



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

II. Capitel. Von der so genannten Regel Coeci, wo aus zweyen Gleichungen drey oder mehrere unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-50547](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-50547)

II. Capitel.

Von der sogenannten Regel Coeci, wo aus zweyen Gleichungen drey oder mehrere unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen.

§. 24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekannte Zahlen auf die Art bestimmt werden sollen, daß dafür ganze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen gegeben, und die Aufgabe soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekannte Zahlen vorkommen. Dergleichen Aufgaben kommen selbst in den gemeinen Rechenbüchern vor, und pflegen nach der so genannten Regel Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen und diese Regel durch Beispiele erläutern wollen.

§. 25.

I. Aufg. 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirthshause 50 Rthl., und zwar bezahlt ein Mann 3, ein Weib 2, und ein Kind 1 Rthl. Wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer = p , die Zahl der Weiber = q , und die der Kinder = r , so erhält man die zwey folgenden Gleichungen: I.) $p + q + r = 30$, II.) $3p + 2q + r = 50$; aus welchen die drey Buchstaben p , q und r in ganzen und positiven Zahlen

Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten Gleichung wird nun $r = 30 - p - q$, und darum muß $p + q$ kleiner seyn, als 30. Dieser Werth in der zweyten Gleichung für r geschrieben, giebt $2p + q + 30 = 50$; also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von selbst kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10; woraus folgende Auflösungen entstehen:

Zahl der Männer $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$
 $7, 8, 9, 10,$

Zahl der Weiber $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10,$
 $8, 6, 4, 2, 0,$

Zahl der Kinder $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15,$
 $16, 17, 18, 19, 20.$

Läßt man von diesen die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

§. 26.

II. Aufg. Es kauft jemand 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schaafe, für 100 Rthl. Ein Schwein kostet $3\frac{1}{2}$, eine Ziege $1\frac{1}{3}$, ein Schaafe $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine sey $= p$, der Ziegen $= q$, der Schaafe $= r$, so hat man folgende zwey Gleichungen: I.) $p + q + r = 100$, II.) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$. Multiplicirt man diese letztere mit 6, um die Brüche wegzubringen, so kömmt $21p + 8q + 3r = 600$ heraus. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der zweyten Gleichung für r gesetzt, $18p + 5q = 300$, oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$ giebt, folglich muß $18p$ durch 5 theilbar seyn, oder 5 als

M 5

einen

einen Factor in sich schließen. Man setze also $p = 5s$, so wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebige ganze Zahl genommen werden kann, doch so, daß q nicht negativ werde; daher s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also, wenn 0 auch ausgeschlossen wird, nur folgende drei Auflösungen Statt finden:

nemlich wenn $s = 1, 2, 3.$

so wird $p = 5, 10, 15.$

$q = 42, 24, 6.$

$r = 53, 66, 79.$

§. 27.

Wenn man dergleichen Aufgaben selbst andern zur Auflösung aufgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, daß sie mögliche Fälle betreffen. Zur Beurtheilung dieser Möglichkeit dient folgendes.

Wir wollen die beyden bisher betrachteten Gleichungen so vorstellen: I.) $x + y + z = a$, II.) $fx + gy + hz = b$, wo f, g, h , nebst a und b gegebene Zahlen sind. Nun sey unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste. Da $x + y + z = a$, so wird $fx + fy + fz = fa$. Nun ist $fx + fy + fz$ größer als $fx + gy + hz$; daher muß fa größer seyn, als b , oder b muß kleiner seyn, als fa ; und da ferner $hx + hy + hz = ha$ und $hx + hy + hz$ gewiß kleiner ist, als $fx + gy + hz$, so muß auch ha kleiner seyn als b , oder b größer als ha . Wenn daher die Zahl b nicht kleiner als fa , und zugleich größer als ha ist, so bleibt die Auflösung der Aufgabe immer unmöglich.

Diese Bedingung pflegt man auch so auszudrücken: die Zahl b muß zwischen den Gränzen fa und ha enthalten seyn; ferner muß dieselbe auch nicht einer

einer der beyden Gränzen gar zu nahe kommen, weil sonst die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In dem vorigen Beispiele, wo $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$, und $h = \frac{1}{2}$, waren die Gränzen 350 und 50. Wollte man nun $b = 51$ statt 100 setzen, so wären die Gleichungen $x + y + z = 100$, und $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$, und wenn man mit 6 multiplicirt, $21x + 8y + 3z = 306$. Man nehme die erste Gleichung drey mal, so wird $3x + 3y + 3z = 300$, und wenn man diese von jener abzieht, $18x + 5y = 6$, welche offenbar unmöglich ist, weil x und y ganze Zahlen seyn müssen.

§. 28.

Diese Regel hat auch für die Münzmeister und Goldschmiede ihren großen Nutzen, wenn sie aus drey oder mehreren Sorten von Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalte zusammen schmelzen wollen, wie man aus folgendem Beispiele sehen kann.

III. Aufg. Ein Münzmeister hat dreyerley Silber; das erste ist 14löthig, das andere 11löthig, das dritte 9löthig. Nun braucht er 30 Mark zwölflöthiges Silber zu einer gewissen Arbeit, wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweyten y M., und von der dritten z M., so muß $x + y + z = 30$ seyn, welches die erste Gleichung ist.

Da ferner eine Mark von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Mark $14x$ Loth Silber enthalten. Eben so werden die y Mark von

von der zweyten Sorte 11y Loth, und die z Mark von der dritten Sorte werden 9z Loth Silber enthalten; daher die ganze Masse an Silber $14x + 11y + 9z$ Loth enthalten wird. Weil nun dieselbe 30 Mark wiegt, woron eine Mark 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber darin enthalten seyn, nemlich 360 Loth; woraus diese zweyte Gleichung entsteht: $14x + 11y + 9z = 360$. Hiervon subtrahire man die erste neunmal genommen, nemlich $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden sollen, und zwar in ganzen Zahlen; alsdann aber wird $z = 30 - x - y$. Aus jener Gleichung bekommt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sey daher $x = 2u$, so wird $y = 45 - 5u$ und $z = 30 - 15$. Folglich muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn; hieraus werden folgende Auflösungen gezogen:

u = 5,	6,	7,	8,	9,
x = 10,	12,	14,	16,	18,
y = 20,	15,	10,	5,	0,
z = 0,	3,	6,	9,	12,

§. 29.

Es kommen öfters mehr als drey unbekannte Zahlen vor, aber die Auflösung kann dennoch auf eben diese Art geschehen, wie sich aus folgendem Beispiele erschen läßt.

IV. Aufg. Es kauft jemand 100 Stück Vieh für 100 Rthl. und zwar 1 Ochsen für 10 Rthl., 1 Kuh für 5 Rthl., 1 Kalb für 2 Rthl., 1 Schaaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schaafe sind es gewesen?

Die

Die Zahl der Ochsen sey = p , der Kühe = q ,
der Kälber = r , und der Schaafe = s , so ist die erste
Gleichung: $p + q + r + s = 100$; die zweite
Gleichung aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$,
und wenn man sie, um die Brüche wegzubringen,
mit 2 multiplicirt, $20p + 10q + 4r + s = 200$.
Hiervon subtrahire man die erste Gleichung, so hat
man folgende: $19p + 9q + 3r = 100$, und also
 $3r = 100 - 19p - 9q$ und $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p -$
 $\frac{3}{2}q$, oder $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$;
daher muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar seyn.
Man setze daher $p - 1 = 3t$, so wird

$$p = 3t + 1 \text{ und } -3t = 1 - p, \text{ folglich}$$

$$6p = 18t + 6 \text{ und } -t = \frac{1-p}{3}.$$

Wenn man nun in der vorigen Gleichung $33 - 6p$
 $- 3q + \frac{1-p}{3} = r$, anstatt $6p$ den gleichgeltenden
Ausdruck $18t + 6$, und anstatt $\frac{1-p}{3}$ das ihm gleiche
 $-t$ setzt, so erhält man folgende Gleichung: $r = 33$
 $- 18t - 6 - 3q - t = 27 - 19t - 3q$. Und weil
 $p + q + r + s = 100$, so ist $s = 100 - p - q - r$.
Wenn man nun hier anstatt p den ihm gleichgelten-
den Ausdruck $3t + 1$, und anstatt r die Formel
 $27 - 19t - 3q$ setzt, so wird $s = 72 + 2q + 16t$.
Also muß $19t + 3q$ kleiner seyn als 27. Hier
können nun q und t nach Belieben angenommen
werden, wenn nur die Bedingung beobachtet wird,
daß $19t + 3q$ nicht größer werden als 27; daher
wir folgende Fälle zu bemerken haben.

I. wenn

I. wenn $t = 0$,	II. wenn $t = 1$,
so wird $p = 1$,	so wird $p = 4$,
$q = q$,	$q = q$,
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$
$s = 72 + 2q$	$s = 88 + 2q$

Im ersten Fall muß q nicht größer seyn als 9, und im zweyten Fall nicht größer als 2. Mehr Fälle sind aber nicht möglich, weil t nicht 2, noch viel weniger größer seyn kann. Denn wollte man $t = 2$ setzen, so würde $19t + 3q = 38 + 3q$, folglich größer als 27, und daher r negativ werden. Wie könnte man aber unter r eine negative GröÙe verstehen, da dieser Buchstabe die Anzahl der eingekauften Kälber anzeigt? Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Fall nemlich fließen nachstehende 10 Auflösungen:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Fall aber diese 3 Auflösungen:

	I.	II.	III.
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem zusammen 13 Auflösungen. Wollte man aber 0 nicht gelten lassen, so wären es nur 10 Auflösungen.

§. 30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wenn auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind, wie aus folgendem Beyspiele zu ersehen ist:

V. Aufg. Man suche drey ganze Zahlen; wenn die erste mit 3, die andere mit 5, und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß dann die Summe der Producte 560 sey; wenn aber die erste mit 9, die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte 2920 sey.

Es sey die erste Zahl = x , die zweyte = y , die dritte = z , so hat man folgende zwey Gleichungen:

$$I.) 3x + 5y + 7z = 560, II.) 9x + 25y + 49z = 2920,$$

von der zweyten subtrahirt man die erste drey mal genommen, nemlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder durch 2 dividirt, $5y + 14z = 620$, daraus wird $y = 124 -$

$\frac{14z}{5}$; also muß sich z durch 5 theilen lassen; daher

setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y geschrieben, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder $3x =$

$35u - 60$ und $x = \frac{35u}{3} - 20$; deswegen setze

man $u = 3t$, so bekommen wir endlich folgende Auflösung: $x = 35t - 20$, $y = 124 - 42t$, und $z = 15t$, wo man für t eine beliebige ganze Zahl setzen kann, doch so, daß t größer sey als 0 und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

I.) wenn $t = 1$, so wird $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$,

II.) wenn $t = 2$, so wird $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.

III. Ca.