



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

I. Capitel. Von der Auflösung solcher einfachen Gleichungen, in welchen
mehr als eine unbekannte Zahl vorkömmt.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-50547](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-50547)

Des
Zweyten Theils
Zweyter Abschnitt.
Von der unbestimmten Analytik.

I. Capitel.

Von der Auflösung solcher einfachen Gleichungen, in welchen mehr als eine unbekannte Zahl vorkommt.

§. I.

Wir haben oben gesehen, da eine einzige unbekannte Zahl auch nur eine einzige Gleichung erfordert, zwey unbekannte Zahlen aber durch zwey Gleichungen, 3 durch 3, 4 durch 4 u. s. f. bestimmt werden können; so daß jedesmal eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, wenn anders die Aufgabe selbst bestimmt ist.

Wenn aber nicht so viel Gleichungen aus den in der Aufgabe bekannt gemachten Umständen gezogen werden können, als unbekannte Zahlen angenommen worden sind, so bleiben einige unbestimmt, und bleiben unserer Willkühr überlassen; daher solche Aufgaben unbestimmte genannt werden, und

es machen diese einen eigenen Theil der Analytik aus, welche man die unbestimmte Analytik zu nennen pflegt.

§. 2.

Da in diesen Fällen eine oder mehrere unbekannte Zahlen nach Belieben angenommen werden können, so finden hier mehrere Auflösungen Statt.

Allein es wird gewöhnlich die Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchten Zahlen ganze, und so gar positive, oder wenigstens Rationalzahlen seyn sollen, wodurch die Anzahl der möglichen Auflösungen sehr eingeschränkt wird, so daß oft nur etliche wenige, oft zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Statt finden, zuweilen auch nicht einmal eine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytik nicht selten ganz besondere Kunstgriffe erfordert, und sehr dazu dient den Verstand der Anfänger aufzuklären, und ihnen eine größere Fertigkeit in algebraischen Arbeiten beizubringen.

§. 3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Aufgaben den Anfang machen, und zwei ganze positive Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll.

Diese Zahlen seyen nun x und y , so ist $x + y = 10$; hieraus findet man $x = 10 - y$, so daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine ganze und positive Zahl seyn soll. Man könnte daher für y alle ganze Zahlen von 1 bis ins Unendliche annehmen. Da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil

weil sonst x negativ seyn würde; und wenn auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonst $x = 0$ würde; es finden daher nur die folgenden Auflösungen Statt:

wenn $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

so wird $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, daher in allem nur fünf verschiedene Auflösungen möglich sind.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine der hier gefundenen beyden Zahlen wiederum in zwey Theile zertheilen, wodurch man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

§. 4.

Von dieser überaus leichten Aufgabe wollen wir zu etwas schwereren fortschreiten.

I. Aufg. Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2 , der andere aber durch 3 theilen läßt, beyde aber ganze und positive Zahlen sind.

Es sey der eine Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x + 3y = 25$. Also $2x = 25 - 3y$. Man theile durch 2 , so kömmt $x = \frac{25 - 3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25 , und daher y nicht größer als 8 . Man ziehe so viel Ganze daraus, als möglich, d. i. man dividire den Zähler $25 - 3y$ durch den Nenner 2 , so wird $x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}$; also muß sich $1 - y$, oder auch $y - 1$ durch 2 theilen lassen. Man setze daher $y - 1 = 2z$ und also $y = 2z + 1$, so wird $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$. Weil nun y

nicht größer seyn kann als 8, so können auch für z keine andere Zahlen angenommen werden, als solche, die $2z + 1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner seyn als 4; daher z nicht größer als 3 angenommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man $z = 0, z = 1, z = 2, z = 3,$

so wird $y = 1, y = 3, y = 5, y = 7,$

und $x = 11, x = 8, x = 5, x = 2.$

Daher die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden:

I.) $22 + 3$, II.) $16 + 9$, III.) $10 + 15$, IV.) $4 + 21$.

§. 5.

II. Aufg. Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen lasse.

Der erste Theil sey also $7x$, der andere aber $11y$, so muß $7x + 11y = 100$ seyn; daher

$$x = \frac{100 - 11y}{7} = \frac{98 + 2 - 7y - 4y}{7}, \text{ also wird } x =$$

$$14 - y + \frac{2 - 4y}{7}; \text{ also muß } 2 - 4y \text{ oder } 4y - 2$$

sich durch 7 theilen lassen. Läßt sich aber $4y - 2$

durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon

$2y - 1$ durch 7 theilen lassen. Man setze daher $2y$

$- 1 = 7z$, oder $2y = 7z + 1$, so wird $x = 14 - y$

$- 2z$; da aber $2y = 7z + 1 = 6z + z + 1$ seyn

muß, so hat man $y = 3z + \frac{z+1}{2}$. Nun setze man

$z + 1 = 2u$ oder $z = 2u - 1$, so wird $y = 3z + u$.

Folglich kann man für u eine jede ganze Zahl nehmen,

die so beschaffen ist, daß weder x noch y negativ wird, und alsdann bekommt man:

$$y = 7u - 3 \text{ und } x = 19 - 11u.$$

Nach

Nach der ersten Formel muß $7u$ größer seyn als 3, nach der andern aber muß $11u$ kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmal 2 seyn kann; da nun u unmöglich 0 seyn kann, so bleibt nur ein einziger Werth übrig, nemlich $u = 1$, daraus bekommen wir $x = 8$ und $y = 4$; daher die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I. 56 und II. 44.

§. 6.

III. Aufg. Man theile 100 in zwey Theile, die folgende Eigenschaften haben müssen: wenn man den ersten durch 5 dividirt, so muß 2 übrig bleiben, und wenn man den zweyten durch 7 dividirt, so muß der Rest 4 seyn.

Da der erste Theil durch 5 dividirt, 2 übrig läßt, so setze man denselben $5x + 2$, und weil der andere durch 7 dividirt, 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y + 4$; also wird $5x + 7y + 6 = 100$ oder $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$. Hieraus erhält man $x = 18 - y - \frac{2y+4}{5}$; also muß $4 - 2y$, oder $2y - 4$, oder auch die Hälfte davon $y - 2$ durch 5 theilbar seyn. Man setze daher $y - 2 = 5z$, oder $y = 5z + 2$, so wird $x = 16 - 7z$; hieraus erhellt, daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen:

I. $z = 0$ giebt $x = 16$ und $y = 2$; daher die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82 + 18$.

II. $z = 1$ giebt $x = 9$, und $y = 7$; daher die beyden Theile seyn können $47 + 53$.

III. $z = 2$ giebt $x = 2$, und $y = 12$; woraus man man für die verlangten beyden Theile erhält $12 + 88$.

§. 7.

IV. Aufg. Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer. Die erste spricht: wenn ich die meinigen immer zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die andere spricht: wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig. Wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Anzahl der Eyer der ersten Bäuerin, durch 8 dividirt, 7 übrig läßt, die Zahl der Eyer der zweyten Bäuerin, durch 10 dividirt, auch 7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x + 7$, der andern aber $10y + 7$, so daß $8x + 10y + 14 = 100$, oder $8x = 86 - 10y$, oder $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$. Daher setze man $y - 3 = 4z$, so wird $y = 4z + 3$ und $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$. Folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7, und also z kleiner als 2; woraus folgende zwey Auflösungen entstehen:

I. $z = 0$ giebt $x = 7$, und $y = 3$; daher die erste Bäuerin 63 Eyer, die andere aber 37 gehabt hat.

II. $z = 1$ giebt $x = 2$, und $y = 7$; daher auch die erste Bäuerin 23 Eyer, die andere aber 77 gehabt haben kann.

§. 8.

V. Aufg. Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen 41 Thlr. 16 Gr. verzehrt. Ein Mann hat 19 Gr., eine Frau aber 13 Gr. bezahlt; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die

Von einfachen unbestimmten Gleichungen. 171

Die Zahl der Männer sey $= x$, der Weiber aber $= y$, so bekommt man, weil 41 Thlr. 16 Gr. 1000 Groschen ausmachen, diese Gleichung: $19x + 13y = 1000$. Daraus wird folgende: $13y = 1000 - 19x$, oder $13y = 988 + 12 - 13x - 6x$, und daher $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$. Folglich muß sich $12 - 6x$ oder $6x - 12$, durch 13 theilen lassen, welches allemal geschehen wird, wenn sich der sechste Theil davon, nemlich $x - 2$, durch 13 dividiren läßt. Man setze also $x - 2 = 13z$, so wird $x = 13z + 2$, und $y = 76 - 13z - 2 - 6z$, oder $y = 74 - 19z$. Es muß also z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$, und folglich kleiner als 4; daher folgende vier Auflösungen möglich sind.

I.) $z = 0$ giebt $x = 2$ und $y = 74$. Es können also 2 Männer und 74 Weiber gewesen seyn; jene haben 38, diese aber 962 Groschen bezahlt.

II.) $z = 1$ giebt die Zahl der Männer $x = 15$, und die Zahl der Weiber $y = 55$; jene haben 285, diese aber 715 Groschen verzehret.

III.) $z = 2$ giebt die Zahl der Männer $x = 28$, und die Zahl der Weiber $y = 36$; jene haben 532, diese aber 468 Groschen verzehret.

IV.) $z = 3$ giebt die Zahl der Männer $x = 41$, und die Zahl der Weiber $y = 17$; jene haben 779, diese aber 221 Groschen verzehret.

§. 9.

VI. Aufg. Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Thlr. Er zahlt für ein Pferd 31 Thlr, für einen Ochsen aber 21 Thlr. Wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die

Die Zahl der Pferde sey $= x$, der Ochsen aber $= y$, so muß seyn: $3ix + 2iy = 1770$, oder $2iy = 1770 - 3ix = 1764 + 6 - 2ix - 10x$, und also $y = 84 - x + \frac{6-10x}{21}$. Daher muß $6 - 10x$ oder $10x - 6$ durch 21 theilbar seyn. Wäre nun die Hälfte $5x - 3$ durch 21 theilbar, so würde es auch $10x - 6$ seyn. Man setze also $5x - 3 = 21z$, so ist $5x = 21z + 3$ und $x = \frac{21z+3}{5}$ oder $x = 4z + \frac{z+3}{5}$. Man setze nun ferner $z + 3 = 5u$, so wird $z = 5u - 3$, $x = 21u - 12$ und $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$; es muß daher u größer seyn als 0, und doch kleiner als 4; woraus wir folgende drey Auflösungen erhalten:

I.) $u = 1$ giebt die Zahl der Pferde $x = 9$, und der Ochsen $y = 71$; jene haben 279, diese aber 1491, beyde zusammen 1770 Rthl. gekostet.

II.) $u = 2$ giebt die Zahl der Pferde $x = 30$, und der Ochsen $y = 40$; jene kosteten 930, diese aber 840, beyde zusammen also 1770 Rthl.

III.) $u = 3$ giebt die Zahl der Pferde $x = 51$, und der Ochsen $y = 9$; jene kosteten 1581, diese aber 189, und beyde zusammen 1770 Rthl.

§. 10.

Die bisherigen Aufgaben leiten immer auf eine solche Gleichung, wie $ax + by = c$, wo die Buchstaben a , b und c ganze und positive Zahlen bedeuten, und wo für x und y auch ganze und positive Zahlen gefordert werden.

Wenn aber b negativ ist, und die Gleichung die Form $ax = by + c$ erhält, so sind die Aufgaben von einer ganz andern Art, und lassen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch

noch in diesem Capitel erklärt werden soll. Die leichtesten Aufgaben von dieser Art sind, wenn man zwey Zahlen sucht, deren Differenz gegeben ist. Wäre sie z. B. 6, so nehme man an, die kleinere sey $= x$, die größere $= y$, und dann muß $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$ seyn. Hier hindert nun nichts, daß nicht für x alle mögliche ganze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer für eine nehmen mag, so wird y jedesmal um 6 größer. Nimmt man z. B. $x = 100$, so ist $y = 106$; es ist hieraus also ganz klar, daß unendlich viele Auflösungen Statt finden.

§. II.

Darauf folgen die Aufgaben, wo $c = 0$, und ax schlecht weg dem by gleich seyn soll. Man suche nemlich eine Zahl, die sich sowohl durch 5, als auch durch 7 theilen theilen läßt, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstlich $N = 5x$ seyn, weil die Zahl N durch 5 theilbar seyn soll; ferner muß auch $N = 7y$ seyn, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen lassen; daher bekommt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht durch 5 theilen läßt, so muß sich y dadurch theilen lassen. Man setze daher $y = 5z$, so wird $x = 7z$, daher die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede ganze Zahl annehmen kann, also daß für N unendlich viele Zahlen angegeben werden können, z. B.

35, 70, 105, 140, 175, 210, u. s. f.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch überdeis durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N = 35z$, hernach müßte auch $N = 9u$ seyn, also $35z = 9u$, und daher $u = \frac{35z}{9}$; woraus sich ergiebt, daß sich z durch

durch 9 muß theilen lassen. Es sey also $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

§. 12.

Mehrere Schwierigkeit hat es, wenn die Zahl c nicht 0 ist, z. B. wenn $5x = 7y + 3$ seyn soll, welche Gleichung herauskömmt, wenn eine solche Zahl N gefunden werden soll, welche durch 5 theilbar ist, mit 7 aber dividirt, 3 übrig läßt. Denn alsdann muß $N = 5x$ seyn, ferner $N = 7y + 3$, und deswegen wird $5x = 7y + 3$; folglich $x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$.

Man setze $\frac{2y+3}{5} = z$, so wird $2y + 3 = 5z$, und $x = y + z$. Da aber $2y + 3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, so wird $y = \frac{5z-3}{2}$, oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$.

Man setze nun $z - 3 = 2u$, so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle ganze und auch sogar negative Zahlen angenommen werden können, wofern nur N positiv wird, welches hier geschieht, wenn $u = -1$, denn da wird $N = 10$. Die folgenden erhält man, wenn man dazu immer 35 addirt; daher die gesuchten Zahlen 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220 u. s. f. sind.

§. 13.

Die Auflösung solcher Fragen beruht auf dem Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit desselben wird die Auflösung bald kürzer, bald weitläufiger. Bey folgender Aufgabe findet eine kurze Auflösung Statt:

VII. Aufg. Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt, 2 übrig läßt, wenn man selbige aber durch 13 dividirt, so bleiben 3 übrig.

Diese Zahl sey N , so muß erstlich $N = 6x + 2$ seyn, hernach aber $N = 13y + 3$; also wird $6x + 2 = 13y + 3$, und $6x = 13y + 1$; daher $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$. Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$, und $x = 2y + z = 13z - 2$. Folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen sind daher folgende: 68, 146, 224, 302, 380, u. s. f., welche nach einer arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz 78 = 6. 13 ist. Wenn man also nur eine von diesen Zahlen weiß, so lassen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur jedesmal 78 dazu addiren, oder auch davon subtrahiren darf, so lange wie es angeht.

§. 14.

Ein Beispiel, wo die Rechnung weitläuftiger und schwerer wird, mag folgendes seyn.

VIII. Aufg. Man suche eine Zahl N , welche durch 39 dividirt, 16, und durch 56 dividirt, 27 übrig läßt.

Erstlich muß also $N = 39p + 16$ seyn, hernach aber $N = 56q + 27$; daher wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$, und $p = \frac{56q+11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$, so daß $r = \frac{17q+11}{39}$; daher wird $39r = 17q + 11$, und $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$, so daß $s = \frac{5r-11}{17}$ oder

176 II. Abschnitt. Iſtes Capitel.

$$17s = 5r - 11, \text{ und daher wird } r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{2s+11}{5} \\ + \frac{2s+11}{5} = 3s + t, \text{ ſo daß } t = \frac{2s+11}{5}, \text{ oder } 5t = 2s + 11, \text{ und alſo wird } s = \frac{5t-11}{2} = 2t + \frac{t-11}{2} \\ = 2t + u, \text{ ſo daß } u = \frac{t-11}{2} \text{ und } t = 2u + 11.$$

Da nun kein Bruch mehr vorhanden iſt, ſo kann man u nach Belieben annehmen, und daraus erhalten wir rückwärts folgende Beſtimmungen:

$$t = 2u + 11$$

$$s = 2t + u = 5u + 22$$

$$r = 3s + t = 17u + 77$$

$$q = r + s = 39u + 176$$

$$p = q + r = 56u + 253$$

und endlich $N = 39 \cdot 56u + 9883$. Um die kleinſte Zahl für N zu finden, ſetze man $u = -4$, ſo wird $N = 1147$. Setzt man $u = x - 4$, ſo wird $N = 2184x - 8736 + 9883$, oder $N = 2184x + 1147$. Dieſe Zahlen machen alſo folgende arithmetiſche Progreſſion aus, deren erſtes Glied 1147, und die Differenz = 2184 iſt:

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, 12067, u. ſ. f.

Anmerk. Zu Aufgaben dieſer Art gehört die Chronologiſche: das Jahr der Julianiſchen Periode zu finden, dem gegebene: Indiction, Mondszirkel und Sonnenzirkel zugehören, wovon wir im dritten Theile dieſer Algebra die Auflöſung geben wollen.

§. 15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Aufgaben hinzufügen.

IX. Aufg. Eine Geſellſchaft von Männern und Weibern ſind in einem Wirthſhauſe. Ein Mann verzehret 25 Gro

Von einfachen unbestimmten Gleichungen. 177

Groschen, ein Weib aber 16 Groschen, und es findet sich, daß die Weiber zusammen einen Groschen mehr verzehrt haben, als die Männer. Wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey = p , der Männer aber = q gewesen, so haben die Weiber $16p$, die Männer aber $25q$ verzehrt; daher muß $16p = 25q + 1$ seyn, und da wird $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$.

Es ist also $r = \frac{9q+1}{16}$, oder $9q = 16r - 1$; daher wird $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, so daß $s = \frac{7r-1}{9}$, oder $9s = 7r - 1$; daher wird $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$, also $t = \frac{2s+1}{7}$ oder $7t = 2s + 1$; mithin wird $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u$, so daß $u = \frac{t-1}{2}$ oder $2u = t - 1$, daher $t = 2u + 1$.

Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$$t = 2u + 1$$

$$s = 3t + u = 7u + 3$$

$$r = s + t = 9u + 4$$

$$q = r + s = 16u + 7$$

$$p = q + r = 25u + 11$$

Es war daher die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in ganzen Zahlen annehmen kann was man will. Die kleineren Zahlen sind daher nebst den folgenden wie hier steht:

Anzahl der Weiber: = 11, 36, 61, 86, 111, u. s. f.

der Männer: = 7, 23, 39, 55, 71, u. s. f.

Nach der ersten Auflösung in den kleinsten Zahlen haben die Weiber 176, die Männer aber 175 Gro-

u. Theil.

M

schen

schen verzehrt; also die Weiber einen Groschen mehr als die Männer, dem Verlangen der Aufgabe gemäß.

§. 16.

X. Aufg. Es kauft jemand Pferde und Ochsen, und bezahlt für ein Pferd 31 Rthl., für einen Ochsen aber 20 Rthl., nun findet sich, daß die Ochsen insgesamt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde. Wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen = p , die Zahl der Pferde aber = q , so ist $20p = 31q + 7$, und $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r$; daher $20r = 11q + 7$, und $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s$; mithin $11s = 9r - 7$ und $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t$, also $9t = 2s + 7$, und $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$, folglich $2u = t - 7$, und $t = 2u + 7$

$$s = 4t + u = 9u + 28$$

$$r = s + t = 11u + 35$$

$$q = r + s = 20u + 63 \text{ Zahl der Pferde}$$

$$p = q + r = 31u + 98 \text{ Zahl der Ochsen}$$

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q , wenn man $u = -3$ annimmt; die größeren steigen nach arithmetischen Progressionen wie folgt:

Zahl der Ochsen $p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253, \text{u. s. f.}$

Zahl der Pferde $q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, \text{u. s. f.}$

§. 17.

Wenn wir bey diesem Beispiele erwägen, wie die Buchstaben p und q durch die folgraden bestimmte werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf dem Verhältnisse der Zahlen 31 und 20 beruht, und zwar auf demjenigen, nach welchem der größte gemeinschaftliche Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellt:

$$\begin{array}{r|l}
 20 & 31 \\
 \hline
 & 11 \\
 \hline
 11 & 20 \\
 \hline
 & 9 \\
 \hline
 9 & 11 \\
 \hline
 & 2 \\
 \hline
 2 & 9 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 1 & 2 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

Denn hier ist klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s, u. s. f. vorkommen, und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kommt zuerst die Zahl 7 zum Vorschein, und zwar mit dem Zeichen +, weil die letzte Bestimmung die fünfte ist; wäre hingegen die Zahl derselben gerade gewesen, so hätte — 7 gesetzt werden müssen. Dieses wird aus der folgenden Tabelle deutlicher hervorgehen, wo zuerst die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben p, q, r, u. s. f. kommt.

M 2

31 = 1.

$$\begin{array}{l|l}
 31 = 1. 20 + 11. & p = 1. q + r \\
 20 = 1. 11 + 9. & q = 1. r + s \\
 11 = 1. 9 + 2. & r = 1. s + t \\
 9 = 4. 2 + 1. & s = 4. t + u \\
 2 = 2. 1 + 0. & t = 2. u + 7
 \end{array}$$

Anmerk. Euler hat zwar hier die Aehnlichkeit zwischen dem Verfahren § 16. und § 17. bemerkt, aber hat von § 17. den Beweis der Auflösung nicht entwickelt. Diesen nun gebe ich im 3ten Theile dieser Algebra.

§. 18.

Eben so kann auch die vorhergehende Aufgabe im 14ten §. vorgestellt werden, wie aus folgendem erhellet.

$$\begin{array}{l|l}
 56 = 1. 39 + 17 & p = 1. q + r \\
 39 = 2. 17 + 5 & q = 2. r + s \\
 17 = 3. 5 + 2 & r = 3. s + t \\
 5 = 2. 2 + 1 & s = 2. t + u \\
 2 = 2. 1 + 0 & t = 2. u + 11
 \end{array}$$

§. 19.

Auf diese Art sind wir im Stande alle dergleichen Aufgaben auf eine allgemeine Art aufzulösen:

Es sey z. B. die Gleichung $bp = aq + n$ gegeben, wo a , b und n bekannte Zahlen sind. Hier darf man nur eben die Rechnung anstellen, als wenn man zwischen den Zahlen a und b den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen wollte, aus welchen sogleich p und q durch die folgenden Buchstaben bestimmt werden, wie folgt:

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Es sey } a = Ab + c & \text{so wird } p = Aq + r \\
 b = Bc + d & q = Br + s \\
 c = Cd + e & r = Cs + t \\
 d = De + f & s = Dt + u \\
 e = Ef + g & t = Eu + v \\
 f = Fg + o & u = Fv + n
 \end{array}$$

Hier

Von einfachen unbestimmten Gleichungen. 181

Hier wird in der letzten Bestimmung $+n$ genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerade ist, hingegen aber $-n$, wenn dieselbe Zahl gerade ist. Auf diese Art können nun alle dergleichen Aufgaben ziemlich geschwind aufgelöst werden, wovon wir einige Beispiele geben wollen.

§. 20.

XI. Aufg. Man sucht eine Zahl, welche durch 11 dividirt, 3, durch 19 aber dividirt, 5 übrig läßt.

Diese Zahl sey N , so muß erstlich $N = 11p + 3$, hernach auch $N = 19q + 5$ seyn; folglich $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19q + 2$, woraus folgende Tabelle verfertigt wird:

$$\begin{array}{l|l} 19 = 1. 11 + 8 & p = q + r \\ 11 = 1. 8 + 3 & q = r + s \\ 8 = 2. 3 + 2 & r = 2s + t \\ 3 = 1. 2 + 1 & s = t + u \\ 2 = 2. 1 + 0 & t = 2u + 2 \end{array}$$

Hier kann man u nach Belieben annehmen, und daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts bestimmen, wie sich aus dem folgenden zeigt:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 2 \\ s &= t + u = 3u + 2 \\ r &= 2s + t = 8u + 6 \\ q &= r + s = 11u + 8 \\ p &= q + r = 19u + 14 \end{aligned}$$

Hieraus bekömmmt man die gesuchte Zahl $= 209u + 157$, daher ist die kleinste Zahl für $N = 157$.

§. 21.

XII. Aufg. Man sucht eine Zahl N , welche, wie vorher, durch 11 dividirt, 3, $M \ 3$ und

und durch 19 dividirt, 5; durch 29 dividirt aber 10 übrig läßt.

Nach der letzten Bedingung muß $N = 29p + 10$ seyn, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben, wie oben gefunden worden ist, $N = 209q + 157$ seyn, wofür wir $N = 209q + 157$ schreiben wollen; daher wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Rechnung aufgestellt wird:

$$\begin{aligned} 209 &= 7 \cdot 29 + 6; & \text{also } p &= 7q + r \\ 29 &= 4 \cdot 6 + 5; & q &= 4r + s \\ 6 &= 1 \cdot 5 + 1; & r &= s + t \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0; & s &= 5t - 147 \end{aligned}$$

Nun wollen wir auf folgende Art zurück gehen:

$$\begin{aligned} s &= 5t - 147 \\ r &= s + t = 6t - 147 \\ q &= 4r + s = 29t - 735 \\ p &= 7q + r = 209t - 5292 \end{aligned}$$

Folglich $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kömmt heraus, wenn man $t = 26$ annimmt, dann wird $N = 4128$.

§. 22.

Es ist aber hier wohl zu bemerken, daß, wenn eine solche Gleichung, wie $bp = aq + n$ aufgelöst werden soll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben müssen, denn sonst wäre die Aufgabe unmöglich, wenn nicht die Zahl n eben denselben gemeinschaftlichen Theiler hätte.

Denn wenn z. B. $9p = 15q + 2$ seyn sollte, wo 9 und 15 den gemeinschaftlichen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich, diese

diese Aufgabe aufzulösen, weil sich $9p - 15q$ jedesmal durch 3 theilen läßt und also niemals 2 werden kann. Wäre aber in diesem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ u. s. f., so wäre die Auflösung wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da man dann $3p = 5q + 1$ erhielte, welche Gleichung nach der obigen Regel leicht aufgelöst wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben müssen, und daß die gegebene Regel in keinen andern Fällen Statt finden kann.

§. 23.

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach der natürlichen Art behandeln. Da wird nun $p = \frac{15q+2}{9} = q + \frac{6q+2}{9} = q + r$, so daß $9r = 6q + 2$, oder $6q = 9r - 2$; daher $q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s$, so daß $3r - 2 = 6s$, oder $3r = 6s + 2$; daher $r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$, welche Formel niemals eine ganze Zahl werden kann, weil s notwendig eine ganze Zahl seyn muß; woraus deutlich zu ersehen ist, daß dergleichen Aufgaben ihrer Natur nach unmöglich sind.

Anmerk. Im dritten Theile dieser Algebra werde ich das unentbehrlichste von den vortreflichen Hindenburgischen combinatorischen Operationen mittheilen. Diese glückliche Erfindung läßt sich auch in der unbestimmten Analysis mit vielen Nutzen anwenden.