Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XVI. Capitel. Von der Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

XVI. Capitel.

Von der Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

§. 223.

Wenn die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, sie mögen nun durch Wurzelzeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bey den höhern Gleichungen geschieht, so muß man sich begnügen, den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, so, daß man dem wahren Werthe derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich für nichts zu achten ist. Man hat zu diesem Ende verschiedene Mittel erfunden, von welchen wir die vornehmsten hier erklären wollen.

§. 224.

Die erste Art besteht darin, daß man den Werth einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht habe, und z. B. schon wisse, daß derselbe größer sey als 4, und doch kleiner als 5. Alsdenn setze man den Werth der Wurzel $= 4 + p$, da denn p gewiß einen Bruch bedeuten wird. Ist aber p ein Bruch, und also kleiner als 1, so ist das Quadrat, der Cubus, und eine jede höhere Potenz von p noch weit kleiner; daher man dieselbe aus der Rechnung weglassen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankömmt. Hat man nun weiter diesen Bruch p nur beynahe bestimmt, so erkennt man die Wurzel $4 + p$ schon genauer. Hieraus erforscht man auf gleiche Art seinen noch genauern Werth, und geht solchergestalt

so

so weit fort, bis man der Wahrheit so nahe gekommen ist, als man wünschet.

Anmerk. Diese Methode hat Newton gleich zu Anfange seines Method of Fluxions Introd. §. 19 gegeben. Untersucht man sie genauer, so wird man manche Unvollkommenheiten gewahr. Indessen scheint sie unter mehreren Methoden, die man hat, die bequemste zu seyn. Nur die Methode von Lagrange in den Mémoires de Berlin, 1767 und 68, möchte ihr diesen Vorzug streitig machen.

§. 225.

Wir wollen dieses zuerst durch ein leichtes Beyspiel erläutern, und die Wurzel der Gleichung $x^2=20$ durch Näherungen bestimmen.

Hier sieht man nun, daß x größer ist als 4, und doch kleiner als 5; daher setze man $x = 4 + p$, so wird $x^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$. Weil aber p^2 sehr klein ist, so lasse man dieses Glied weg, um folgende Gleichung zu haben: $16 + 8p = 20$, oder $8p = 4$. Hieraus wird $p = \frac{1}{2}$ und $x = 4\frac{1}{2}$, welches der Wahrheit schon weit näher kömmt, ob man gleich siehet, daß $4\frac{1}{2}$ etwas zu groß ist. Man setze daher ferner $x = 4\frac{1}{2} - p$, so ist man gewiß, daß p ein noch weit kleinerer Bruch seyn werde, als vorher; daher p^2 jezt mit noch größerem Rechte weggelassen werden kann. Man wird also haben: $x^2 = 20\frac{1}{4} - 9p + p^2 = 20$, und wenn man p^2 wegläßt, $20\frac{1}{4} - 9p = 20$, oder $20\frac{1}{4} - 20 = 9p$, d. i. $\frac{1}{4} = 9p$, und also $p = \frac{1}{36}$, folglich $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Wollte man der Wahrheit noch näher kommen, so setze man $x = 4\frac{17}{36} - p$, so bekömmt man $x^2 = 20\frac{1}{1296} - 8\frac{34}{36}p = 20$; daher $8\frac{34}{36}p = \frac{1}{1296}$, mit 36 multiplicirt kömmt $322p = \frac{36}{1296} = \frac{1}{36}$, und daraus wird $p = \frac{1}{36 \cdot 322} = \frac{1}{11592}$, folglich $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$; und dieser Werth kömmt der Wahrheit so nahe, daß der Fehler sicher als nichts angesehen werden kann.

Anmerk. Wem es nicht sogleich einleuchtend seyn möchte, daß $4\frac{1}{2}$ größer als x, oder $\frac{1}{2}$ größer als p ist, der darf nur folgende Betrachtung anstellen. Weil eigentlich die drey Theile $16 + 8p + p^2$ die Zahl 20 ausmachen, so müssen die zwey Theile $16 + 8p$ nothwendig kleiner als 20, und daher, wenn man 16 abzieht, $8p$ kleiner als 4, folglich auch der achte Theil von $8p$, d. i. p kleiner, als der achte Theil von 4, d. i. $\frac{1}{2}$, oder umgekehrt $\frac{1}{2}$ größer als p seyn. Diese Schlüsse sind allgemein gültig, denn wenn $x^2 = a$, und man hätte $x > n$ gefunden, so sey $x = n + p$, also $x^2 = n^2 + 2np + p^2$, läßt man p^2 weg, so ist offenbar $x^2 > n^2 + 2np$ oder $a > n^2 + 2np$, folglich auch $\frac{a - n^2}{2n} > p$. Man findet also mittelst der Formel $\frac{a - n^2}{2n}$, p immer zu groß, mithin auch $n + \frac{a - n^2}{2n}$ größer als x. Wer indessen während dem Rechnen nicht darauf achtet, den belehren die Resultate, ob p addirt oder subtrahirt werden müsse.

§. 226.

Um dieses allgemeiner zu machen, so sey folgende Gleichung gegeben: $x^2 = a$ und man wisse schon, daß x größer ist als n, doch aber kleiner als $n + 1$; man setze also $x = n + p$, so daß p ein Bruch seyn muß, und daher p^2 als sehr klein weggelassen werden kann. Weil nun $x^2 = (n + p)^2 = n^2 + 2np + p^2 = a$, so wird, wenn man p^2 wegläßt, $x^2 = n^2 + 2np = a$, also $2np = a - n^2$ und $p = \frac{a - n^2}{2n}$, folglich $x = n + \frac{a - n^2}{2n} = \frac{n^2 + a}{2n}$. Kam nun n der Wahrheit schon nahe, so kömmt dieser neue Werth $\frac{n^2 + a}{2n}$ der Wahrheit noch weit näher. Diesen setze man von neuem für n, so wird man der

Wahr-

Wahrheit noch näher kommen, und wenn man diesen neuen Werth nochmal für n setzet, so wird man dem wahren Werthe noch näher kommen; und auf diese Art kann man so weit fortgehen, als man nur immer will.

Es sey z. B. $a = 2$, oder man verlange die Quadratwurzel aus 2 zu wissen; hat man nun dafür schon einen ziemlich nahen Werth gefunden, welcher wiederum n heißen kann, so wird $\frac{n^2+2}{2n}$ einen noch nähern Werth geben. Es sey daher

I.) $n = 1$, so wird $x = \frac{3}{2}$,

II.) $n = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{17}{12}$,

III.) $n = \frac{17}{12}$, so wird $x = \frac{577}{408}$,

welcher letzte Werth der $\sqrt{2}$ schon so nahe kömmt, daß das Quadrat davon $= \frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer ist als 2.

§. 227.

Eben so kann man verfahren, wenn die Cubicwurzel oder eine noch höhere Wurzel durch die Näherung gefunden werden soll.

Es sey z. B. folgende cubische Geichung gegeben: $x^3 = a$, oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden. Diese Cubicwurzel sey nun beynahe $= n$, und man setze $x = n + p$, so wird, wenn man p^2 und die höhern Potenzen davon wegläßt, $x^3 = n^3 + 3n^2p = a$; daher $3n^2p = a - n^3$ und $p = \frac{a-n^3}{3n^2}$; folglich $x = \frac{2n^3+a}{3n^2}$. Kömmt also n der $\sqrt[3]{a}$ schon ziemlich nahe, so kömmt diese Form noch weit näher. Setzt man nun diesen neuen Werth wieder für n, so wird diese Formel der Wahrheit noch weit näher kommen, und so kann man fortgehen, so weit man will. Es sey z. B. $x^3 = 2$, oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welcher die Zahl n schon ziemlich nahe komme, so wird diese Formel $x = \frac{2n^3 + a}{3n^2}$ noch näher kommen; also setze man:

I.) $n = 1$, so wird $x = \frac{4}{3}$,
II.) $n = \frac{4}{3}$, so wird $x = \frac{91}{72}$,
III.) $n = \frac{91}{72}$, so wird $x \ \frac{162130896}{128634294}$.

§. 228.

Vermittelst dieser Methode lassen sich auch die Wurzeln aus allen übrigen Gleichungen durch Näherungen ~~zu~~ finden. Es sey daher die folgende allgemeine cubische Gleichung gegeben: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, und n zeige wiederum eine Zahl an, die einer Wurzel schon ziemlich nahe kömmt. Man setze daher $x = n - p$, und da p ein Bruch seyn wird, so lasse man p^2 und die höhern Potenzen davon weg. Man bekömmt also $x^2 = n^2 - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3n^2p$, woraus folgende Gleichung entsteht:
$n^3 - 3n^2p + an^2 - 2anp + bn - bp + c = 0$, oder $n^3 + an^2 + bn + c = 3n^2p + 2anp + bp = (3n^2 + 2an + b)p$; daher $p = \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3nn + 2an + b}$ und folglich bekommen wir für x folgenden genauern Werth $x = n - \left(\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}$.
Setzt man nun diesen neuen Werth noch einmal für n, so erhält man dadurch einen neuen, der der Wahrheit noch weit näher kömmt.

§. 229.

Es sey z. B. $x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$, daher wenn n einer Wurzel schon nahe kömmt, so wird ein noch näherer

Werth

Werth $x = \frac{2n^3+2n^2+50}{3n^2+4n+3}$ seyn. Nun aber kömmt der Werth $x = 3$ der Wahrheit schon ziemlich nahe; daher setze man $n = 3$, so bekömmt man $x = \frac{62}{21}$. Wollte man nun diesen Werth noch einmal für n schreiben, so würde man einen neuen Werth bekommen, der der Wahrheit noch weit näher käme.

§. 230.

Von höhern Gleichungen wollen wir nur folgendes Beyspiel beyfügen: $x^5 = 6x + 10$ oder $x^5 - 6x - 10 = 0$, wo leicht zu ersehen, daß 1 zu klein und 2 zu groß sey. Es sey aber $x = n$ ein schon naher Werth und man setze $x = n + p$, so wird $x^5 = n^5 + 5n^4p$, und also $n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$, oder $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$ und folglich $p = \frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$ und daher $x = \frac{4n^5+10}{5n^4-6}$. Man setze nun $n = 1$, so wird $x = \frac{14}{-1} = -14$, welcher Werth ganz ungeschickt ist; dies rührt daher, daß der nahe Werth n gar zu klein war, man setze daher $n = 2$, so wird $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, welcher der Wahrheit schon weit näher kömmt. Wollte man sich nun die Mühe geben, und für n diesen Bruch $\frac{69}{37}$ schreiben, so würde man zu einem noch weit genauern Werth der Wurzel x gelangen.

§. 231.

Dieses ist nun die bekannteste Art, die Wurzeln der Gleichung durch Näherung zu finden; und kann man sie auch in allen Fällen mit Nutzen gebrauchen.

Wir wollen aber doch noch eine andere Art hinzufügen, die wegen der Leichtigkeit der Rechnung unsere Aufmerksamkeit, obgleich keinen Vorzug vor jener verdient. Der Grund derselben beruht darauf, daß man für eine jede Gleichung eine Reihe von

Zahlen

Zahlen suche, als a, b, c, u. s. f., die so beschaffen sind, daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, den Werth der Wurzel um so viel genauer anzeige, je weiter man diese Reihe Zahlen fortsetzt.

Wir wollen annehmen, daß wir damit schon bis zu den Gliedern p, q, r, s, t u. s. f. gekommen wären, so muß $\frac{q}{p}$ die Wurzel x schon ziemlich genau anzeigen, oder es wird beynahe $\frac{q}{p} = x$ seyn.

Eben so wird man auch haben $\frac{r}{q} = x$, woraus wir durch die Multiplication erhalten $\frac{r}{p} = x^2$. Da auch $\frac{s}{r} = x$, so wird ferner $\frac{s}{p} = x^3$, und da weiter $\frac{t}{s} = x$, so wird $\frac{t}{p} = x^4$, u. s. f.

Anmerk. Diese Näherungsmethode gründet sich auf die Theorie der wiederkehrenden Reihen (séries récurrentes), welche wir *de Moivre* verdanken. *Daniel Bernoulli* hat diese Näherungsmethode im 3ten Theile der ältern Petersburger Commentarien zuerst bekannt gemacht. Aber Euler giebt sie hier ein wenig verändert. Diejenigen, welche diese Materie weiter studiren wollen, mögen das 13 und 14te Capitel des ersten Theils von Eulers Introd. in anal. inf. nachlesen. In diesem vortreflichen Werke werden sie manche in gegenwärtiger Algebra befindliche Materien, und sehr viele andere, die ebenfalls in Verbindung mit der reinen Mathematik stehen, mit eben so vieler Deutlichkeit als Gründlichkeit abgehandelt finden. Wir verdanken dem gelehrten Herrn Prof. Michelsen eine deutsche Uebersetzung unter dem Titel: Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 8. Berlin, 1788 u. f. Es sind 3 Bände, wovon der 3te enthält: Abh. von Euler und Lagrange aus den Petersburger und Berliner Memoiren, Gleichungen betreffend.

§. 232.

Um dieses zu erläutern, wollen wir folgende quadratische Gleichung betrachten: $x^2 = x + 1$, und wie-

wiederum setzen, daß in der oben gedachten Reihe von Zahlen folgende Glieder: $p, q, r, s, t,$ u. s. f. vorkommen. Da nun $\frac{q}{p} = x$ und $\frac{r}{p} = x^2$, so erhalten wir daraus diese Gleichung: $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$ oder $q + p = r$. Eben so wird auch seyn: $s = r + q$ und $t = s + r$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied unserer Reihe die Summe der beyden vorhergehenden ist, wodurch die Reihe, so weit man will, leicht fortgesetzt werden kann, wenn man nur einmal die zwey ersten Glieder hat; diese aber kann man nach Belieben annehmen. Daher setze man dafür 0, 1, so wird unsere Reihe also herauskommen:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, u. s. f.

wo von den entferntern Gliedern ein jedes durch das vorhergehende dividirt, den Werth für x um so viel genauer anzeigen wird, als man die Reihe weiter fortgesetzt hat. Anfangs ist zwar der Fehler sehr groß, je weiter man aber geht, desto geringer wird er. Diese der Wahrheit immer näher kommenden Werthe für x schreiten daher folgender Gestalt fort: $x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}$ u. s. f., wovon z. B. $x = \frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{169}$ beträgt, die folgenden Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

§. 233.

Wir wollen nun auch folgende Gleichung betrachten: $x^2 = 2x + 1$, und weil jedesmal $x = \frac{q}{p}$ und $x^2 = \frac{r}{p}$, so erhalten wir $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, oder $r = 2q + p$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied doppelt genommen, nebst dem vorhergehenden, das folgende giebt. Wenn wir also wieder mit 0, 1 anfangen, so bekommen wir folgende Reihe:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, u. s. f., daher der gesuchte Werth von x immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird:

$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}$, u. s. f., welche folglich dem wahren Werthe $x = 1 + \sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg, so geben folgende Brüche den Werth von $\sqrt{2}$ immer genauer:

$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$, u. s. f., von welchen $\frac{99}{70}$ zum Quadrat hat $\frac{9801}{4900}$, welches nur um $\frac{1}{4900}$ größer ist als 2.

§. 234.

Bey höhern Gleichungen findet diese Methode ebenfalls Statt. Denn wenn z. B. folgende cubische Gleichung gegeben wäre: $x^3 = x^2 + 2x + 1$, so setze man $x = \frac{q}{p}$, $x^2 = \frac{r}{p}$ und $x^3 = \frac{s}{p}$, und da bekömmt man $s = r + 2q + p$; hieraus sieht man, wie man aus drey Gliedern p, q und r das folgende s finden soll, und hier kann man wiederum den Anfang nach Belieben machen; eine solche Reihe wird daher seyn:

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, u. s. f. woraus folgende Brüche den Werth für x immer genauer geben werden:

$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}$, u. s. f. Hier sieht man gleich, wie stark die ersten von der Wahrheit abweichen, aber $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ giebt in der Gleichung $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, wo der Fehler nur $\frac{13}{343}$ ist.

§. 235.

Es ist aber dabey wohl zu merken, daß nicht alle Gleichungen diese Beschaffenheit haben, so daß man

man darauf diese Methode anwenden könne; besonders ist sie da unbrauchbar, wo das zweyte Glied fehlt. Denn es sey z. B. $x^2 = 2$ und man wollte setzen $x = \frac{q}{p}$ und $x^2 = \frac{r}{p}$, so würde man bekommen $\frac{r}{p} = 2$ oder $r = 2p$, das ist $r = 0q + 2p$, und es würde daraus folgende Reihe Zahlen entstehen:
1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 16, 32, 32, u. s. f.
Es kann aber hieraus nichts geschlossen werden, weil jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, entweder $x = 1$ oder $x = 2$ giebt. Diesem läßt sich aber abhelfen, wenn man $x = y - 1$ setzt; dann bekömmt man $y^2 \mp 2y + 1 = 2$, und wenn man hier $y = \frac{q}{p}$ und $y^2 = \frac{r}{p}$ setzt, so erhält man die schon oben gegebene Näherung.

§. 236.

Eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $x^3 = 2$, aus welcher sich keine Reihe von Zahlen finden läßt, die den Werth von $\sqrt[3]{2}$ anzeigte. Man darf aber nur $x = y - 1$ setzen, um die Gleichung $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 2$, oder $y^3 = 3y^2 - 3y + 3$ zu bekommen. Setzt man nun für die Reihe Zahlen $y = \frac{q}{p}$, $y^2 = \frac{r}{p}$ und $y^3 = \frac{s}{p}$; so wird $s = 3r - 3q + 3p$ seyn; woraus man sieht, wie man aus drey Gliedern das folgende bestimmen muß. Man nimmt also die drey ersten Glieder nach Belieben an, als z. B. 0, 0, 1, so bekömmt man diese Reihe:
0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324 u. s. f.
wovon die zwey letzten Glieder $y = \frac{324}{144}$ und $x = \frac{5}{4}$ geben, welcher Bruch auch der Cubicwurzel aus 2 ziemlich nahe kömmt, denn der Cubus von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{125}{64}$; dagegen ist $2 = \frac{128}{64}$.

§. 237.

§. 237.

Bey dieser Methode ist noch ferner zu merken. Wenn die Gleichung eine Rationalwurzel hat, und der Anfang der Reihe so angenommen wird, daß daraus diese Wurzel herauskömmt, so wird auch ein jedes Glied derselben, durch das vorhergehende dividirt, eben dieselbe Wurzel genau geben.

Um dieses zu zeigen, so sey folgende Gleichung gegeben: $x^2 = x + 2$, worin eine Wurzel $x = 2$ ist. Da man nun für die Reihe diese Formel $r = q + 2p$ hat, so erhält man, wenn man den Anfang setzt 1, 2, diese Reihe: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, u. s. f. d. i. eine geometrische Progression, deren Nenner $= 2$ ist.

Eben dieses erhellt auch aus der cubischen Gleichung: $x^3 = x^2 + 3x + 9$, wovon eine Wurzel $x = 3$ ist. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, so findet man aus der Formel $s = r + 3q + 9p$ diese Reihe: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, u. s. f., welches wieder eine geometrische Progression, deren Nenner $= 3$ ist.

§. 238.

Weicht aber der Anfang der Reihe von dieser Wurzel ab, so folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derselben Wurzel kommen werde. Denn wenn die Gleichung mehr Wurzeln hat, so nähert sich diese Reihe immer nur der größten Wurzel, und die kleinere erhält man nicht anders, als wenn gerade der Anfang nach derselben eingerichtet wird. Dieses wird durch ein Beyspiel deutlich werden. Es sey die Gleichung $x^2 = 4x - 3$, deren zwey Wurzeln $x = 1$ und $x = 3$ sind. Nun ist die Formel für die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$, und setz setzt man für den Anfang derselben 1, 1, nemlich für die kleinere Wurzel, so wird die ganze Reihe 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, u. s. f. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worin die größere Wurzel enthalten ist, so wird die Reihe:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, u. s. f., wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man aber den Anfang anders, nach Belieben, nur daß darin die kleinere Wurzel nicht genau enthalten ist, so nähert sich die Reihe immer der größern Wurzel 3, wie man aus folgenden Reihen sehen kann:

der Anfang sey 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, u. s. f.
ferner 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, u. s. f.
ferner 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095, u. s. f.
ferner 2, 1, −2, −11, −38, −118, −362, −1091, −3287, u. s. f.

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden dividirt, immer solche Quotienten geben, die immer der größern Wurzel 3, niemals aber der kleinern, näher kommen.

§. 239.

Diese Methode kann auch so gar auf Gleichungen, die in das Unendliche fortlaufen, angewendet werden; folgende Gleichung mag hier zum Beyspiele dienen:

$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} +$ u. s. f.

für welche die Reihe Zahlen so beschaffen seyn muß, daß eine jede der Summe aller vorhergehenden gleich sey, woraus diese Reihe entsteht:

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, u. s. f.

Hieraus sieht man, daß die größte Wurzel dieser Gleichung ganz genau $x = 2$ sey, welches auch auf diese Art gezeigt werden kann. Man theile die

Gleichung durch x^∞, so bekömmt man

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \text{ u. s. f.},$$

welches eine geometrische Progression ist, von welcher die Summe $= \frac{1}{x-1}$ gefunden wird, so daß $1 = \frac{1}{x-1}$; multiplicirt man mit $x - 1$, so wird $x - 1 = 1$, folglich $x = 2$.

§. 240.

Außer diesen zwey Methoden die Wurzel der Gleichung durch Näherung zu finden, giebt es hin und wieder zwar noch andere, die aber entweder zu mühsam, oder nicht allgemein sind. Vor allen aber verdient die hier zuerst erklärte Methode den Vorzug, weil diese auf alle Arten von Gleichungen mit dem besten Erfolge angewendet werden kann, dahingegen die andere oft eine gewisse Vorbereitung in der Gleichung erfordert, ohne welche dieselbe nicht einmal gebraucht werden kann, wie wir schon bey mehrern Beyspielen gezeigt haben.

Ende des ersten Abschnitts von den algebraischen Gleichungen und deren Auflösung.