Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

IV. Capitel. Von der Art, folgende irrationale Formel $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ rational zu machen.

welchen negativen Werth man aber weglassen kann, und deswegen muß auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden.

§. 37.

Mehrere Formeln von dieser Art, wo nur die erste Potenz von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind nicht nöthig, hier zu berechnen, weil diese Fälle nur selten vorkommen, und dann auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wenn aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern steigt, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kömmt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potenz befindlich ist, und dann kömmt es darauf an, solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Hierin besteht vorzüglich die größte Kunst der unbestimmten Analytik, dergleichen Irrationalformeln zur Rationalität zu bringen, wozu in den folgenden Capiteln einige Anleitung gegeben werden soll.

IV. Capitel.

Von der Art, folgende irrationale Formel $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$ rational zu machen.

§. 38.

Hier ist also die Frage, was für Werthe von x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a + bx + cx^2$ ein wirkliches Quadrat werde, und also die Quadratwurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruht hauptsächlich die Bestimmung der unbekannten Zahl x; doch muß zum voraus bemerkt werden, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich ist. Wenn aber dieselbe möglich ist, so muß man sich wenigstens anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x blos mit rationalen Werthen begnügen, und nicht fordern, daß diese so gar ganze Zahlen seyn sollen, welches letztere eine ganz besondere Untersuchung erfordert.

§. 39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potenz von x steige, indem höhere Potenzen besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte nicht einmal die zweyte Potenz vorkommen, und $c = 0$ seyn, so hätte die Auflösung keine Schwierigkeit. Denn wenn diese Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a + bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur $a + bx = y^2$ setzen, woraus man sogleich $x = \frac{y^2 - a}{b}$ erhielte; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a + bx$ ein Quadrat, und folglich $\sqrt{(a + bx)}$ rational herauskäme.

§. 40.

Wir wollen daher bey dieser Formel anfangen $\sqrt{(1 + x^2)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß, wenn zu ihrem Quadrat x^2 noch

1 ad-

1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine ganze Quadratzahl nur um 1 größer ist, als die vorhergehende; daher man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

§. 41.

Weil $1 + x^2$ ein Quadrat seyn soll, und man $1 + x^2 = y^2$ annehmen wollte, so würde $x^2 = y^2 - 1$ und $x = \sqrt{(y^2 - 1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre um 1 verminderte Quadrate wieder neue Quadrate würden; welche Auflösung eben so schwer, als die vorige, und also hier von keinem Nutzen ist.

Daß es aber wirklich solche Brüche gebe, welche für x gesetzt $1 + x^2$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I.) wenn $x = \frac{3}{4}$, so wird $1 + x^2 = \frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{5}{4}$.

II.) Eben dieses geschieht, wenn $x = \frac{4}{3}$, denn so ist $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{5}{3}$.

III.) Setzt man $x = \frac{5}{12}$, so erhält man $1 + x^2 = \frac{169}{144}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{13}{12}$ ist.

Wie also dergleichen und so gar alle mögliche Zahlen gefunden werden sollen, muß hier gezeigt werden.

§. 42.

Es kann dieses aber auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{(1 + x^2)} = x + p$, so wird $1 + x^2 = x^2 + 2px + p^2$, wo sich das Quadrat x^2 aufhebt, und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Denn subtrahirt man in der gefundenen Gleichung auf beyden Seiten

 x^2,

x^2, so wird $2px + p^2 = 1$, und also $x = \frac{1-p^2}{2p}$, wo man für p eine jede Zahl, und auch so gar Brüche annehmen kann.

Man setze daher $p = \frac{m}{n}$, so wird $x = \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{\frac{2m}{n}}$; diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit n^2, so bekömmt man $x = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$.

§. 43.

Damit also $1 + x^2$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche ganze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viele Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$, so wird $1 + x^2 = 1 + \frac{n^4 - 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2}$ oder $1 + x^2 = \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{4m^2n^2}$, welcher Bruch wirklich ein Quadrat ist, und man findet daraus: $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{n^2 + m^2}{2mn}$. Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemerkt werden:

Wenn	$n = 2$,	3,	3,	4,	4,	5,	5,	5,	5,
und	$m = 1$,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	3,	4,
so wird	$x = \frac{3}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{5}{18}$,	$\frac{7}{24}$,	$\frac{12}{5}$,	$\frac{21}{20}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{9}{40}$.

§. 44.

Hieraus folgt auf eine allgemeine Art, daß $1 + \frac{(n^2 - m^2)^2}{(2mn)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man

man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird $(2mn)^2 + (n^2 - m^2)^2 = (n^2 + m^2)^2$. Wir haben also auf eine allgemeine Art zwey Quadrate, deren Summe wieder ein Quadrat ist. Hierdurch wird nun folgende Aufgabe aufgelöset:

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist.

Ist z. B. die Gleichung $p^2 + q^2 = r^2$ gegeben, so darf man nur $p = 2mn$ und $q = n^2 - m^2$ annehmen, so wird $r = n^2 + m^2$; und da hernach ferner $(n^2 + m^2)^2 - (2mn)^2 = (n^2 - m^2)^2$ ist, so können wir auch folgende Aufgabe auflösen:

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadratzahl sey, so daß $p^2 - q^2 = r^2$; denn hier darf man nur setzen: p sey $= n^2 + m^2$ und $q = 2mn$, so wird $r = n^2 - m^2$. Oder man kann auch $p = n^2 + m^2$ und $q = n^2 - m^2$ setzen, so wird alsdann $r = 2mn$.

§. 45.

Wir haben aber noch eine zweyte Methode versprochen, um die Formel $1 + x^2$ zu einem Quadrat zu machen; diese zweyte Art nun ist folgende:

Man setze $\sqrt{}(1 + x^2) = 1 + \frac{mx}{n}$; daher bekömmt man $1 + x^2 = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$. Subtrahirt man hier auf beyden Seiten 1, so wird $x^2 = \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$, welche Gleichung sich durch x theilen läßt. Diese Theilung giebt $x = \frac{2m}{n} + \frac{m^2x}{n^2}$, und wenn man mit n^2 multiplicirt, $n^2x = 2mn + m^2x$;

woraus man $x = \frac{2mn}{n^2 - m^2}$ findet. Setzt man diesen Werth für x, so wird $1 + x^2 = 1 + \frac{4m^2n^2}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$ oder $= \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$, welcher Bruch das Quadrat von $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$ ist. Da man nun daher die Gleichung $1 + \frac{(2mn)^2}{(n^2 - m^2)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(n^2 - m^2)^2}$ bekommt, so fließt daraus, wie oben, $(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$, welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

§. 46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand, die allgemeine Formel $a + bx + cx^2$ zu einem Quadrat zu machen. Die erstere geht auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; der andere aber, wo a ein Quadrat ist, welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey also erstlich c eine Quadratzahl, oder die gegebene Formel sey $a + bx + f^2x^2$, welche ein Quadrat werden soll. Zu diesem Ende setze man $\sqrt{(a + bx + f^2x^2)} = fx + \frac{m}{n}$, so wird das Quadrat $a + bx + f^2x^2 = f^2x^2 + \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$, wo sich $f^2 x^2$ auf beyden Seiten aufhebt, so daß $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$, welche Gleichung, wenn man sie mit n^2 multiplicirt, $n^2a + n^2bx = 2mnfx + m^2$ giebt; woraus $x = \frac{m^2 - n^2a}{n^2b - 2mnf}$ gefunden wird. Schreibt

man

man nun diesen Werth für x, so wird $\sqrt{}(a+bx+f^2x^2)=\frac{m^2f-n^2af}{n^2b-2mnf}+\frac{m}{n}=\frac{mnb-m^2f-n^2af}{n^2b-2mnf}$.

§. 47.

Da für x ein Bruch gefunden worden ist, so setze man sogleich $x=\frac{p}{q}$, so daß $p=m^2-n^2a$, und $q=n^2b-2mnf$; alsdann wird die Formel $a+\frac{bp}{q}+\frac{f^2p^2}{q^2}$ ein Quadrat. Folglich bleibt dieselbe auch ein Quadrat, wenn sie mit dem Quadrat q^2 multiplicirt wird; daher auch wieder die Formel $aq^2+bpq+f^2p^2$ ein Quadrat wird, wenn man $p=m^2-n^2a$ und $q=n^2b-2mnf$ annimmt, woraus unendlich viele Auflösungen in ganzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

§. 48.

II. Der zweyte Fall findet Statt, wenn der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey daher z. B. die Formel gegeben: $f^2+bx+cx^2$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man $\sqrt{}(f^2+bx+cx^2)=f+\frac{mx}{n}$, so wird das Quadrat $f^2+bx+cx^2=f^2+\frac{2mfx}{n}+\frac{m^2x^2}{n^2}$, wo sich f^2 aufhebt, und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen lassen, so daß $b+cx=\frac{2mf}{n}+\frac{m^2x}{n^2}$, oder mit n^2 multiplicirt, $n^2b+n^2cx=2mnf+m^2x$, oder versetzt, $n^2cx-m^2x=2mnf-n^2b$,

n^2b, und folglich $x = \frac{2mnf - n^2b}{n^2c - m^2}$. Setzt man nun diesen Werth für x, so wird $\sqrt{}(f^2 + bx + cx^2)$ $= f + \frac{2m^2f - mnb}{n^2c - m^2} = \frac{n^2cf + m^2f - mnb}{n^2c - m^2}$. Setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, so kann, wie oben, folgende Form zu einem Quadrat gemacht werden: $f^2q^2 + bpq + cp^2$, und dieses geschieht, wenn man nemlich $p = 2mnf - n^2b$ und $q = n^2c - m^2$ annimmt.

§. 49.

Hier ist besonders der Fall merkwürdig, wenn $a = 0$, oder wenn diese Formel $bx + cx^2$ zu einem Quadrat gemacht werden soll. Denn da darf man nur $\sqrt{}(bx + cx^2) = \frac{mx}{n}$ setzen, so wird $bx + cx^2$ $= \frac{m^2x^2}{n^2}$, und wenn man durch x dividirt und mit n^2 multiplicirt, $bn^2 + cn^2x = m^2x$; folglich $x = \frac{n^2b}{m^2 - cn^2}$. Man suche z. B. alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind, so muß $\frac{x^2 + x}{2}$, und also auch $2x^2 + 2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{m^2x^2}{n^2}$, so wird $2n^2x + 2n^2 = m^2x$ und $x = \frac{2n2}{m^2 - 2n^2}$, wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, für x aber alsdenn gemeiniglich ein Bruch gefunden wird. Doch können auch ganze Zahlen herauskommen. Denn

wenn

wenn man z. B. $m = 3$ und $n = 2$ setzt, so bekömmt man $x = 8$, wovon das Dreyeck 36 ist, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch $m = 7$, und $n = 5$ setzen, so wird $x = -50$, wovon das Dreyeck 1225 ist, welches zugleich das Dreyeck von $+49$ und auch das Quadrat von 35 ist. Dieses wäre auch herausgekommen, wenn man $n = 7$, und $m = 10$ gesetzt hätte; denn da wird $x = 49$.

Eben so kann man $m = 17$, und $n = 12$ annehmen, da wird $x = 288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, welches eine Quadratzahl ist, deren Wurzel $= 12 \cdot 17 = 204$ ist.

§. 50.

Bey diesem letzten Fall ist zu erwägen, daß die Formel $bx + cx^2$ aus diesem Grunde zum Quadrat gemacht worden ist, weil dieselbe einen Factor hatte, nemlich x, welches uns auf neue Fälle führt, in welchen auch die Formel $a + bx + cx^2$ ein Quadrat werden kann, wenn weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden Statt, wenn sich $a + bx + cx^2$ in zwey Factoren theilen läßt, welches geschieht, wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist. Hierbey ist aber zu merken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a + bx + cx^2 = 0$, so wird $cx^2 = -bx - a$; folglich $x^2 = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, und $x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{}\left(\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}\right)$, oder $x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{}(b^2 - 4ac)}{2c}$; woraus erhellt, daß, wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzel rational angegeben werden könne.

Es sey daher $b^2 - 4ac = d^2$, so sind die Wurzeln $\frac{-b \pm d}{2c}$, oder es ist $x = \frac{-b \pm d}{2c}$; also werden von der Formel $a + bx + cx^2$ die Divisores seyn: $x + \frac{b-d}{2c}$ und $x + \frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt, dieselbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen. Man findet nemlich $x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4c^2}$. Da nun $d^2 = b^2 - 4ac$, so hat man

$$x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \left(\frac{b^2}{4c^2} + \frac{4ac}{4c^2}\right) = x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c},$$

woraus man durch die Multiplication mit c, $cx^2 + bx + a$ erhält. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel folgendem Producte gleich seyn:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer Statt findet, so oft $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist.

§. 51.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a + bx + cx^2$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzufügen wollen.

III. Dieser Fall ereignet sich nun, wenn unsere Formel durch ein solches Product vorgestellt werden kann: $(f + gx) \cdot (h + kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon: $\sqrt{(f+gx) \cdot (h+kx)} = \frac{m \cdot (f+gx)}{n}$, so bekömmt

man

man $(f + gx)(h + kx) = \frac{m^2 . (f + gx)^2}{n^2}$, welche Gleichung durch $f + gx$ dividirt, folgende giebt: $h + kx = \frac{m^2 . (f + gx)}{n^2}$, d. i. $hn^2 + kn^2x = fm^2 + gm^2x$, und also $x = \frac{fm^2 - hn^2}{kn^2 - gm^2}$.

§. 52.

Zur Erläuterung kann folgende Aufgabe dienen:

I. Aufg. Man suche die Zahlen x, welche von der Beschaffenheit sind, daß, wenn man von ihrem doppelten Quadrat 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey.

Da nun $2x^2 - 2$ ein Quadrat seyn muß, so ist zu erwägen, daß sich diese Formel durch folgende Factoren vorstellen läßt: $2 . (x + 1)(x - 1)$. Man setze also die Wurzel davon $\frac{m . (x + 1)}{n}$, so wird $2 . (x + 1)(x - 1) = \frac{m^2 (x + 1)^2}{n^2}$. Nunmehr dividire durch $x + 1$, und multiplicire mit n^2, so bekömmt man $2n^2x - 2n^2 = m^2x + m^2$, und daher $x = \frac{m^2 + 2n^2}{2n^2 - m^2}$. Nimmt man hier $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 3$, und $2x^2 - 2 = 16 = 4^2$.

Setzt man $m = 3$ und $n = 2$, so wird $x = - 17$. Da aber nur das Quadrat von x vorkömmt, so ist es gleich viel, ob man $x = - 17$ oder $x = + 17$ setzt; aus beyden wird $2x^2 - 2 = 576 = 24^2$.

§. 53.

II. Aufg. Es sey folgende Formel gegeben: $6 + 13x + 6x^2$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Hier ist nun $a = 6$, $b = 13$ und $c = 6$, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also, ob $b^2 - 4ac$ ein Quadrat werde. Da nun $b^2 - 4ac = 169 - 144 = 25 = 5^2$, so erhellt hieraus, daß $b^2 - 4ac$ wirklich ein Quadrat ist. Die gegebene Formel $6 + 13x + 6x^2$ läßt sich durch folgende zwey Factoren vorstellen: $(2 + 3x).(3 + 2x)$. Davon sey nun die Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$, so bekömmt man $(2 + 3x).(3 + 2x) = \frac{m^2(2+3x)^2}{n^2}$; daraus wird $3n^2 + 2n^2x = 2m^2 + 3m^2x$, und daher $x = \frac{2m^2 - 3n^2}{2n^2 - 3m^2} = \frac{3n^2 - 2m^2}{3m^2 - 2n^2}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß $3n^2$ größer seyn, als $2m^2$, und also $2m^2$ kleiner als $3n^2$; folglich muß $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$. Damit aber auch der Nenner positiv werde, so muß $3m^2$ größer als $2n^2$, und also $\frac{m^2}{n^2}$ größer als $\frac{2}{3}$ seyn. Um daher für x positive Zahlen zu finden, so müssen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$ sey.

Setzt man nun $m = 6$ und $n = 5$, so wird $\frac{m^2}{n^2} = \frac{36}{25}$, welches kleiner als $\frac{3}{2}$, und offenbar größer als $\frac{2}{3}$ ist; daher bekömmt man $x = \frac{3}{58}$.

§. 54.

IV. Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Statt findet, wenn die Formel $a + bx + cx^2$ dergestalt in zwey Theile getheilt werden kann, daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factoren auflösen lasse, so daß eine solche Form herauskomme: $p^2 + qr$, wo die Buchstaben p, q und r Formeln von dieser Art $f + gx$ bedeuten. Denn da darf man nur setzen $\sqrt{}(p^2 + qr) = p + \frac{mq}{n}$; so wird $p^2 + qr = p^2 + \frac{2mpq}{n} + \frac{m^2q^2}{n^2}$, wo sich die p^2 aufheben und die übrigen Glieder durch q theilen lassen, so daß $r = \frac{2mp}{n} + \frac{m^2q}{n^2}$ oder $n^2r = 2mnp + m^2q$, woraus sich das übrige leicht bestimmen läßt; und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun noch durch einige Beispiele erläutern wollen.

§. 55.

III. Aufg. Man suche Zahlen x, die von der Beschaffenheit sind, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 grösser werde als ein anderes Quadrat, oder wenn man davon 1 subtrahirt, wieder ein Quadrat übrig bleibe, wie solches bey der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat

25 doppelt genommen 50, und um eins größer, als das Quadrat 49 ist.

Also muß $2x^2 - 1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a = -1$, $b = 0$, und $c = 2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist; auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factoren auflösen, weil $b^2 - 4ac = 8$ kein Quadrat ist, und daher keiner von den drey ersten Fällen hier Statt findet.

Nach dem vierten Fall aber kann diese Formel auf folgende Art vorgestellt werden: $x^2 + (x^2 - 1) = x^2 + (x-1)(x+1)$. Hiervon werde nun die Wurzel $x + \frac{m(x+1)}{n}$ gesetzt, so wird das Quadrat davon seyn: $x^2 + (x+1).(x-1) = x^2 + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{m^2(x+1)^2}{n^2}$, wo sich x^2 auf beyden Seiten abziehen und die übrigen Glieder durch $x+1$ theilen lassen, wo denn $n^2x - n^2 = 2mnx + m^2x + m^2$ und $x = \frac{m^2+n^2}{n^2-2mn-m^2}$ heraus kömmt; und weil in der Formel $2x^2 - 1$ nur das Quadrat x^2 vorkömmt, so ist es gleich viel, ob die Werthe von x positiv oder negativ heraus kommen. Man kann auch sogleich $-m$ statt $+m$ schreiben, damit man $x = \frac{m^2+n^2}{n^2+2mn-m^2}$ bekomme. Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so hat man $x = 1$ und $2x^2 - 1 = 1$. Es sey ferner $m = 1$ und $n = 2$, so wird $x = \frac{5}{7}$ und $2x^2 - 1 = \frac{1}{49}$. Setzt man aber $m = 1$ und $n = -2$, so wird $x = -5$, oder $x = +5$ und $2x^2 - 1 = 49$.

§. 56.

IV. Aufg. Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wenn dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache.

mache. Dergleichen ist die Zahl 7, von welcher das doppelt genommene Quadrat um 2 vermehrt, das Quadrat 100 giebt.

Es muß also die Formel $2x^2 + 2$ ein Quadrat seyn, wo $a = 2$, $b = 0$ und $c = 2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $b^2 - 4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann also die dritte Regel hier nicht Statt finden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel so vorstellen:

Man setze den ersten Theil $= 4$, so wird der andere seyn: $2x^2 - 2 = 2(x+1).(x-1)$, und daher unsere Formel $4 + 2(x+1).(x-1)$. Davon sey die Wurzel $2 + \frac{m.(x+1)}{n}$, woraus folgende Gleichung entsteht: $4 + 2(x+1).(x-1) = 4 + \frac{4m(x+1)}{n} + \frac{m^2(x+1)^2}{n^2}$, wo sich 4 auf beyden Seiten aufhebt, die übrigen Glieder aber durch $x+1$ theilen lassen, so daß $2n^2x - 2n^2 = 4mn + m^2x + m^2$ und daher $x = \frac{4mn + m^2 + 2n^2}{2n^2 - m^2}$. Setzt man $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 7$, und $2x^2 + 2 = 100$.

Nimmt man $m = 0$ und $n = 1$, so wird $x = 1$ und $2x^2 + 2 = 4$.

§. 57.

Oft geschieht es auch, daß, wenn sich weder die erste, noch die zweyte, noch die dritte Regel anwenden läßt, man nicht finden kann, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, als doch erfordert werden. Z. B. wenn diese Formel vorkäme: $7 + 15x + 13x^2$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, sie fällt aber nicht so leicht in die Augen. Denn der erste Theil ist $(1 - x)^2$ oder $1 - 2x + x^2$, und daher wird der andere $6 + 17x + 12x^2$ seyn, welcher deswegen Factoren hat, weil $17^2 - 4.6.12 = 1$, und also ein Quadrat ist. Die zwey Factoren davon sind auch wirklich $(2 + 3x) . (3 + 4x)$, so daß diese Formel $(1 - x)^2 + (2 + 3x)(3 + 4x)$ seyn wird, welche sich jetzt nach der vierten Regel auflösen läßt.

Es ist aber nicht wohl zu verlangen, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; daher wollen wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen, um zuerst zu erkennen, ob es möglich sey eine solche Formel aufzulösen? Denn es giebt unendlich viel dergleichen Formeln, deren Auflösung schlechterdings unmöglich ist, z. B. $3x^2 + 2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einzigen Falle möglich, so ist es leicht, alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch hier erläutern wollen.

§. 58.

Der ganze Vortheil, welcher uns in solchen Fällen zu statten kommen kann, besteht darin, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen könne, in welchem eine solche Formel, wie $a + bx + cx^2$ ein Quadrat wird, indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen, ob in keinem Fall ein Quadrat herauskomme.

Weil es auch möglich ist, daß man durch eine gebrochene Zahl für x gesetzt seine Absicht erreichen könne, so wird es rathsam seyn, sogleich für x einen Bruch, z. B. $\frac{t}{u}$ zu schreiben, woraus diese Formel entsteht: $a + \frac{bt}{u} + \frac{ct^2}{u^2}$, welche, wenn sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat u^2 multiplicirt, ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig zu versuchen, ob man für t und u solche Werthe in ganzen Zahlen errathen könne, daß die Formel $au^2 + btu + ct^2$ ein Quadrat werde. Denn alsdann, wenn man $x = \frac{t}{u}$ annimmt, so wird auch die Formel $a + bx + cx^2$ gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber aller Mühe ungeachtet keinen solchen Fall finden, so hat man einen hinreichenden Grund zu vermuthen, daß es ganz und gar unmöglich sey, die Formel zu einem Quadrat zu machen.

§. 59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es ganz leicht, alle übrige Fälle zu finden, in welchen dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird, und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß. Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich folgende Formel betrachten: $2 + 7x^2$, wo $a = 2$, $b = 0$, und $c = 7$. Diese wird nun offenbar ein Quadrat, wenn $x = 1$; daher setze man $x = 1 + y$, so wird $x^2 = 1 + 2y + y^2$, und unsere Formel wird seyn: $9 + 14y + 7y^2$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Setzen wir also nach der zweyten Regel die Quadratwurzel davon $= 3 + \frac{my}{n}$, so bekommen wir die Gleichung: $9 + 14y + 7y^2 = 9 + \frac{6my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$, wo sich 9 auf beyden Seiten aufhebt, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen lassen; wir bekommen also $14n^2 + 7n^2y = 6mn + m^2y$ und daher $y =$

$\frac{6mn - 14n^2}{7n^2 - m^2}$; daraus finden wir $x = \frac{6mn - 7n^2 - m^2}{7n^2 - m^2}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{1}{3}$, oder auch, weil nur x^2 vorkömmt, $x = +\frac{1}{3}$; daher $2 + 7x^2 = \frac{25}{9}$.

Man setze ferner $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -1$ oder $x = +1$.

Setzt man aber $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = 17$; hieraus erhält man $2 + 7x^2 = 2025$, welches das Quadrat von 45 ist.

Wir wollen auch annehmen $m = 8$ und $n = 3$, so wird $x = -17$, wie zuvor.

Setzen wir aber $m = 8$ und $n = -3$, so wird $x = 271$, daraus wird $2 + 7x^2 = 514089 = 717^2$.

§. 60.

Wir wollen ferner die Formel $5x^2 + 3x + 7$ betrachten, welche ein Quadrat wird, wenn $x = -1$. Deswegen setze man $x = y - 1$, so ist $x^2 = (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$. Folglich

$$\begin{array}{rcl} 5x^2 & = & 5y^2 - 10y + 5 \\ 3x & = & \quad + 3y - 3 \\ 7 & = & \quad\quad + 7 \\ \hline 5x^2 + 3x + 7 & = & 5y^2 - 7y + 9 \end{array}$$

Setzt man hiervon die Quadratwurzel $= 3 - \frac{my}{n}$, so wird $5y^2 - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$; daher wir bekommen $5n^2y - 7n^2 = -6mn + m^2y$, und $y = \frac{7n^2 - 6mn}{5n^2 - m^2}$; folglich $x = \frac{2n^2 - 6mn + m^2}{5n^2 - m^2}$.

Es

Es sey $m = 2$ und $n = 1$, so wird $x = -6$ und also $5x^2 + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Setzt man aber $m = -2$ und $n = 1$, so wird $x = 18$ und $5x^2 + 3x + 7 = 1681 = 41^2$.

§. 61.

Betrachten wir nun auch folgende Formel: $7x^2 + 15x + 13$, und setzen wir sogleich $x = \frac{t}{u}$, so daß diese Formel $7t^2 + 15tu + 12u^2$ ein Quadrat seyn soll. Nun versuche man für t und u einige kleinere Zahlen wie folgt:

Es sey $t = 1$ und $u = 1$, so wird unsere Formel $= 35$
$t = 2$ und $u = 1$ $= 71$
$t = 2$ und $u = -1$ $= 11$
$t = 3$ und $u = 1$ $= 121$

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x = 3$ ein Genüge leistet, so setze man $x = y + 3$ und dann wird unsere Formel $7y^2 + 42y + 63 + 15y + 45 + 13$ oder $7y^2 + 57y + 121$; von dieser setze man die Wurzel $= 11 + \frac{my}{n}$, so bekömmt man $7y^2 + 57y + 121 = 121 + \frac{22my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$, oder $7n^2y + 57n^2 = 22mn + m^2y$, und daher $y = \frac{57n^2 - 22mn}{m^2 - 7n^2}$ und $x = \frac{36n^2 - 22mn + 3m^2}{m^2 - 7n^2}$.

Man setze z. B. $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{3}{2}$ und unsere Formel $7x^2 + 15x + 13 = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$. Es sey ferner $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{17}{6}$. Nimmt man $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = \frac{129}{2}$ und unsere Formel $7x^2 + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = (\frac{347}{2})^2$.

§. 62.

Zuweilen aber ist alle Mühe umsonst, einen Fall zu errathen, in welchem die gegebene Formel ein Quadrat wird, z. B. $3x^2 + 2$, oder wenn man anstatt x den Bruch $\frac{t}{u}$ setzt, $3t^2 + 2u^2$ wird niemals ein Quadrat, man mag auch für t und u Zahlen annehmen welche man will. Dergleichen Formeln, welche auf keine Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viele, und deswegen wird es der Mühe werth seyn, einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkannt werden kann, damit man oft der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden, wo ein Quadrat herauskömmt. Wir wollen hiervon im folgenden Capitel ausführlich reden.

V. Capitel.

Von den Fällen, in welchen die Formel $a + bx + cx^2$ niemals ein Quadrat werden kann.

§. 63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß sie immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied fehlt. Dieses geschieht, wenn man $x = \frac{y-b}{2c}$ annimmt, dadurch bekömmt unsere Formel folgende Gestalt: $a + \frac{by-b^2}{2c} + \frac{y^2-2by+b^2}{4c}$, oder