}{64}a^3$, und daraus endlich:

$$\begin{array}{rlllll}
y^4 = & x^4 - ax^3 & + \frac{3}{8}a^2x^2 & - \frac{1}{16}a^3x & + \frac{1}{256}a^4 \\
+ ay^3 = & + ax^3 & - \frac{3}{4}a^2x^2 & + \frac{3}{16}a^3x & - \frac{1}{64}a^4 \\
+ by^2 = & & + bx^2 & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}a^2b \\
+ cy = & & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
+ d = & & & & + d \\
\hline
& x^4 + 0 & - \frac{3}{8}a^2x^2 & + \frac{1}{8}a^3x & - \frac{3}{256}a^4 \\
& & + bx^2 & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}a^2b \\
& & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
& & & & + d
\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} = 0$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, das zweyte Glied weggefallen ist, so daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden, und daraus die vier Wurzeln von x bestimmen kann, aus welchen hernach die vier Werthe von y sich von selbst ergeben, weil $y = x - \frac{1}{4}a$ ist.

§. 219.

So weit ist man bisher in Auflösung der algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen, die Gleichungen vom fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder wenigstens auf die niedrigsten Grade zu bringen, sind fruchtlos gewesen, so daß es nicht möglich ist, allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen gefunden werden könnten.

Alles, was darin geleistet worden, geht nur auf ganz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wenn irgend eine Rationalwurzel Statt findet, welche durch Probiren leicht heraus gebracht

gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Gliedes seyn muß; und hiermit ist es eben so beschaffen, wie wir schon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grade gesehen haben.

§. 220.

Es wird aber doch noch nöthig seyn, diese Regel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind:

Eine solche Gleichung sey nun $y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8 = 0$. Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegschaffen; daher setze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil des Coefficienten von dem zweyten Gliede, nemlich $y - 2 = x$, so wird $y = x + 2$ und $y^2 = x^2 + 4x + 4$, ferner $y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

$$\begin{array}{lrrrrr}
\text{und } y^4 = & x^4 & + 8x^3 & + 24x^2 & + 32x & + 16 \\
- 8y^3 = & & - 8x^3 & - 48x^2 & - 96x & - 64 \\
+ 14y^2 = & & & + 14x^2 & + 56x & + 56 \\
+ 4y = & & & & + 4x & + 8 \\
- 8 = & & & & & - 8 \\
\hline
& x^4 & + 0 & - 10x^2 & - 4x & + 8 = 0.
\end{array}$$

Diese Gleichung mit unserer allgemeinen Form verglichen, giebt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; woraus wir daher schließen, daß $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$ sey. Hieraus sehen wir, daß das Product $\sqrt{pqr}$ positiv seyn wird. Die cubische Gleichung wird daher seyn: $z^3 - 5z^2 + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$; von dieser cubischen Gleichung müssen nun die drey Wurzeln p, q und r gesucht werden.

§. 221.

Hier müssen nun erst die Brüche weggeschafft werden, deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$, so wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5u^2}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$. Diese Gleichung mit 8 multiplicirt, giebt $u^3 - 10u^2 + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Gliedes 1 und 2 sind, so sey erstlich $u = 1$, alsdann wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$, und also nicht 0. Setzt man aber $u = 2$, so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$; daher ist eine Wurzel $u = 2$. Um die andere zu finden, so theile man durch $u - 2$, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
u-2)\; u^3 - 10u^2 + 17u - 2\; (u^2 - 8u + 1 \\
\quad\quad\;\; \underline{u^3 - \;\; 2u^2} \\
\quad\quad\quad\;\; - 8u^2 + 17u \\
\quad\quad\quad\;\; \underline{- 8u^2 + 16u} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad u - 2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{u - 2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 0
\end{array}
$$

und da bekömmt man $u^2 - 8u + 1 = 0$, oder $u^2 = 8u - 1$, woraus die beyden übrigen Wurzeln $u = 4 \pm \sqrt{15}$ sind. Da nun $z = \frac{1}{2}u$, so sind die drey Wurzeln der cubischen Gleichung:

I.) $z = p = 1$, II.) $z = q = \frac{4+\sqrt{15}}{2}$, III.) $z = r = \frac{4-\sqrt{15}}{2}$.

§. 222.

Da wir nun p, q und r gefunden haben, so werden ihre Quadratwurzeln seyn: $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8+2\sqrt{15})}}{2}$ $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}}{2}$.

Weil

Weil aber, wie oben (§. 115) gezeigt worden ist, die Quadratwurzel aus $(a \pm \sqrt{b})$, wenn $\sqrt{(a^2 - b)} = c$, folgendergestalt ausgedrückt werden kann: $\sqrt{(a \pm b)} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, so ist für unsern Fall $a = 8$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$; folglich $b = 60$, daher $c = 2$. Hieraus bekommen wir $\sqrt{(8+2\sqrt{15})} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$, und $\sqrt{(8-2\sqrt{15})} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Da wir nun gefunden haben: $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ und $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, so werden die vier Werthe für x, denn wir wissen, daß das Product derselben positiv seyn muß, folgende Beschaffenheit haben:

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$

II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$

III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$

IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$.

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x + 2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben:

I.) $y = 3 + \sqrt{5}$,	III.) $y = 1 + \sqrt{3}$,
II.) $y = 3 - \sqrt{5}$,	IV.) $y = 1 - \sqrt{3}$.