Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

VII. Capitel. Von einer besondern Methode, die Formel an^2+1 zu einem Quadrate in ganzen Zahlen zu machen.

VII. Capitel.

Von einer besondern Methode die Formel $an^2 + 1$ zu einem Quadrate in ganzen Zahlen zu machen.

§. 96.

Die in dem vorigen Capitel gegebenen Vorschriften können nicht zur Ausführung gebracht werden, wenn man nicht im Stande ist, für eine jede Zahl a, eine solche ganze Zahl n zu finden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde, oder daß man $m^2 = an^2 + 1$ bekomme.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur $m = 1 + \frac{np}{q}$ annehmen dürfte. Denn da wird $m^2 = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{n^2p^2}{q^2} = an^2 + 1$; wenn man also 1 auf beyden Seiten abzieht, und die übrigen Glieder durch n dividirt, und dann mit q^2 multiplicirt, so erhält man $2pq + np^2 = anq^2$, hieraus wird $n = \frac{2pq}{aq^2 - p^2}$ gefunden, woraus unendlich viele Werthe für n hergeleitet werden können. Weil aber n eine ganze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts; daher zur Erreichung unserer Absicht eine ganz andere Methode gebraucht werden muß.

§. 97.

Vor allen Dingen aber ist zu merken, daß, wenn $an^2 + 1$ ein Quadrat in ganzen Zahlen werden soll, a mag eine Zahl seyn, was man für eine will, solches nicht allezeit möglich sey.

Denn erstlich werden alle Fälle, wo a eine negative Zahl ist, ausgeschlossen; hernach auch alle diejenigen Fälle, wo a selbst eine Quadratzahl ist, weil alsdann an^2 ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber von einem andern Quadrate in ganzen Zahlen um 1 unterschieden seyn kann. Daher muß unsere Formel so eingeschränkt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative, noch eine Quadratzahl sey. So oft aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann jedesmal für n eine solche ganze Zahl gefunden werden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde.

Hat man aber eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht, nach dem vorigen Capitel unendlich viele andere herzuleiten. Zu unserm Vorhaben aber ist es genug, eine einzige, und zwar die kleinste, ausfindig zu machen.

§. 98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, Namens Pell, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Diese ist aber nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jede Zahl a, sondern nur für einen jeden Fall besonders gebraucht werden kann.

Wir wollen daher mit den leichten Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen, daß $2n^2 + 1$ ein Quadrat, oder daß $\sqrt{(2n^2+1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadratwurzel größer als n, aber kleiner als 2n seyn werde. Man nehme daher an, dieselbe sey $= n + p$, so wird p gewiß kleiner seyn, als n. Also haben wir

$\sqrt{(2n^2}$

$\sqrt{(2n^2 + 1)} = n + p$, und daher $2n^2 + 1 = n^2 + 2np + p^2$; woraus wir nun n suchen wollen. Da nun $n^2 = 2np + p^2 - 1$ ist, so wird $n = p + \sqrt{(2p^2 - 1)}$.

Es kömmt also darauf an, daß $2p^2 - 1$ ein Quadrat werde, welches geschieht, wenn $p = 1$ ist, und hieraus findet man $n = 2$ und $\sqrt{(2n^2 + 1)} = 3$. Wäre dieses letztere nicht so gleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2p^2 - 1)}$ größer, als p, folglich n größer als 2p ist, so setze man $n = 2p + q$, wo denn $2p + q = p + \sqrt{(2p^2 - 1)}$ oder $p + q = \sqrt{(2p^2 - 1)}$ wird. Hiervon die Quadrate genommen, kömmt $p^2 + 2pq + q^2 = 2p^2 - 1$ oder $p^2 = 2pq + q^2 + 1$, folglich $p = q + \sqrt{(2q^2 + 1)}$. Es muß also $2q^2 + 1$ ein Quadrat seyn, wenn $q = 0$; daher $p = 1$ und $n = 2$. Aus diesem Beyspiele kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

§. 99.

Es sey nun $a = 3$, so daß die Formel $3n^2 + 1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3n^2 + 1)} = n + p$, so wird $3n^2 + 1 = n^2 + 2np + p^2$ und $2n^2 = 2np + p^2 - 1$, folglich $n = \frac{p + \sqrt{(3p^2 - 2)}}{2}$. Da nun $\sqrt{(3p^2 - 2)}$ größer als p, und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p ist, so setze man $n = p + q$, da wird $2p + 2q = p + \sqrt{(3p^2 - 2)}$ oder $p + 2q = \sqrt{(3p^2 - 2)}$; hiervon die Quadrate genommen, wird $p^2 + 4pq + 4q^2 = 3p^2 - 2$ oder $2p^2 = 4pq + 4q^2 + 2$, d. i. $p^2 = 2pq + 2q^2 + 1$, daher $p = q + \sqrt{(3q^2 + 1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich, und also leistet $q = 0$ ein Genüge; daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, also $\sqrt{(3n^2 + 1)} = 2$.

§. 100.

Nun sey $a = 5$, um diese Formel $5n^2 + 1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel grösser als $2n$ ist. Man setze also $\sqrt{(5n^2 + 1)} = 2n + p$, so wird $5n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$, und daraus $n^2 = 4np + p^2 - 1$; daher $n = 2p + \sqrt{(5p^2 - 1)}$. Weil nun $\sqrt{(5p^2 - 1)}$ größer ist als $2p$, so ist auch n größer als $4p$; deswegen setze man $n = 4p + q$, so wird $2p + q = \sqrt{(5p^2 - 1)}$ oder $4p^2 + 4pq + q^2 = 5p^2 - 1$; folglich $p^2 = 4pq + q^2 + 1$, und also $p = 2q + \sqrt{(5q^2 + 1)}$. Dieser geschieht ein Genüge, wenn $q = 0$, folglich $p = 1$ und $n = 4$; daher $\sqrt{(5n^2 + 1)} = 9$.

§. 101.

Es sey ferner $a = 6$, um $6n^2 + 1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer ist als $2n$. Man setze deswegen $\sqrt{(6n^2 + 1)} = 2n + p$, so wird $6n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$ oder $2n^2 = 4np + p^2 - 1$ und daher $n = p + \frac{\sqrt{(6p^2 - 2)}}{2}$, oder $n = \frac{2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}}{2}$, also n größer als $2p$. Es sey daher $n = 2p + q$, so wird $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}$ oder $2p + 2q = \sqrt{(6p^2 - 2)}$, und die Quadrate hiervon $4p^2 + 8pq + 4q^2 = 6p^2 - 2$, oder $2p^2 = 8pq + 4q^2 + 2$, d. i. $p^2 = 4pq + 2q^2 + 1$, woraus $p = 2q + \sqrt{(6q^2 + 1)}$ gefunden wird; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q = 0$ gesetzt werden kann, woraus folgt, daß $p = 1$ und $n = 2$, also $\sqrt{(6n^2 + 1)} = 5$ ist.

§. 102.

Es sey weiter $a = 7$ und $7n^2 + 1 = m^2$. Weil nun m größer als $2n$, so setze man $m = 2n + p$; folglich ist $7n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$ oder $3n^2 = 4np + p^2 - 1$, also $n = \frac{2p + \sqrt{(7p^2 - 3)}}{3}$. Da nun n größer ist als $\frac{4}{3}p$, und also größer als p ist, so setze man $n = p + q$; so wird $p + 3q = \sqrt{(7p^2 - 3)}$, wovon die Quadrate sind: $p^2 + 6pq + 9q^2 = 7p^2 - 3$; oder $6p^2 = 6pq + 9q^2 + 3$, oder $2p^2 = 2pq + 3q^2 + 1$, und also $p = \frac{q + \sqrt{(7q^2 + 2)}}{2}$. Da nun hier n größer als $\frac{3q}{2}$, und also größer als q ist, so setze man $p = q + r$, wodurch man erhält $q + 2r = \sqrt{(7q^2 + 2)}$, die Quadrate genommen, giebt $q^2 + 4qr + 4r^2 = 7q^2 + 2$, oder $6q^2 = 4qr + 4r^2 - 2$ oder $3q^2 = 2qr + 2r^2 - 1$, folglich $q = \frac{r + \sqrt{(7r^2 - 3)}}{3}$. Da aber q größer ist als r, so setze man $q = r + s$, da wird $2r + 3s = \sqrt{(7r^2 - 3)}$. Die Quadrate hiervon sind $4r^2 + 12rs + 9s^2 = 7r^2 - 3$, oder $3r^2 = 12rs + 9s^2 + 3$ und $r^2 = 4rs + 3s^2 + 1$; also $r = 2s + \sqrt{(7s^2 + 1)}$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s = 0$, und da bekömmt man $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$, daraus $m = 8$.

Diese Rechnung kann auf folgende Art sehr abgekürzt werden, welches auch in andern Fällen Statt findet.

Da $7n^2 + 1 = m^2$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m = 3n - p$, so wird $7n^2 + 1 = 9n^2 - 6np + p^2$ oder $2n^2 = 6np - p^2 + 1$, und daraus $n = \frac{3p - \sqrt{(7p^2 + 2)}}{2}$. Weil also n kleiner als $3p$ ist, so setze man ferner $n = 3p - q$; es wird also $3p - 2q = \sqrt{(7p^2 + 2)}$ und die Quadrate genommen $9p^2 - 12pq + 4q^2 = 7p^2 + 2$, oder $2p^2 = 12pq - 4q^2 + 2$ und $p^2 = 6pq - 2q^2 + 1$, daraus wird $p = 3q + \sqrt{(7q^2 + 1)}$. Hier kann man nun so gleich $q = 0$ annehmen und dann wird $p = 1$, $n = 3$, und $m = 8$ wie vorher.

§. 103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, so daß $8n^2 + 1 = m^2$ und daher m kleiner als $3n$, so setze man $m = 3n - p$, so wird $8n^2 + 1 = 9n^2 - 6np + p^2$, oder $n^2 = 6np - p^2 + 1$, daraus $n = 3p + \sqrt{(8p^2 + 1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, daher man $p = 0$ setzen kann, dann kömmt $n = 1$ und $m = 3$.

§. 104.

Auf gleiche Art verfährt man für eine jede andere Zahl a, wenn diese nur positiv und kein Quadrat ist, und man kömmt endlich immer zu einem solchen Wurzelzeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. B. zu dieser: $\sqrt{(at^2 + 1)}$, da man denn nur $t = 0$ setzen darf, als in welchem Fall die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf, wenn man zurück geht, erhält man einen Werth für n, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Zweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, nach Beschaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewisse Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich schnell; kömmt man aber bis zu dem Falle, wo $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger, und daher wird es gut seyn, diesen Fall hier genauer zu betrachten.

§. 105.

Es sey daher $a = 13$, so daß $13n^2 + 1 = m^2$ seyn soll. Weil nun m^2 größer ist als $9n^2$, und also m größer als $3n$, so setze man $m = 3n + p$. Nunmehr wird $13n^2 + 1 = 9n^2 + 6np + p^2$, oder $4n^2 = 6np + p^2 - 1$, und folglich $n = \frac{3p + \sqrt{(13p^2 - 4)}}{4}$; daher n größer als $\frac{6}{4}p$, und also größer als p ist. Man setze also $n = p + q$, so wird $p + 4q = \sqrt{(13p^2 - 4)}$, und die Quadrate hiervon $13p^2 - 4 = p^2 + 8pq + 16q^2$, daher $12p^2 = 8pq + 16q^2 + 4$, oder durch 4 getheilt, $3p^2 = 2pq + 4q^2 + 1$, und also $p = \frac{q + \sqrt{(13q^2 + 3)}}{3}$. Hier ist p größer als $\frac{q + 3q}{3}$, also größer als q; man setze daher $p = q + r$, so erhält man $2q + 3r = \sqrt{(13q^2 + 3)}$. Das Quadrat hiervon ist $13q^2 + 3 = 4q^2 + 12qr + 9r^2$, d. i. $9q^2 = 12qr + 9r^2 - 3$, durch 3 dividirt, $3q^2 = 4qr + 3r^2 - 1$; folglich $q = \frac{2r + \sqrt{(13r^2 - 3)}}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r + 3r}{3}$, und also q größer als r; daher setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = \sqrt{(13r^2 - 3)}$; welche Gleichung quadrirt sich in folgende verwandelt: $13r^2 - 3 = r^2 + 6rs + 9s^2$, oder $12r^2 = 6rs + 9s^2 + 3$, durch 3 dividirt, wird $4r^2 = 2rs + 3s^2 + 1$, folglich $r = \frac{s + \sqrt{(13s^2 + 4)}}{4}$. Hier ist r größer als $\frac{s + 3s}{4}$ oder s; daher setze man $r = s + t$, so wird $3s + 4t = \sqrt{(13s^2 + 4)}$; das Quadrat genommen $13s^2 + 4 = 9s^2 + 24st + 16t^2$, und also $4s^2 = 24ts + 16t^2 - 4$, durch 4 dividirt, $s^2 = 6ts + 4t^2 - 1$, mithin $s = 3t + \sqrt{(13t^2 - 1)}$. Also ist s größer als $3t + 3t$ oder $6t$, deswegen setze man $s = 6t + u$, so wird $3t + u = \sqrt{(13t^2 - 1)}$, und daher, wenn man die Quadrate nimmt, $13t^2 - 1 = 9t^2 + 6tu + u^2$ und daraus $4t^2 = 6tu + u^2 + 1$, folglich $t = \frac{3u + \sqrt{(13u^2 + 4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u ist. Man setze deswegen $t = u + v$, so wird $u + 4v = \sqrt{(13u^2 + 4)}$; das Quadrat genommen $13u^2 + 4 = u^2 + 8uv + 16v^2$ und $12u^2 = 8uv + 16v^2 - 4$, durch 4 dividirt, $3u^2 = 2uv + 4v^2 - 1$, daraus $u = \frac{v + \sqrt{(13v^2 - 3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, deswegen setze man $u = v + x$, so wird $2v + 3x = \sqrt{(13v^2 - 3)}$; das Quadrat genommen $13v^2 - 3 = 4v^2 + 12vx + 9x^2$ oder $9v^2 = 12vx + 9x^2 + 3$, durch 3 dividirt, $3v^2 = 4vx + 3x^2 + 1$, daraus findet man $v = \frac{2x + \sqrt{(13x^2 + 3)}}{3}$, wo v größer ist als $\frac{4}{3}x$, und also größer als x, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = \sqrt{(13x^2 + 3)}$, die Quadrate genommen $13x^2 + 3 = x^2 + 6xy + 9y^2$ oder $12x^2 = 6xy + 9y^2 - 3$, durch 3 dividirt, $4x^2 = 2xy + 3y^2 - 1$, folglich $x = \frac{y + \sqrt{(13y^2 - 4)}}{4}$, wo x größer ist als y; deswegen setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = \sqrt{(13y^2 - 4)}$, die Quadrate genommen $13y^2 - 4 = 9y^2 + 24yz + 16z^2$ oder $4y^2 = 24yz + 16z^2 + 4$, durch 4 dividirt, $y^2 = 6yz + 4z^2 + 1$, daraus $y = 3z + \sqrt{(13z^2 + 1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist, so setze man $z = 0$, und dann bekömmt man rückwärts gehend folgende Bestimmungen:

$z = 0$	$s = 6t + u = 33$
$y = 1$	$r = s + t = 38$
$x = y + z = 1$	$q = r + s = 71$
$v = x + y = 2$	$p = q + r = 109$
$u = v + x = 3$	$n = p + q = 180$
$t = u + v = 5$	$m = 3n + p = 649$

Also ist 180 nach 0 die kleinste ganze Zahl für n, daß $13n^2 + 1$ ein Quadrat werde.

§. 106.

Aus diesem Beyspiele sieht man deutlich, wie weitläuftig oft eine solche Rechnung werden könne. Denn unter den größern Zahlen muß man oft wohl zehnmal mehr Operationen machen, als hier bey der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen, bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, daher es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen, und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörigen Buchstaben m und n nehmen könne.

§. 107.

Indessen ist zu merken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden werden können; dieses geschieht aber nur bey solchen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadratzahl; dieses aber noch zu erläutern, wird wohl der Mühe werth seyn.

§. 108.

Es sey also $a = e^2 - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadratzahl, und da $(e^2 - 2)n^2 + 1 = m^2$

soll, so ist offenbar m kleiner als en; deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(e^2 - 2)n^2 + 1 = e^2n^2 - 2enp + p^2$ oder $2n^2 = 2enp - p^2 + 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(e^2p^2 - 2p^2 + 2)}}{2}$, wo sogleich in die Augen fällt, daß, wenn man $p = 1$ annimmt, das Wurzelzeichen wegfalle, und dann $n = 2$ und $m = e^2 - 1$ seyn werde.

Wäre z. B. $n = 23$, wo $e = 5$, so wird $23n^2 + 1 = m^2$, wenn $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wenn nemlich $a = e^2 - 2$, so wird $an^2 + 1 = e^4 - 2e^2 + 1$, welches das Quadrat von $e^2 - 1$ ist.

§. 109.

Es sey nun auch $a = e^2 - 1$, nemlich um 1 weniger als eine Quadratzahl, so daß $(e^2 - 1)n^2 + 1 = m^2$ seyn soll. Da nun hier wieder m kleiner ist als en, so setze man $m = en - p$, so wird $(e^2 - 1)n^2 + 1 = e^2n^2 - 2enp + p^2$, oder $n^2 = 2enp - p^2 + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(e^2p^2 - p^2 + 1)}$; wo das Wurzelzeichen wegfällt, wenn $p = 1$, und daraus bekömmt man $n = 2e$, und $m = 2e^2 - 1$. Dieses ist auch leicht einzusehen; denn da $a = e^2 - 1$ und $n = 2e$, so wird $an^2 + 1 = 4e^4 - 4e^2 + 1$, welches das Quadrat von $2e^2 - 1$ ist. Es sey z. B. $a = 24$, so daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24n^2 + 1 = 2401 = (49)^2$ *).

§. 110.

*) Das Wurzelzeichen in diesem Fall verschwindet auch, wenn $p = 0$ gesetzt wird; daher wir denn unstreitig die kleinsten Zahlen für n und m erhalten, welche $n = 1$ und $m = e$ sind. Ist also $e = 5$, so wird die Formel $24n^2 + 1$ ein Quadrat, wenn $n = 1$, und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

§. 110.

Es sey nun auch $a = e^2 + 1$, oder um 1 größer als eine Quadratzahl, so daß $(e^2 + 1) n^2 + 1 = m^2$ seyn soll, wo m augenscheinlich größer ist als en, deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(e^2 + 1) n^2 + 1 = e^2n^2 + 2enp + p^2$ oder $n^2 = 2enp + p^2 - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(e^2p^2 + p^2 - 1)}$, wo $p = 1$ genommen werden kann, und dann wird $n = 2e$ und $m = 2e^2 + 1$; dieses ist auch leicht einzusehen; denn da $a = e^2 + 1$ und $n = 2e$, so ist $an^2 + 1 = 4e^4 + 4e^2 + 1$, welches das Quadrat von $2e^2 + 1$ ist. Es sey z. B. $a = 17$, so daß $e = 4$, und da wird $17n^2 + 1 = m^2$, wenn $n = 8$ und $m = 33$.

§. 111.

Es sey endlich $a = e^2 + 2$, oder um 2 größer als eine Quadratzahl, so soll $(e^2 + 2) n^2 + 1 = m^2$ seyn, wo m offenbar größer ist als en, daher setze man $m = en + p$, so wird $e^2n^2 + 2n^2 + 1 = e^2n^2 + 2enp + p^2$, oder $2n^2 = 2enp + p^2 - 1$, und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(e^2p^2 + 2p^2 - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = e^2 + 1$. Dieses fällt auch so gleich in die Augen, denn da $a = e^2 + 2$ und $n = e$, so ist $an^2 + 1 = e^4 + 2e^2 + 1$, welches das Quadrat von $e^2 + 1$ ist. Es sey z. B. $a = 11$, so daß $e = 3$, so wird $11n^2 + 1 = m^2$ seyn, wenn $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man $a = 83$ annehmen, so ist $e = 9$, und es wird $83n^2 + 1 = m^2$, wenn man $n = 9$ und $m = 82$ annimmt.

Tabelle

Tabelle,

welche für einen jeden Werth von a die kleinsten Zahlen m und n angiebt, so daß $m^2 = an^2 + 1$

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

a	n	m	a	n	m
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10
