Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

III. Capitel. Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potenz vorkömmt.

III. Capitel.

Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potenz vorkömmt.

§. 31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekannte Zahlen gesucht werden, und die eine nicht, wie bisher, allein steht, sondern entweder mit der andern multiplicirt oder in einer höhern Potenz vorkömmt, wenn nur von der andern blos die erste Potenz vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$$+ bx + cy + dx^2 + exy + fx^2 + gx^2y$$
$$+ hx^4 + kx^3y + \text{u. s. f.} = 0$$

in welcher nur y vorkömmt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann; die Bestimmung muß aber so geschehen, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und mit den leichtern den Anfang machen.

§. 32.

I. Aufg. Man suche zwey Zahlen von dieser Beschaffenheit, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, 79 herauskomme.

Es seyen die zwey verlangten Zahlen x und y, so muß $xy + x + y = 79$ seyn, woraus wir bekommen

men $xy + y = 79 - x$, und $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -$ $1 + \frac{80}{x+1}$; hieraus erhellt, daß $x + 1$ ein Theiler von 80 seyn muß. Da nun 80 viele Theiler hat, so findet man aus einem jeden einen Werth für x, wie sich im folgenden zeigt:

die Theiler sind	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
daher wird $x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und $y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern übereinkommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I.	II.	III.	IV.	V.
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

§. 33.

Auf diese Art kann auch folgende allgemeine Gleichung aufgelöset werden: $xy + ax + by = c$, woraus man $xy + by = c - ax$, und also $y = \frac{c - ax}{x + b}$ oder $y = - a + \frac{ab + c}{x + b}$ erhält. Daher muß $x + b$ ein Theiler der bekannten Zahl $ab + c$ seyn, und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für x gefunden werden. Man setze daher, es sey $ab + c = fg$, so daß $y = - a + \frac{fg}{x + b}$. Nun nehme man $x + b = f$, oder $x = f - b$, so wird $y = - a + g$, oder $y = g - a$. Auf so viel verschiedene Arten sich also die Zahl $ab + c$ durch zwey Factoren, als fg, vorstellen läßt, so viel Auflösungen erhält man, daher nicht bloß eine, sondern zwey Auflösungen Statt finden. Die erste ist nemlich $x = f - b$ und $y = g - a$, die andere aber kommt auf gleiche Art heraus, wenn man $x + b = g$ setzt, da wird $x = g - b$ und $y = f - a$.

Sollte daher folgende Gleichung gegeben seyn: $xy + 2x + 3y = 42$, so wäre $a = 2$, $b = 3$, und $c = 42$; folglich $y = -2 + \frac{48}{x+3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factoren, als fg, vorgestellt werden, wo dann immer $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$ seyn wird. Dergleichen Factoren sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factoren	1. 48		2. 24		3. 16		4. 12		6. 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	−2	46	−1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	−1	21	0	13	1	9	2	5	4

§. 34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung auf folgende Art vorgestellt werden: $mxy = ax + by + c$, wo a, b, c und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber ganze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher y, so bekömmt man $y = \frac{ax + c}{mx - b}$; damit hier x aus dem Zähler weg gebracht werden könne, so multiplicirt man auf beyden Seiten mit m, so hat man $my = \frac{max + mc}{mx - b} = a + \frac{mc + ab}{mx - b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekannte Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß. Man stelle daher den Zähler durch zwey Factoren, als fg vor, welches oft auf vielerley Art ge-

geschehen kann, und sehe, ob sich einer davon mit $mx - b$ vergleichen lasse, so daß $mx - b = f$. Hierzu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f+b}{m}$, daß $f+b$ sich durch m theilen lasse; daher hier nur solche Factoren von $mc + ab$ gebraucht werden können, die sich, wenn dazu b addirt wird, durch m theilen lassen, welches durch ein Beyspiel erläutert werden soll:

Es sey daher $5xy = 2x + 3y + 18$. Hieraus bekömmt man $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$. Hier müssen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß, wenn zu denselben 3 addirt wird, die Summe durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96, welche sind: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus man sieht, daß nur folgende, nemlich 2, 12, 32, gebraucht werden können.

Es sey demnach I.) $5x - 3 = 2$, so wird $5y = 50$, und daher $x = 1$, und $y = 10$.

II.) $5x - 3 = 12$, so wird $5y = 10$, und daher $x = 3$, und $y = 2$.

III.) $5x - 3 = 32$, so wird $5y = 5$, und daher $x = 7$, und $y = 1$.

§. 35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung $my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}$ wird, so ist nöthig hier noch anzumerken, daß, wenn eine in der Form $mc + ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in der Form $mx - b$ enthalten ist, alsdann der Quotient nothwendig die Form $my - a$ haben müsse, und daß alsdann die

Zahl $mc + ab$ durch ein solches Product $(mx - b)(my - a)$ vorgestellt werden könne. Es sey z. B. $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$, und $c = 15$; so bekömmt man $12y - 5 = \frac{215x}{12x - 7}$. Nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müssen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten sind, oder wenn man 7 dazu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen lasse, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der ersten $x = 1$ wird, so findet man auch aus der andern y in ganzen Zahlen, nemlich $y = 4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdient deswegen wohl bemerkt zu werden.

§. 36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von folgender Art betrachten: $xy + xx = 2x + 3y + 29$. Hieraus findet man nun $y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}$, oder $y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}$; also muß $x - 3$ ein Theiler von der Zahl 26 seyn, und dann wird der Quotient $= y + x + 1$. Nun sind von 26 die Theiler 1, 2, 13, 26 u. s. f., also erhalten wir folgende Auflösungen: ist

I.) $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$,

II.) $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, also $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$,

III.) $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$,

welchen

welchen negativen Werth man aber weglassen kann, und deswegen muß auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden.

§. 37.

Mehrere Formeln von dieser Art, wo nur die erste Potenz von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind nicht nöthig, hier zu berechnen, weil diese Fälle nur selten vorkommen, und dann auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wenn aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern steigt, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kömmt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potenz befindlich ist, und dann kömmt es darauf an, solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Hierin besteht vorzüglich die größte Kunst der unbestimmten Analytik, dergleichen Irrationalformeln zur Rationalität zu bringen, wozu in den folgenden Capiteln einige Anleitung gegeben werden soll.

IV. Capitel.

Von der Art, folgende irrationale Formel $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$ rational zu machen.

§. 38.

Hier ist also die Frage, was für Werthe von x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a + bx + cx^2$ ein wirkliches Quadrat werde, und