Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

VIII. Capitel. Von der Art, die Jrrationalformel $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3)}$ rational zu machen.

VIII. Capitel.

Von der Art, die Irrationalformel $\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3)}$ rational zu machen.

§. 112.

Wir gehen nun weiter zu einer Formel, in welcher x zu der dritten Potenz ansteigt, um hernach bis zur vierten fort zu gehen, ungeachtet diese beyden Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müssen.

Es soll also die Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht, und darum geschickte Werthe für x in Rationalzahlen gesucht werden: denn da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst, nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthigt, sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in ganzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu merken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmal zu unendlich vielen Auflösungen führt.

§. 113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a + bx + cx^2$ unendlich viele Fälle giebt, in welchen die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so findet solches vielmehr bey der gegenwärtigen Formel Statt, wo nicht einmal an eine Auflösung zu denken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen

rathen hat; daher man bloß für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfindig machen kann, aus welcher nachher auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, so daß man auf diese Art immer weiter fortgehen kann.

Indessen geschieht es doch oft, daß, wenn gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann, so daß in solchen Fällen nur eine einzige Statt findet, welcher Umstand besonders zu bemerken ist, weil in dem vorher gehenden Fall aus einer einzigen Auflösung unendlich viele neue gefunden werden können.

§. 114.

Wenn also eine solche Formel wie $a + bx + cx^2 + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall voraus gesetzt werden, wo dieses geschieht; ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen, wenn das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel $f^2 + bx + cx^2 + dx^3$ ist, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man $x = 0$ setzt.

Wir wollen also diese Formel zuerst betrachten, und sehen, wie aus dem bekannten Fall $x = 0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne. Zu Erreichung dieser Absicht kann man zwey Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird, mit besondern Fällen den Anfang zu machen.

§. 115.

Es sey daher die Formel $1 + 2x - x^2 + x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied 1 ein Quadrat ist; so nehme man die Wurzel von diesem Quadrat so an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey daher die Quadratwurzel $1 + x$, von welcher das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen wir $1 + 2x - x^2 + x^3 = 1 + 2x + x^2$, wo die beyden ersten Glieder einander aufheben, und die Gleichung $x^2 = - x^2 + x^3$ oder $x^3 = 2x^2$ heraus kömmt, welche durch x^2 dividirt, sogleich $x = 2$ giebt, woraus unsere Formel $1 + 4 - 4 + 8 = 9$ wird.

Eben so, wenn die Formel $4 + 6x - 5x^2 + 3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man zuerst die Wurzel $= 2 + nx$ und suche n, so daß die beyden ersten Glieder wegfallen, weil nun $4 + 6x - 5x^2 + 3x^3 = 4 + 4nx + n^2x^2$ wird, so muß $4n = 6$ und also $n = \frac{3}{2}$ seyn, woher die Gleichung $- 5x^2 + 3x^3 = \frac{9}{4}x^2$ oder $3x^3 = \frac{29}{4}x^2$ entsteht, daher $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrate macht, dessen Wurzel $2 + \frac{3}{2}x = \frac{45}{8}$ seyn wird.

§. 116.

Der zweyte Weg besteht darin, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f + gx + hx^2$, welche so beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen.

Es sey z. B. die Formel $1 - 4x + 6x^2 - 5x^3$ gegeben; hiervon setze man die Wurzel $1 - 2x + hx^2$, wo dann $1 - 4x + 6x^2 - 5x^3 = 1 - 4x + 4x^2 + 2hx^2 - 4hx^3 + h^2x$ seyn soll; hier fallen die zwey ersten Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß $6 = 2h + 4$ seyn und also $h = 1$. Hieraus bekommen wir $- 5x^3 = - 4x^3 + x^4$, wo durch x^3 dividirt wird, $- 5 = - 4 + x$ und $x = - 1$.

§. 117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wenn das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruht darauf, daß man bey der ersten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als $f+px$, wo f die Quadratwurzel des ersten Gliedes ist, und p so angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nemlich cx^2+dx^3 mit p^2x^2 verglichen werden muß, da denn die Gleichung, durch x^2 dividirt, einen neuen Werth für x angiebt, welcher $x=\frac{p^2-c}{d}$ seyn wird. Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder und setzt dieselben $f+px+qx^2$, wenn nemlich $a=f^2$, und bestimmt p und q dergestalt, daß die drey ersten Glieder auf beyden Seiten verschwinden, welches so geschieht: da $f^2+bx+cx^2+dx^3=f^2+2fpx+2fqx^2+p^2x^2+2pqx^3+q^2x^4$, so muß $b=2fp$ seyn, also $p=\frac{b}{2f}$, und $c=2fq+p^2$, also $q=\frac{c-p^2}{2f}$; und die übrige Gleichung $dx^3=2pqx^3+q^2x^4$ läßt sich theilen, und daraus wird $x=\frac{d-2pq}{q^2}$.

§. 118.

Indessen kann es oft geschehen, daß, obgleich $a=f^2$, dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus der Formel f^2+dx^3 sich ersehen läßt, wo das zweyte und dritte Glied fehlt.

Denn setzt man nach der ersten die Wurzel $=f+px$, so daß $f^2+dx^3=f^2+2fpx+p^2x^2$ seyn soll, so muß $o=2fp$ und $p=o$ seyn, daher bekömmt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qx^2$, so daß $f^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + 2fqx^2 + 2pqx^3 + q^2x^4$ seyn soll, so muß $0 = 2fp$ und $p = 0$ seyn, ferner $0 = 2fp + p^2$, und also $q = 0$, daher man $dx^3 = 0$ und wiederum $x = 0$ bekömmt.

§. 119.

In solchen Fällen ist nun nichts zu thun, als daß man sehe, ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, wo man dann aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht, wenn gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen, so soll die Formel $3 + x^3$ ein Quadrat seyn; da nun solches geschieht, wenn $x = 1$, so setze man $x = 1 + y$, und da bekömmt man: $4 + 3y + 3y^2 + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3y^2 + y^3 = 4 + 4py + p^2y^2$; wo nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, und also $y = \frac{3}{4}$, alsdann wird $3 + y = p^2$ und $y = p^2 - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$, folglich $x = -\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qy^2$, so wird $4 + 3y + 3y^2 + y^3 = 4 + 4py + 4qy^2 + 2pqy^3 + q^2y^4 + p^2y^2$, wo nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen, $3 = 4q + p^2$, also $q = \frac{3 - p^2}{4} = \frac{39}{64}$;

so

so haben wir $1 = 2pq + q^2y$, und daraus $y = \frac{1-2pq}{q^2}$, oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

§. 120.

Nun wollen wir auch zeigen, wie man, wenn man schon einen solchen Werth gefunden hat, daraus weiter einen andern neuen finden soll. Wir wollen dieses auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf folgende Formel anwenden: $a + bx + cx^2 + dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde, wenn $x = f$, und daß alsdann $a + bf + cf^2 + df^3 = g^2$ sey. Hierauf setze man $x = f + y$, so erhält man folgende neue Formel:

$$\begin{array}{llll}
a & & & \\
+ bf & + by & & \\
+ cf^2 & + 2cfy & + cy^2 & \\
+ df^3 & + 3df^2y & & + dy^3 \\
\hline
g^2 & + (b + 2cf + 3df^2)y & + (c + 3df)y^2 & + dy^3
\end{array}$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, so daß die beyden obigen Methoden angewendet werden können; wodurch neue Werthe für y und also auch für x gefunden werden, nemlich $x = f + y$.

§. 121.

Oft hilft es aber auch nichts, wenn man gleich einen Werth für x errathen hat, wie in der Formel $1 + x^3$ geschieht, welche ein Quadrat wird, wenn man $x = 2$ setzt. Denn setzt man diesem zufolge $x = 2 + y$, so kömmt diese Formel $9 + 12y + 6y^2 + y^3$ heraus, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon, nach der ersten Regel, die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6y^2 + y^3 = 9 + 6py + p^2y^2$; wo $12 = 6p$ und $p = 2$ seyn muß; alsdann wird $6 + y = p^2 = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werth aber nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qy^2$, so wird $9 + 12y + 6y^2 + y^3 = 9 + 6py + 6qy^2 + 2pqy^3 + q^2y^4 + p^2y^2$, wo erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + p^2 = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$ seyn muß. Hieraus erhält man $1 = 2pq + q^2y = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; daher $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschlossen werden kann. Denn wollte man $x = -1 + z$ annehmen, so erhielte man die Formel $3z - 3z^2 + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt, und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß die Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden könne, außer in diesen drey Fällen:

I.) $x = 2$, II.) $x = 0$, III.) $x = -1$,

doch kann dieses aber auch aus andern Gründen bewiesen werden.

§. 122.

Zur Uebung wollen wir noch die Formel $1 + 3x^3$ betrachten, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird I.) $x = 0$, II.) $x = 1$, III.) $x = 2$, und wir wollen sehen, ob sich noch andere solche Werthe finden lassen?

Da nun bekannt ist, daß $x = 1$ ein Werth ist, so setze man $x = 1 + y$; und da bekömmt man $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9y^2 + 3y^3$, davon sey die Wurzel $2 + py$, so daß $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3 = 4 + 4py + p^2y^2$ seyn soll, wo $9 = 4p$ und also $p = \frac{9}{4}$ seyn muß; die übrigen Glieder geben aber $9 + 3y = p^2 = \frac{81}{16}$ und $y = -\frac{21}{16}$; folglich $x = -\frac{5}{16}$, wo dann $1 + 3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel $-\frac{61}{64}$ oder auch $+\frac{61}{64}$ ist; wollte man nun weiter $x = -\frac{5}{16} + z$ annehmen, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen: $2 + py + qy^2$, so daß $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3 = 4 + 4py + 4qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$ seyn soll, so müßte erstlich seyn $9 = 4p$, also $p = \frac{9}{4}$; hernach $9 = 4q + p^2 = 4q + \frac{81}{16}$, und also $q = \frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Gliedern wird $3 = 2pq + q^2y = \frac{567}{128} + q^2y$, oder $567 + 128q^2y = 384$, oder $128q^2y = -183$, das ist $126. \frac{63}{64}y = -183$, oder $42. \frac{63}{64}y = -61$, daher $y = -\frac{1952}{1323}$, folglich $x = -\frac{629}{1323}$, aus welchem nach der vorher gegebenen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

§. 123.

Hier haben wir aus dem bekannten Fall $x = 1$ zwey neue Werthe heraus gebracht, aus welchen man, wenn man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue finden könnte, wodurch man aber auf sehr weitläuftige Brüche gerathen würde.

Daher hat man Ursache sich zu verwundern, daß aus diesem Fall $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, heraus gebracht worden; welches daher ohne Zweifel ein Zeichen der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode ist. Man kann gleichergestalt aus dem Fall $x = 2$ andere neue Werthe heraus bringen, man setze zu diesem Ende $x = 2 + y$, so daß folgende Formel ein Quadrat seyn soll: $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3$; hiervon sey die Wurzel nach der ersten Methode $5 + py$, so wird $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3 = 25 + 10py + p^2y^2$, und also $36 = 10p$ oder

$p = \frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern, durch y^2 dividirt, $18 + 3y = p^2 = \frac{324}{25}$, und daher $y = -\frac{42}{25}$, und $x = \frac{8}{25}$, hieraus wird $1 + 3x^3$ ein Quadrat, wovon die Wurzel ist $5 + py = -\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$.

Will man ferner nach der zweyten Methode die Wurzel setzen: $5 + py + qy^2$, so wird $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3 = 25 + 10py + 10qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$; wo, um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen, $36 = 10p$, oder $p = \frac{18}{5}$ seyn muß; hernach $18 = 10q + p^2$, und $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, und $q = \frac{63}{125}$, die übrigen Glieder, durch y^3 getheilt, geben $3 = 2pq + q^2y$, oder $q^2y = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$; also $y = -\frac{3275}{1323}$, und $x = -\frac{629}{1323}$.

§. 124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grunde es ganz leicht ist, so gar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel: $1 - x - x^2 + x^3$ geschieht, wo auf eine allgemeine Art $x = n^2 - 1$ genommen werden kann, und wo n eine jede beliebige Zahl bedeutet.

Denn wenn $n = 2$, so wird $x = 3$, und unsere Formel $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Nimmt man $n = 3$, so wird $x = 8$ und unsere Formel $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Es ereignet sich aber hier ein ganz besonderer Umstand, welchem wir diese leichte Auflösung zu danken haben, und welcher so gleich in die Augen fallen wird, wenn wir unsere Formel in Factoren auflösen. Es ist leicht einzusehen, daß sich dieselbe durch $1 - x$ theilen lasse und daß der Quotient $1 - x^2$ seyn werde, welcher weiter aus folgenden

genden Factoren besteht: $(1 + x)(1 - x)$, so daß unsere Formel diese Gestalt erhält:
$1 - x - x^2 + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2 . (1 + x)$. Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1 + x$ ein Quadrat seyn; und umgekehrt, wenn $1 + x$ ein Quadrat ist, so wird auch $(1 - x)^2 (1 + x)$ ein Quadrat, man darf also nur $1 + x = n^2$ setzen, so bekömmt man sogleich $x = n^2 - 1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerkt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

§. 125.

Bei einer jeden gegebenen Formel ist es daher sehr gut, dieselbe in ihre Factoren aufzulösen, wenn dieses nemlich möglich ist.

Wie dieses aber anzustellen sey, ist schon oben gezeigt worden; man setzt nemlich die gegebene Formel $= 0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, wo dann eine jede Wurzel, z. B. $x = f$, einen Factor $f - x$ giebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler der bloßen Zahl sind.

§. 126.

Dieser Umstand trifft auch bey unserer allgemeinen Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ ein, wenn die zwey ersten Glieder wegfallen, so daß $cx^2 + dx^3$ ein Quadrat seyn soll; denn alsdann muß auch nothwendig diese Formel, durch das Quadrat x^2 dividirt, nemlich $c + dx$ ein Quadrat seyn, wo man denn nur setzen darf $c + dx = n^2$, um $x = \frac{n^2 - c}{d}$ zu bekommen, welche auf einmal unendlich viele, und so gar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

§. 127.

Wenn man bey dem Gebrauch der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wollte, um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die gegebene Formel $f^2 + bx + cx^2 + dx^3$, und man setze die Wurzel davon $= f + px$, so wird $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + p^2x^2$, wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt, geben $b + cx + dx^2 = 2fp + p^2x$, welches eine quadratische Gleichung ist, aus welcher x gefunden wird, wie folgt:

$$x = \frac{p^2 - c + \sqrt{(p^4 - 2cp^2 + 8dfp + c^2 - 4bd)}}{2d}.$$

Jetzt kömmt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cp^2 + 8dfp + c^2 - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potenz der gesuchten Zahl p vorkömmt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

IX. Ca-