UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

V. Capitel. Von den Fällen, in welchen die Formel $a+bx+cx^2$ niemals ein Quadrat werden kann.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50547

Visual Library

§. 62.

Zuweilen aber ist alle Mühe umsonst, einen Fall zu errathen, in welchem die gegebene Formel ein Quadrat wird, z. B. $3x^2 + 2$, oder wenn man anstatt x den Bruch $\frac{t}{u}$ setzt, $3t^2 + 2u^2$ wird niemals ein Quadrat, man mag auch für t und u Zahlen annehmen welche man will. Dergleichen Formeln, welche auf keine Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viele, und deswegen wird es der Mühe werth seyn, einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkannt werden kann, damit man oft der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden, wo ein Quadrat herauskömmt. Wir wollen hiervon im folgenden Capitel ausführlich reden.

V. Capitel.

Von den Fällen, in welchen die Formel $a + bx + cx^2$ niemals ein Quadrat werden kann.

§. 63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß sie immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied fehlt. Dieses geschieht, wenn man $x = \frac{y-b}{2c}$ annimmt, dadurch bekömmt unsere Formel folgende Gestalt: $a + \frac{by-b^2}{2c} + \frac{y^2-2by+b^2}{4c}$,

oder

oder $\frac{4ac - b^2 + y^2}{4c}$. Soll diese Formel ein Quadrat werden, so setze man dieselbe $= \frac{z^2}{4}$. Hierdurch erhält man $4ac - b^2 + y^2 = cz^2$, folglich $y^2 = cz^2 + b^2 - 4ac$. Wenn also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch die Formel $cz^2 + b^2 - 4ac$ ein Quadrat, und umgekehrt, wenn diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat. Folglich wenn man für $b^2 - 4ac$ den Buchstaben t setzt, so kömmt es darauf an, ob eine solche Formel $cz^2 + t$ ein Quadrat werden könne oder nicht; und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es unstreitig weit leichter, die Möglichkeit und Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen c und t geschehen muß.

§. 64.

Setzt man $t = 0$, so ist offenbar, daß die Formel cz^2 nur alsdann ein Quadrat werde, wenn die Zahl c ein Quadrat ist. Denn da ein Quadrat durch ein anderes Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann cz^2 kein Quadrat seyn, wofern nicht $\frac{cz^2}{z^2}$, das ist c, ein Quadrat ist. Also wenn die Zahl c kein Quadrat ist, so kann auch die Formel cz^2 auf keine Weise ein Quadrat werden. Ist aber c eine Quadratzahl, so ist auch cz^2 ein Quadrat, man mag für z annehmen, was man will.

§. 65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müssen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was im sechsten Capitel des ersten Theils von den Eigenschaften der

Zahlen in Ansehung ihrer Theiler gelehrt worden ist.

So sind z. B. in Ansehung des Theilers 3 die Zahlen von dreyerley Art; die erste begreift diejenigen Zahlen in sich, welche sich durch 3 theilen lassen und durch die Formel $3n$ vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt, 1 übrig lassen, und in der Formel $3n + 1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt, 2 übrig lassen, und durch die Formel $3n + 2$ vorgestellt werden.

Da nun alle Zahlen in einer von diesen 3 Formeln enthalten sind, (1 Th. §. 60), so wollen wir die Quadrate davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel $3n$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2$, welches sich also nicht nur durch 3, sondern auch so gar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel $3n + 1$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2 + 6n + 1$, welches durch 3 dividirt, $3n^2 + 2n$ giebt und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art $3n + 1$ gehört.

Ist endlich die Zahl in der Formel $3n + 2$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2 + 12n + 4$, welches durch 3 dividirt, $3n^2 + 4n + 1$ giebt, und 1 zum Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art $3n + 1$ gehört. Daher ist klar, daß alle Quadratzahlen in Ansehung des Theilers 3, nur von doppelter Art sind. Denn entweder lassen sie sich durch 3 theilen, und alsdann müssen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen lassen; oder wenn sie sich nicht durch 3 theilen lassen, so bleibt jedesmal nur 1, niemals aber 2 übrig. Daher keine Zahl, die in der Form $3n + 2$ enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

§. 66.

§. 66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3x^2 + 2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine ganze Zahl oder einen Bruch setzen. Denn wenn x eine ganze Zahl ist, und man theilt diese Formel $3x^2 + 2$ durch 3, so bleiben 2 übrig; daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Ist aber x ein Bruch, so setze man $x = \frac{t}{u}$, von welchem Bruch wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form sey gebracht worden, und also t und u keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben. Sollte nun $\frac{t^2}{u^2} + 2$ ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit u^2 multiplicirt, d. i. $3t^2 + 2u^2$, ein Quadrat seyn, welches aber ebenfalls unmöglich ist. Denn die Zahl u läßt sich entweder durch 3 theilen, oder nicht. Läßt sie sich dadurch theilen, so läßt sich t nicht theilen, weil sonst t und u einen gemeinschaftlichen Theiler hätten.

Man setze daher $u = 3f$, so wird unsere Formel $3t^2 + 18f^2$, welche durch 3 getheilt, $t^2 + 6f^2$ giebt. Diese letzte Formel aber läßt sich nicht weiter durch 3 theilen, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil sich zwar $6f^2$ theilen läßt, t^2 aber durch 3 dividirt, 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kömmt es mit dem Rest bloß auf das zweyte Glied $2u^2$ an. Da aber u^2 durch 3 dividirt 1 zum Rest hat, oder eine Zahl von der Art $3n + 1$ ist; so wird $2u^2$ eine Zahl von der Art $6n + 2$ seyn, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen; daher unsere Formel $3t^2 + 2u^2$ durch 3 dividirt,

dirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadratzahl seyn kann.

§. 67.

Eben so kann man beweisen, daß auch die Formel $3t^2 + 5u^2$ niemals ein Quadrat seyn kann, und so gar auch keine von den folgenden: $3t^2+8u^2$, $3t^2 + 11u^2$, $3t^2 + 14u^2$ u. s. f., wo die Zahlen 3, 8, 11, 14 u. s. f. durch 3 dividirt, 2 übrig lassen. Denn wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte $u = 3s$, so würde die Formel durch 3, nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also u^2 eine Zahl von der Art $2n + 1$, so wäre zwar das erste Glied $3t^2$ durch 3 theilbar, das andere aber $5u^2$ von der Form $15n + 5$, oder $8u^2$ von der Form $24n + 8$, oder $11u^2$ von dieser $33n + 11$ u. s. f. würde durch 3 dividirt, 2 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn können.

§. 68.

Dieses gilt also auch von der allgemeinen Formel $3t^2 + (3n + 2) . u^2$, welche nie ein Quadrat werden kann, und auch dann nicht, wenn für n negative Zahlen gesetzt würden. Nimmt man z. B. $n = -1$ an, so ist es unmöglich, die Formel $3t^2 - u^2$ zu einem Quadrat zu machen. Denn ist u durch 3 theilbar, so ist die Sache offenbar; wäre aber u nicht durch 3 theilbar, so würde u^2 eine Zahl von der Art $3n + 1$, und also unsere Formel $3t^2 - 3n - 1$ seyn, welche durch 3 dividirt, -1, oder um 3 mehr, $+2$ übrig läßt. Man setze überhaupt $n = -m$, so wird unsere Formel $3t^2 - (3m - 2) u^2$, welche auch niemals ein Quadrat werden kann.

§. 69.

§. 69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführt; wir wollen daher auch 4 als einen Theiler betrachten, wo dann alle Zahlen in einer von folgenden vier Formeln enthalten sind, als:

I. $4n$, II. $4n+1$, III. $4n+2$, IV. $4n+3$, (1 Th. §. 61)

Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat $16n^2$ und läßt sich also durch 16 theilen. Ist es eine Zahl von der zweyten Art $4n+1$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 8n + 1$, welches durch 8 dividirt, 1 übrig läßt und gehört also zu der Formel $8n+1$.

Ist es eine Zahl von der dritten Art $4n+2$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 16n + 4$, welche durch 16 dividirt, 4 übrig läßt, und also in der Form $16n+4$ enthalten ist. Ist es endlich eine Zahl von der vierten Art $4n+3$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt, 1 übrig läßt.

§. 70.

Hieraus lernen wir zuerst, daß alle gerade Quadratzahlen in der Form $16n$, oder in der $16n+4$ enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nemlich $16n+2$, $16n+6$, $16n+8$, $16n+10$, $16n+12$, $16n+14$, können niemals Quadratzahlen seyn.

Ferner ist offenbar, daß alle ungerade Quadratzahlen in der einzigen Formel $8n+1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt, 1 als Rest lassen. Daher alle übrige ungerade Zahlen, welche in einer von diesen Formeln: $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$, enthalten sind, niemals Quadrate werden können.

§. 71.

Aus diesem Grunde können wir auch wiederum zeigen, daß die Formel $3t^2 + 2u^2$ kein Quadrat seyn kann. Denn entweder sind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ist ungerade, weil beyde zugleich nicht gerade seyn können, indem sonst 2 ihr gemeinschaftlicher Theiler seyn würde. Wären beyde ungerade, und folglich sowohl t^2 als u^2 in der Form $8n + 1$ enthalten, so würde das erste Glied $3t^2$ durch 8 dividirt, 3, das andere Glied aber 2, und beyde zusammen würden 5 als Rest lassen, und also keine Quadrate seyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3t^2$ durch 4 theilen lassen, das andere aber $2u^2$ würde durch 4 dividirt, 2, also beyde zusammen würden 2 übrig lassen und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich u gerade, nemlich $u = 2s$, aber t ungerade und folglich $t^2 = 8n + 1$, so würde unsere Formel seyn: $24n + 3 + 8s^2$, welche durch 8 dividirt, 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf die Formel $3t^2 + (8n + 2)\,u^2$ ausdehnen; ingleichen auch auf diese $(8m + 3)\,t^2 + 2u^2$, und auch so gar auf die $(8m + 3)\,t^2 + (8n + 2)\,u^2$, wo für m und n alle ganze Zahlen sowohl positive als negative, genommen werden können.

§. 72.

Wir gehen nun weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von folgenden fünf Formeln enthalten sind.

I. $5n$, II. $5n + 1$, III. $5n + 2$, IV. $5n + 3$, V. $5n + 4$, (1 Th. §. 62). Gehört nun eine Zahl zu der ersten

Art,

Art, so ist ihr Quadrat $25n^2$, welches nicht nur durch 5, sondern auch durch 25 theilbar ist.

Ist eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 10n + 1$, welches durch 5 dividirt, 1 übrig läßt und also in der Formel $5n + 1$ enthalten ist.

Ist eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 20n + 4$, welches durch 5 dividirt, 4 übrig läßt.

Ist eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 30n + 9$, welches durch 5 dividirt, 4 übrig läßt.

Ist endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 40n + 16$, welches durch 5 dividirt, 1 übrig läßt. Wenn daher eine Quadratzahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; daher in diesen Formeln $5n + 2$ und $5n + 3$ kein Quadrat enthalten seyn kann.

§. 73.

Aus diesem Grunde können wir auch beweisen, daß weder die Formel $5t^2 + 2u^2$, noch diese $5t^2 + 3u^2$ ein Quadrat werden könne. Denn entweder ist u durch 5 theilbar oder nicht; im ersten Falle würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen lassen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber u nicht durch 5 theilbar, so ist u^2 entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$. Im erstern Falle wird die erste Formel $5t^2 + 10n + 2$, welche durch 5 getheilt, 2 übrig läßt; die andere aber wird $5t^2 + 15n + 3$, welche durch 5 getheilt, 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber $u^2 = 5n + 4$, so wird die erste Formel $5t^2 + 10n + 8$, welche durch 5 dividirt, 3 übrig läßt;

die

die andere aber wird $5t^2 + 15n + 12$, welche durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also auch in diesem Falle kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grunde kann auch weder die Formel $3t^2 + (5n + 2)u^2$, noch diese $5t^2 + (5n + 3)u^2$ ein Quadrat seyn, weil eben dieselben Reste, wie vorher, überbleiben; man kann auch so gar im ersten Gliede $5mt^2$ statt $5t^2$ schreiben, wenn nur m nicht durch 5 theilbar ist.

§. 74.

Wie alle gerade Quadrate in dieser Form $4n$, alle ungerade aber in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind, und also weder $4n + 2$, noch $4n + 3$, ein Quadrat seyn kann, so folgt daraus, daß die allgemeine Formel $(4m + 3)t^2 + (4n + 3)u^2$ niemals ein Quadrat seyn kann. Denn wäre t gerade, so würde sich t^2 durch 4 theilen lassen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt, 3 übrig lassen. Wären hingegen die Zahlen t und u ungerade, so würden die Reste von t^2 und u^2 nur 1, also von der ganzen Formel würde 2 der Rest seyn. Nun aber ist keine Zahl, welche durch 4 dividirt, 2 übrig läßt, ein Quadrat. Hier ist auch zu merken, daß sowohl m als n negativ, und auch $= 0$, genommen werden kann; daher weder diese Formel $3t^2 + 3u^2$, noch diese $3t^2 - u^2$ ein Quadrat seyn kann.

§. 75.

So wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate sind, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, daß sich immer einige Arten finden, die keine Quadrate seyn können.

Es sey z. B. der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadrate untersuchen wollen.

Arten der Zahlen		ihre Quadrate	gehören zu der Art
I.	$7n$	$49n^2$	$7n$
II.	$7n + 1$	$49n^2 + 14n + 1$	$7n + 1$
III.	$7n + 2$	$49n^2 + 28n + 4$	$7n + 4$
IV.	$7n + 3$	$49n^2 + 42n + 9$	$7n + 2$
V.	$7n + 4$	$49n^2 + 56n + 16$	$7n + 2$
VI.	$7n + 5$	$49n^2 + 70n + 25$	$7n + 4$
VII.	$7n + 6$	$49n^2 + 84n + 36$	$7n + 1$

Da nun die Quadrate, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten: $7n+1$, $7n + 2$, $7n + 4$, enthalten seyn müssen, so werden die drey übrigen Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeschlossen. Diese Arten sind nun $7n + 3$, $7n + 5$, $7n + 6$, und der Grund davon ist offenbar, weil sich immer zwey Arten finden, von welchen die Quadrate zu einer Gattung gehören.

§. 76.

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, so merke man, daß die letzte Art, $7n + 6$, auch durch $7n - 1$ ausgedrückt werden kann. Denn $7n + 6$ und $7n - 1$ sind um 7 von einander unterschieden. Aus eben dieser Ursache ist auch die Formel $7n + 5$ mit dieser, $7n - 2$, einerley, und $7n + 4$ ist eben so viel als $7n - 3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen $7n + 1$ und $7n - 1$ die Quadrate, durch 7 dividirt, einerley übrig lassen, nemlich 1; eben so sind auch die Quadrate dieser beyden Arten $7n + 2$ und $7n - 2$ von einerley Gattung.

§. 77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben d andeuten wollen, so sind die daher entstehenden verschiedenen Arten der Zahlen folgende:

$$dn;$$
$$dn + 1,\ dn + 2,\ dn + 3.\ u.\ s.\ f.$$
$$dn - 1,\ dn - 2,\ dn - 3.\ u.\ s.\ f.$$

wo die Quadrate von $dn + 1$ und $dn - 1$ dieses gemein haben, daß sie durch d dividirt, 1 übrig lassen, und also beyde zu einer Art, nemlich zu $dn+1$, gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Arten $dn + 2$ und $dn - 2$, deren Quadrate zu der Art $dn + 4$ gehören.

Und überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten $dn + a$ und $dn - a$, deren Quadrate durch d dividirt, einerley übrig lassen, nemlich a^2, oder so viel als übrig bleibt, wenn man a^2 durch d theilt.

§. 78.

So erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln, wie $at^2 + bu^2$, welche auf keine Art Quadrate werden können. So sieht man z. B. aus dem Theiler 7 gar leicht, daß keine von diesen drey Formeln $7t^2 + 3u^2$, $7t^2 + 5u^2$ und $7t^2 + 6u^2$ jemals ein Quadrat werden kann, weil u, durch 7 dividirt, entweder 1, oder 2, oder 4 übrig läßt; ferner weil bey der ersten entweder 3, oder 6, oder 5, bey der zweyten entweder 5, oder 3, oder 6, bey der dritten entweder 6, oder 5, oder 3 übrig bleibt, welches bey keinem Quadrat geschehen kann. Wenn nun dergleichen Formeln vorkommen, so würde man sich vergebens bemühen, irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen möchte,

möchte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine gegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einzigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viele andere Fälle gefunden werden sollen.

Die gegebene Formel war eigentlich $ax^2 + b$, und weil gewöhnlich für x Brüche gefunden werden, so haben wir $x = \frac{t}{u}$ gesetzt, so daß diese Formel $at^2 + bu^2$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch oft unendlich viel Fälle, wo so gar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann; wie nun diese zu finden sind, das soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

VI. Capitel.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, wo die Formel $ax^2 + b$ ein Quadrat wird.

§. 79.

Es ist schon oben (§. 63) die Methode gezeigt worden, die Formel $a + bx + cx^2$ so zu verwandeln, daß das mittlere Glied wegfalle, und daher begnügen wir uns, die gegenwärtige Abhandlung nur auf die Form $ax^2 + b$ einzuschränken; wobey es darauf ankömmt, daß für x nur ganze Zahlen gefunden werden, wodurch die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist es nöthig, daß