Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

VI. Capitel. Von den Fällen in ganzen Zahlen, wo die Formel ax^2+b ein Quadrat wird.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50547

möchte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine gegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einzigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viele andere Fälle gefunden werden sollen.

Die gegebene Formel war eigentlich $ax^2 + b$, und weil gewöhnlich für x Brüche gefunden werden, so haben wir $x = \frac{t}{u}$ gesetzt, so daß diese Formel $at^2 + bu^2$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch oft unendlich viel Fälle, wo so gar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann; wie nun diese zu finden sind, das soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

VI. Capitel.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, wo die Formel $ax^2 + b$ ein Quadrat wird.

§. 79.

Es ist schon oben (§. 63) die Methode gezeigt worden, die Formel $a + bx + cx^2$ so zu verwandeln, daß das mittlere Glied wegfalle, und daher begnügen wir uns, die gegenwärtige Abhandlung nur auf die Form $ax^2 + b$ einzuschränken; wobey es darauf ankömmt, daß für x nur ganze Zahlen gefunden werden, wodurch die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist es nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey; denn wäre sie unmöglich, so könnten nicht einmal Brüche für x, noch weniger aber ganze Zahlen Statt finden.

§. 80.

Man setze also die Formel $ax^2 + b = y^2$, da dann beyde Buchstaben x und y ganze Zahlen seyn sollen, weil a und b dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder errathen habe; denn sonst würde alle Mühe überflüssig seyn, mehrere dergleichen Fälle zu suchen, weil vieleicht die Formel selbst etwas unmögliches enthalten könnte.

Wir wollen daher annehmen, daß diese Formel ein Quadrat werde, wenn man $x = f$ setzt, und wollen das Quadrat durch g^2 andeuten, so daß $af^2 + b = g^2$, wo also f und g bekannte Zahlen anzeigen. Es kömmt daher nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

§. 81.

Da nun schon $af^2 + b = g^2$ gefunden worden ist, und überdem auch $ax^2 + b = y^2$ seyn soll, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, wodurch man $ax^2 - af^2 = y^2 - g^2$ erhält, welche Gleichung sich durch folgende Factoren ausdrücken läßt: $a(x + f)(x - f) = (y + g)(y - g)$. Man multiplicire auf beyden Seiten mit pq, so hat man $apq(x + f)(x - f) = pq(y + g)(y - g)$; welche Gleichung sich auf folgende Art vertheilen läßt:

läßt: $ap(x + f) = q(y + g)$ und $q(x - f) = p(y - g)$. Nunmehr suche man aus diesen beyden Gleichungen die Buchstaben x und y zu bestimmen. Die erste Gleichung durch q dividirt, giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere durch p dividirt, giebt $y - g = \frac{ax - af}{p}$; diese von jener subtrahirt, giebt $2g = \frac{(ap^2 - q^2)x + (ap^2 + q^2)f}{pq}$, und wenn man mit pq multiplicirt, so erhält man $2pqg = (ap^2 - q^2)x + (ap^2 + q^2)f$; daher $x = \frac{2gpq}{ap^2 - q^2} - \frac{(ap^2 + q^2)f}{ap^2 - q^2}$. Hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gq^2}{ap^2 - q^2} - \frac{(ap^2 + q^2)fq}{(ap^2 - q^2)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey ersten Glieder den Buchstaben g, welche zusammen gezogen, $\frac{g(ap^2 + q^2)}{ap^2 - q^2}$ geben; die beyden andern enthalten den Buchstaben f, und geben unter einer Benennung $-\frac{2afpq}{ap^2 - q^2}$, daher ist $y = \frac{g(ap^2 + q^2) - 2afpq}{ap^2 - q^2}$.

§. 82.

Diese Arbeit scheint unserm Zwecke gar nicht zu entsprechen, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für x und y ganze Zahlen finden sollten, und es würde nun auf eine neue Untersuchung ankommen, was man anstatt p und q für Zahlen annehmen müßte, damit die Brüche wegfallen; diese Frage scheint aber noch schwerer zu seyn, als unsere Hauptfrage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgriff angewendet werden, wodurch wir leicht zum Ziele gelangen. Denn da hier alles in ganzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{ap^2+q^2}{ap^2-q^2} = m$, und $\frac{2pq}{ap^2-q^2} = n$; hierdurch erhält man $x = ng - mf$ und $y = mg - naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müssen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende wollen wir ihre Quadrate betrachten, da wir dann haben werden:

$$m^2 = \frac{a^2p^4+2ap^2q^2+q^4}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4} \text{ und } n^2 = \frac{4p^2q^2}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4};$$

wir bekommen daher:

$$m^2 - an^2 = \frac{a^2p^4+2ap^2q^2+q^4-4ap^2q^2}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4}$$

$$= \frac{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4} = 1.$$

§. 83.

Hieraus sieht man, daß die beyden Zahlen m und n so beschaffen seyn müssen, daß $m^2 = an^2+1$. Da nun a eine bekannte Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn, eine solche ganze Zahl für n zu finden, daß an^2+1 ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel ist; und so bald man eine solche gefunden, und überdem auch die Zahl f so bestimmt hat, daß af^2+b ein Quadrat werde, nemlich durch g^2, so bekömmt man für x und y folgende Werthe in ganzen Zahlen: $x = ng - mf$; $y = mg - naf$, und dadurch wird $ax^2+b = y^2$.

§. 84.

Es ist schon für sich klar, daß, wenn einmal m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil das Quadrat n^2 doch einerley bleibt.

Um

Um daher x und y in ganzen Zahlen zu finden, damit $ax^2 + b = y^2$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nemlich $af^2 + b = g^2$ sey. So bald dieser Fall bekannt ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $an^2 + 1 = m^2$ werde, wozu in folgendem die Anleitung gegeben werden soll. Ist nun dies geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da dann $x^2 + b = y^2$ seyn wird.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen, für bekannt angenommenen Falls, und schreibt $ng + mf$, statt f, und $mg + naf$, statt g, so bekömmt man für x und y wieder neue Werthe, aus welchen ferner, wenn sie für f und g gesetzt werden, noch andere neue heraus gebracht werden, und so immerfort, so daß, wenn man anfänglich nur einen solchen Fall gehabt hat, man daraus unendlich viele andere finden kann.

§. 85.

Die Art, wie wir zu dieser Auflösung gelangt sind, war ziemlich mühsam, und schien anfänglich von unserm Endzweck sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonderes Glück haben weggeschaft werden können. Es wird daher gut seyn, noch einen andern kürzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

§. 86.

Da $ax^2 + b = y^2$ seyn soll, und man schon $af^2 + b = g^2$ gefunden hat, so giebt uns jene Gleichung $b = y^2 - ax^2$, diese aber $b = g^2 - af^2$. Folglich muß auch $y^2 - ax^2 = g^2 - af^2$ seyn; und jetzt kömmt alles darauf an, daß man aus den bekannten Zahlen f und g die unbekannten x und y finden soll; wo denn so gleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wenn man $x = f$ und $y = g$ annimmt. Allein hieraus erhält man keinen neuen Fall, außer denjenigen, der schon für bekannt genommen wird.

Wir wollen also setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde, oder daß $an^2 + 1 = m^2$; daher wird nun $m^2 - an^2 = 1$. Damit multiplicire man in obiger Gleichung den Theil $g^2 - af^2$, so muß auch $y^2 - ax^2 = (g^2 - af^2)(m^2 - an^2) = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$ seyn. Wir wollen zu diesem Ende $y = gm + afn$ setzen, so bekommen wir: $g^2m^2 + 2afgmn + a^2f^2n^2 - ax^2 = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$, wo sich die Glieder g^2m^2 und $a^2f^2n^2$ einander aufheben, und wir also $ax^2 = af^2m^2 + ag^2n^2 + 2afgmn$ erhalten, welche Gleichung, durch a getheilt, $x^2 = f^2m^2 + g^2n^2 + 2fgmn$ giebt. Diese Formel ist offenbar ein Quadrat, woraus wir $x = fm + gn$ erhalten, welches eben die Formeln sind, die wir vorher gefunden haben.

§. 87.

Es wird nun noch nöthig seyn, diese Auflösung durch einige Beispiele deutlicher zu machen.

I. Aufg. Man suche alle ganze Zahlen für x, und zwar von der Beschaffenheit, daß $2x^2 - 1$ ein Quadrat werde, oder daß $2x^2 - 1 = y^2$ sey.

Hier ist also $2x^2 - 1 = ax^2 + b$, und daher $a = 2$ und $b = -1$. Der erste Fall, welcher in die Augen fällt, ist nun, wenn man $x = 1$ und

$y = 1$ annimmt. Aus diesem bekannten Falle haben wir nun $f = 1$ und $g = 1$. Es wird aber ferner erfordert, eine solche Zahl für n zu finden, daß $2n^2 + 1$ ein Quadrat werde, nemlich m^2; dieses geschieht nun, wenn $n = 2$ und $m = 3$, daher wir aus einem jeden bekannten Fall f und g folgende neue finden: $x = 3f + 2g$, und $y = 3g + 4f$. Da nun der erste bekannte Fall $f = 1$ und $g = 1$ ist, so finden wir daraus folgende neue Fälle:

$x = f = 1$	5	29	169
$y = g = 1$	7	41	239 u. s. f.

§. 88.

II. Aufg. Man suche alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind.

Es sey z die Dreyeckswurzel, so ist das Dreyeck $\frac{z^2 + z}{2}$, welches ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel davon sey x, so muß $\frac{z^2 + z}{2} = x^2$ seyn. Man multiplicire mit 8, so wird $4z^2 + 4z = 8x^2$ und auf beyden Seiten 1 addirt, giebt $4z^2 + 4z + 1 = (2z + 1)^2 = 8x^2 + 1$. Es kömmt also darauf an, daß $8x^2 + 1$ ein Quadrat werde, und wenn man $8x^2 + 1 = y^2$ setzt, so wird $y = 2z + 1$, und also die gesetzte Dreyeckwurzel $z = \frac{y - 1}{2}$.

Hier ist nun $a = 8$ und $b = 1$, und der bekannte Fall fällt so gleich in die Augen, nemlich $f = 0$ und $g = 1$. Damit ferner $8n^2 + 1 = m^2$ werde, so ist $n = 1$ und $m = 3$; daher bekömmt man $x = 3f + g$ und $y = 3g + 8f$, und $z = \frac{y - 1}{2}$. Hieraus bekommen wir folgende Auflösungen:

$x = f = 0$	1	6	35	204	1189	
$y = g = 1$	3	17	99	577	3363	
$z = \frac{y-1}{2} = 0$	1	8	49	288	1681	u. s. f.

§. 89.

III. Aufg. Man suche alle Fünfeckszahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind.

Die Fünfeckswurzel sey $= z$, so ist das Fünfeck $= \frac{3z^2 - z}{2}$, welches dem Quadrat x^2 gleich gesetzt werde; daher wird $3z^2 - z = 2x^2$; man multiplicire mit 12 und addire, so wird $36z^2 - 12z + 1 = 24x^2 + 1 = (6z - 1)^2$.

Setzt man nun $24x^2 + 1 = y^2$, so ist $y = 6z - 1$ und $z = \frac{y+1}{6}$. Da nun hier $a = 24$, $b = 1$, so ist der bekannte Fall $f = 0$ und $g = 1$. Da ferner $24n^2 + 1 = m^2$ seyn muß, so nehme man $n = 1$ und davon wird $m = 5$; daher erhalten wir $x = 5f + g$ und $y = 5g + 24f$ und $z = \frac{y+1}{6}$; oder auch $y = 1 - 6z$, so wird ebenfalls $z = \frac{-y}{6}$, woraus man folgende Auflösungen findet:

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

§. 90.

IV. Aufg. Man suche alle Quadrate in ganzen Zahlen, welche siebenmal genommen und dazu 2 addirt, wiederum Quadrate werden.

Hier

Hier wird also gefordert, daß $7x^2 + 2 = y^2$ seyn soll, wo $a = 7$ und $b = 2$; der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, wenn $x = 1$ und dann ist $x = f = 1$ und $y = g = 3$. Nun betrachte man die Gleichung $7n^2 + 1 = m^2$, und da findet man leicht $n = 3$ und $m = 8$; daher erhalten wir $x = 8f + 3g$ und $y = 8g + 21f$, woraus folgende Werthe für x gefunden werden:

$x = f = 1$	17	271
$y = g = 3$	45	717

§. 91.

V. Aufg. Man suche alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich fünfeckige Zahlen sind.

Es sey die Dreyeckswurzel $= p$ und die Fünfeckswurzel $= q$, so muß seyn $\frac{p^2 + p}{2} = \frac{3q^2 - q}{2}$, oder $3q^2 - q = p^2 + p$; hieraus suche man q, und da $q^2 = \frac{1}{3}q + \frac{p^2 + p}{3}$, so wird $q = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{p^2 + p}{3}\right)}$, das ist $q = \frac{1 \pm \sqrt{(12p^2 + 12p + 1)}}{6}$. Es kömmt also darauf an, daß $12p^2 + 12p + 1$ ein Quadrat und zwar in ganzen Zahlen werde. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p = \frac{x - 1}{2}$; dadurch bekommen wir $12p^2 = 3x^2 - 6x + 3$ und $12p = 6x - 6$, daher $12p^2 + 12p + 1 = 3x^2 - 2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Nehmen wir daher an, daß $3x^2 - 2 = y^2$, so haben wir daraus $p = \frac{x - 1}{2}$ und $q = \frac{1 + y}{6}$; da nun

die

die ganze Sache auf die Formel $3x^2 - 2 = y^2$ ankömmt, so ist $a = 3$ und $b = -2$, und der bekannte Fall $x = f = 1$ und $y = g = 1$; hernach haben wir für diese Gleichung $m^2 = 3n^2 + 1$, $n = 1$ und $m = 2$, daraus erhalten wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q.

Da $x = 2f + g$ und $y = 2g + 3f$ ist, so wird:

	$x = f = 1$	3	11	41
	$y = g = 1$	5	19	71
	$p = 0$	1	5	20
	$q = \frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder	$q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nemlich auch $q = \frac{1-y}{6}$ ist.

§. 92.

Bisher waren wir gezwungen, aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wenn eines vorhanden war. Man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formeln anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach die gegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll, diese: $ax^2 + bx + c = y^2$, und hievon sey schon der Fall $af^2 + bf + c = g^2$ bekannt.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der gegebenen, so wird $a(x^2 - f^2) + b(x - f) = y^2 - g^2$, welche durch folgende Factoren ausgedrückt werden kann: $(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g)$. Man multiplicire auf beyden Seiten mit pq, so wird $pq(x - f)(ax + af + b) = pq(y - g)(y + g)$, welche Gleichung sich in diese zwey zergliedern läßt: I.) $p(x - f) = q(y - g)$; II.) $q(ax + af + b) = p(y + g)$; denn wenn man sie in einander multiplicirt, so erhält man jene

Glei-

Gleichung. Nun multiplicire man die erste mit p, die andere mit q, und subtrahire jenes Product von diesem, so kömmt $(aq^2 - p^2)x + (aq^2 + p^2)f + bq^2 = 2gpq$ heraus. Folglich ist $x = \frac{2gpq}{aq^2 - p^2} - \frac{(aq^2+p^2)f}{aq^2-p^2} - \frac{bq^2}{aq^2-p^2}$. Nach der ersten Gleichung ist $q(y-g) = p(x-f) = p\left(\frac{2gpq}{aq^2-p^2} - \frac{2afq^2}{aq^2-p^2} - \frac{bq^2}{aq^2-p^2}\right)$; also $y - g = \frac{2gp^2}{aq^2-p^2} - \frac{2afpq}{aq^2-p^2} - \frac{bpq}{aq^2-p^2}$, und daher $y = g\left(\frac{aq^2+p^2}{aq^2-p^2}\right) - \frac{2afpq}{aq^2-p^2} - \frac{bpq}{aq^2-p^2}$.

Um diese Brüche wegzubringen, nehme man, wie oben (§. 82) geschehen ist, $\frac{aq^2+p^2}{aq^2-p} = m$ und $\frac{2pq}{aq^2-p^2} = n$ an, so wird $m + 1 = \frac{2aq^2}{aq^2-p^2}$ und also $\frac{q^2}{aq^2-p^2} = \frac{m+1}{2a}$. Folglich wird $x = ng - mf - b\frac{(m+1)}{2a}$ und $y = mg - naf - \frac{1}{2}bn$ seyn, wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen seyn müssen, wie oben, nemlich daß $m^2 = an^2 + 1$.

§. 93.

Solchergestalt sind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die Glieder, welche den Buchstaben b enthalten, Brüche sind, und also unserm Endzweck kein Genüge

nüge leisten. Allein es ist zu merken, daß, wenn man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, diese immer ganze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q finden kann. Denn man nehme p und q dergestalt an, daß $p^2 = aq^2 + 1$; so fallen, weil $aq^2 - p^2 = -1$, die Brüche von selbst weg; und da wird $x = -2gpq + f(aq^2 + p^2) + bq^2$, und $y = -g(aq^2 + p^2) + 2afpq + bpq$. Weil aber in dem bekannten Falle $af^2 + bf + c = g^2$ nur das Quadrat g^2 vorkömmt, so ist es gleichviel, ob man dem Buchstaben g das Zeichen + oder − giebt. Man schreibe also $-g$ statt $+g$, so werden unsere Formeln seyn: $x = 2gpq + f(aq^2 + p^2) + bq^2$; und $y = g(aq^2 + p^2) + 2afpq + bpq$, wo denn gewiß $ax^2 + bx + c = y^2$ seyn wird.

Man suche z. B. diejenigen Sechseckzahlen, welche zugleich Quadrate sind.

Da muß dann $2x^2 - x = y^2$ seyn, wo $a = 2$, $b = -1$, und $c = 0$; der bekannte Fall ist hier offenbar $x = f = 1$, und $y = g = 1$.

Da hernach $p^2 = 2q^2 + 1$ seyn muß, so wird $q = 2$ und $p = 3$; daher wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$, woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x = f = 1$	25	841	
$y = g = 1$	35	1189	u. s. f.

§. 94.

Wir wollen aber bey der erstern Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben, und die Fälle in Erwägung ziehen, wo die Formel $ax^2 + b$ ein Quadrat in ganzen Zahlen wird.

Es

Es sey daher $ax^2 + b = y^2$, und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich, daß man einen Fall wisse, wo dieses geschieht; derselbe sey nun $af^2 + b = g^2$.

Zweytens, daß man solche Zahlen für m und n wisse, daß $m^2 = an^2 + 1$ sey, wozu im folgenden Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem hernach auf gleiche Art neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgender maaßen vorstellen wollen:

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|l}
x = f & A & B & C & D & E & \\
y = g & P & Q & R & S & T & \text{u. s. f.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l|l}
\text{wo} & A = ng + mf & B = nP + mA & C = nQ + mB \\
\text{und} & P = mg + anf & Q = mP + anA & R = mQ + anB
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
D = nR + mC & F = nT + mE & \\
S = mR + anC & V = mT + anE & \text{u. s. f.}
\end{array}$$

welche beyde Reihe Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann, als man nur immer will.

§. 95.

Bey dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen, ohne zugleich die untere zu wissen, und eben so wenig kann man auch die untere fortsetzen, ohne die obere zu kennen. Man kann aber doch leicht eine Regel angeben, die obere Reihe allein fortzusetzen, ohne die untere zu wissen, welche Regel denn auch für die untere Reihe gilt, ohne daß man nöthig hätte, die obere zu wissen.

Die Zahlen nemlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewissen Progression fort, wovon man ein jedes Glied, z. B. E, aus den beyden vorhergehenden C und D, bestimmen kann,

kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Denn da $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, d. i. $E = 2mnR + an^2C + m^2C$, so wird, weil $nR = D - mC$ gefunden, $E = 2mD - m^2C + an^2C$ oder $E = 2mD - (m^2 - an^2)C$. Da aber $m^2 = an^2 + 1$, also $m^2 - an^2 = 1$, so haben wir $E = 2mD - C$; woraus erhellt, wie eine jede dieser obern Zahlen aus den beyden vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Denn da $T = mS + anD$, und $D = nR + mC$, so wird $T = mS + an^2R + amnC$. Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben, $T = 2mS - R$ giebt, so daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet, als die obere.

Man suche z. B. alle ganze Zahlen x, welche diese Eigenschaft haben, daß $2x^2 - 1 = y^2$. Da ist nun $f = 1$ und $g = 1$. Ferner damit $m^2 = 2n^2 + 1$, so muß $n = 2$ und $m = 3$ seyn. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach der Regel gefunden werden: $E = 6D - C$, d. h. ein jedes Glied sechsmal genommen, weniger dem vorhergehenden, giebt das folgende; daher die für x verlangten Zahlen nach dieser Regel folgendermaaßen fortgehen:

$$1, 5, 29, 169, 985, 5741 \text{ u. s. f.}$$

Hieraus sieht man, daß sich diese Zahlen unendlich weit fortsetzen lassen. Wollte man aber auch Brüche gelten lassen, so würde, nach der oben gezeigten Methode, eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.
