



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

X. Capitel. Von der Art, die Irrationalformel $3\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3)}$ rational zu machen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-50547](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-50547)

Von der Formel $\sqrt[3]{a + bx + cx^2 + dx^3}$. 279

übrig, welche durch x dividirt, eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzelzeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel $k + px + qx^2 + rx^3$ annehmen, so würde das Quadrat bis zur sechsten Potenz aufsteigen, so daß, wenn gleich p , q und r so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potenz übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt, wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzelzeichen aufgelöst werden könnte. Wir müssen daher hier die Formeln, welche ein Quadrat seyn sollen, verlassen, und wollen nun weiter zu den cubischen Wurzelzeichen fortgehen.

X. Capitel.

Von der Art, diese Irrationalformel

$$\sqrt[3]{a + bx + cx^2 + dx^3}$$

rational zu machen.

§. 147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert, daß die Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ eine Cubiczahl werde, und daraus also die Cubicwurzel gezogen werden könne. Hierbey ist zu erinnern, daß diese Formel die dritte Potenz nicht überschreiten müsse, weil sonst die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potenz gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden; fielen aber die zwey

§ 4

letzten

letzten Glieder weg, so, daß die Formel $a + bx$ zu einem Cubus gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur $a + bx = p^3$ annehmen dürfte, und daraus sogleich $x = \frac{p^3 - a}{b}$ gefunden würde.

§. 148.

Hier ist wieder vor allen Dingen zu merken, daß, wenn weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu denken sey, wosern nicht schon ein Fall, in welchem die Formel ein Cubus wird, bekannt ist, dieser möge nun auch sogleich in die Augen fallen, oder erst durch Probiren gefunden werden müssen.

Das erstere geschieht nun, zuerst wenn das erste Glied ein Cubus und die Formel $f^3 + bx + cx^2 + dx^3$ ist, wo der bekannte Fall $x = 0$ ist; hernach auch, wenn das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist: $a + bx + cx^2 + g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entsteht der dritte, wo sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier betrachten wollen.

§. 149.

I. Fall. Es sey die gegebene Formel $f^3 + bx + cx^2 + dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze daher die Wurzel davon $f + px$, so daß unsere Formel dem Cubus $f^3 + 3f^2px + 3fp^2x^2 + p^3x^3$ gleich seyn soll; da nun die ersten Glieder von selbst wegsallen, so bestimme man p dergestalt, daß auch die zweyten wegsallen; dieses geschieht, wenn $b = 3f^2p$, oder $p = \frac{b}{3f^2}$; alsdann geben die übrigen Glieder, durch x^2 dividirt, die Gleichung $c + dx$

Von der Formel $\sqrt[3]{a + bx + cx^2 + dx^3}$. 281

$c + dx = 3fp^2 + p^3x$, woraus $x = \frac{c - 3fp^2}{p^3 - d}$ gefunden wird. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubikwurzel schlechtweg $= f$ annehmen, da man dann $f^3 = f^3 + bx + cx^2$, oder $b + cx = 0$ bekommen würde, und daraus $x = -\frac{b}{c}$, woraus aber weiter nichts geschlossen werden könnte.

§. 150.

II. Fall. Die gegebene Formel habe nun diese Gestalt: $a + bx + cx^2 + g^3x^3$, man setze die Cubikwurzel $p + gx$, von welcher der Cubus $p^3 + 3gp^2x + 3g^2px^2 + g^3x^3$ ist, wo sich dann die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man p , so daß auch die vorletzten wegfallen, welches geschieht, wenn $c = 3g^2p$ oder $p = \frac{c}{3g^2}$; alsdann geben die zwey ersten die Gleichung $a + bx = p^3 + 3gp^2x$, aus welcher $x = \frac{a - p^3}{3gp^2 - b}$ gefunden wird. Wäre das erste Glied a nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubikwurzel auch schlechtweg $= gx$ annehmen können, da dann $g^3x^3 = bx + cx^2 + g^3x^3$, oder $0 = b + cx$, folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gewöhnlich zu nichts dient.

§. 151.

III. Fall. Es sey endlich die gegebene Formel $f^3 + bx + cx^2 + g^3x^3$, worin sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; daher sie auf beyde vorhergehende Arten behandelt und also zwey Werthe für x heraus gebracht werden können.

Außer diesen aber kann man auch noch die Wurzel $f + gx$ setzen, so daß unsere Formel dem Cubus $f^3 + 3f^2gx + 3fg^2x^2 + g^3x^3$ gleich werden soll, wo dann die ersten und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber, durch x dividirt, die Gleichung $b + cx = 3f^2g + 3fg^2x$ geben, und daraus

$$x = \frac{b - 3f^2g}{3fg^2 - c}.$$

§. 152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man einen Werth zu erhalten suche, wo sie ein Cubus wird. Hat man einen solchen gefunden, welcher $x = h$ sey, so daß $a + bh + ch^2 + dh^3 = k^3$, so setze man $x = h + y$, wo dann unsere Formel folgende Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ ch^2 + 2chy + cy^2 \\ dh^3 + 3dh^2y + 3dhy^2 + dy^3 \end{array}$$

$k^3 + (b + 2ch + 3dh^2)y + (c + 3dh)y^2 + dy^3$
welche zu der ersten Art gehört, und also für y ein Werth gefunden werden kann, woraus man dann einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachher auf gleiche Weise noch mehrere gefunden werden können.

§. 153.

Wir wollen nun dieses Verfahren durch einige Beispiele erläutern und zuerst die Formel $1 + x + x^2$ betrachten, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehört. Man könnte also sogleich die Cubikwurzel $= 1$ setzen, woraus $x + x^2 = 0$ gefunden würde, das ist $x(1 + x) = 0$; folglich entweder

Von der Formel $\sqrt[3]{a + bx + cx^2 + dx^3}$. 283

der $x = 0$ oder $x = -1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze daher die Cubikwurzel $1 + px$, wovon der Cubus $1 + 3px + 3p^2x^2 + p^3x^3$ ist, und mache $1 = 3p$, oder $p = \frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder, durch x^2 dividirt, $1 = 3p^2 + p^3x$, oder $x = \frac{1-3p^2}{p^3}$; da nun $p = \frac{1}{3}$, so wird $x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}} = 18$, und daher unsere Formel $1 + 18 + 324 = 343$, wovon die Cubikwurzel $1 + px = 7$ ist. Wollte man nun weiter $x = 18 + y$ annehmen, so würde unsere Formel folgende Gestalt bekommen: $343 + 37y + y^2$, wovon nach der ersten Regel die Cubikwurzel $7 + py$ anzunehmen wäre, wovon der Cubus $343 + 147py + 21p^2y^2 + p^3y^3$ ist; nun setze man $37 = 147p$, oder $p = \frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder die Gleichung $1 = 21p^2 + p^3y$, also $y = \frac{1-21p^2}{p^3}$, das ist $y = \frac{340 \cdot 121 \cdot 147}{37^3} = \frac{1040580}{50653}$, woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

§. 154.

Es sey ferner die Formel $2 + x^2$ gegeben, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden, in welchem dieses geschieht, dieser ist $x = 5$; man setze daher sogleich $x = 5 + y$, so bekommt man $27 + 10y + y^2$; davon sey die Cubikwurzel $3 + py$, und also die Formel selbst dem Cubus $27 + 27py + 9p^2y^2 + p^3y^3$ gleich; man mache $10 = 27p$, oder $p = \frac{10}{27}$, so bekommt man $1 = 9p^2 + p^3y$, und daraus $y = \frac{1-9p^2}{p^3}$, das ist $y = \frac{19 \cdot 9 \cdot 27}{1000}$, oder $y = \frac{4617}{10000}$, und $x = \frac{383}{1000}$; hieraus wird unsere Formel

Formel

Formel $2 + x^2 = \frac{2146688}{1000000}$, wovon die Cubikwurzel $3 + py = \frac{128}{1000}$ seyn muß.

§. 155.

Man betrachte ferner die Formel $1 + x^3$, ob diese ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbaren Fällen $x = 0$ und $x = -1$. Ob nun gleich diese Formel zum dritten Fall gehört, so hilft uns doch die Wurzel $1 + x$ nichts, weil der Cubus davon $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x + 3x^2 = 0$ oder $x(1 + x) = 0$ giebt, das ist entweder $x = 0$ oder $x = -1$.

Will man ferner $x = -1 + y$ setzen, so bekommen wir die Formel $3y - 3y^2 + y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Fall gehört; setzt man daher die Cubikwurzel $p + y$, wovon der Cubus $p^3 + 3p^2y + 3py^2 + y^3$ ist, und macht $-3 = 3p$, oder $p = -1$, so geben die übrigen $3y = p^3 + 3p^2y = -1 + 3y$, folglich $y = \frac{1}{0}$, das ist unendlich; woraus also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergeblich, um noch andere Werthe für x zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann, daß die Formel $1 + x^3$, außer in den angegebenen Fällen, niemals ein Cubus werden kann; denn wir haben gezeigt, daß die Summe von zweyen Cubis, als $t^3 + x^3$, niemals ein Cubus werden kann, daher ist es auch in dem Fall $t = 1$ nicht möglich.

§. 156.

Man behauptet auch, daß $2 + x^3$ kein Cubus werden könne, außer in dem Falle $x = -1$. Diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht, weil die mittlern Glieder fehlen.

Setzt

Von der Formel $\sqrt[3]{a + bx + cx^2 + dx^3}$. 285

Setzt man aber $x = -1 + y$, so bekommt man die Formel $1 + 3y - 3y^2 + y^3$, welche nach allen drey Fällen behandelt werden kann. Setzt man nach dem ersten die Wurzel $1 + y$, von welcher der Cubus $1 + 3y + 3y^2 + y^3$ ist, so wird $-3y^2 = 3y^2$, welches nur geschieht, wenn $y = 0$ ist. Setzt man nach dem zweyten Falle die Wurzel $-1 + y$, wovon der Cubus $-1 + 3y - 3y^2 + y^3$, so wird $1 + 3y = -1 + 3y$ und $y = \frac{2}{0}$, welches unendlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel $1 + y$ setzen, welches schon geschehen ist.

§. 157.

Es sey die Formel $3 + 3x^3$ gegeben, welche ein Cubus werden soll. Dieses geschieht nun zuerst in dem Falle $x = -1$, woraus aber nichts geschlossen werden kann, hernach aber auch in dem Falle $x = 2$; man setze deswegen $x = 2 + y$, so kommt die Formel $27 + 36y + 18y^2 + 3y^3$ heraus, welche zum ersten Fall gehört. Daher sey die Wurzel $3 + py$, von welcher der Cubus $27 + 27py + 9p^2y^2 + p^3y^3$ ist. Man mache also $36 = 27p$, oder $p = \frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder, durch y^2 dividirt, $18 + 3y = 9p^2 + p^3y = 16 + \frac{64}{3}y$, oder $\frac{1}{2}y = -2$, daher $y = -\frac{5}{2}$, folglich $x = -\frac{1}{2}$. Hieraus wird unsere Formel $3 + 3x^3 = -\frac{27}{8}$, wovon die Cubikwurzel $3 + py = \frac{3}{2}$ ist; und aus diesem Werthe könnte man noch mehrere finden, wenn man wollte.

§. 158.

Wir wollen zuletzt noch die Formel $4 + x^2$ betrachten, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nemlich wenn $x = 2$ und $x = 11$ ist. Setzt man nun zuerst $x = 2 + y$, so muß die For-

mel

mel $8 + 4y + y^2$ ein Cubus seyn. Die Wurzel davon sey $2 + \frac{1}{3}y$, und also die Formel $= 8 + 4y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{27}y^3$; hieraus erhält man $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}y$, daher $y = 9$ und $x = 11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x = 11 + y$, so bekommt man $125 + 22y + y^2$, welches dem Cubus von $5 + py$, das ist $125 + 75py + 15p^2y^2 + p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p = \frac{2}{3}$ genommen, giebt $1 = 15p^2 + p^3y^3$ oder $p^3y^3 = 1 - 15p^2 = -\frac{108}{27}$; daher $y = -\frac{122625}{10648}$, und also $x = -\frac{5427}{10648}$.

Weil x sowohl negativ als positiv seyn kann, so setze man $x = \frac{2+2y}{1-y}$, so wird unsere Formel $\frac{8+8y^3}{(1-y)^2}$, welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1-y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und dann bekommt man

$\frac{8-8y+8y^2-8y^3}{(1-y)^2}$, wo also nur noch der Zähler $8-8y+8y^2-8y^3$, oder eben derselbe, durch 8 dividirt, nemlich $1-y+y^2-y^3$ zu einem Cubus gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, von welcher der Cubus $1 - y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{27}y^3$ ist, so wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$, daher $y = \frac{9}{13}$, folglich $1 + y = \frac{22}{13}$ und $1 - y = \frac{4}{13}$, folglich $x = 11$, wie vorher.

Nach der andern Art, wenn man die Wurzel $= \frac{1}{3} - y$ annehmen wollte, so findet man eben dasselbe.

Nach der dritten Art, wenn man die Wurzel $1 - y$ annimmt, von welcher der Cubus $1 - 3y + 3y^2 - y^3$ ist, so bekommt man $-1 + y = -3 + 3y$, und also $y = 1$, folglich $x = \frac{4}{0}$, d. i. unendlich;

Von der Formel $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + dx^3)}$. 287

endlich; daher wird auf diese Art nichts neues gefunden.

§. 159.

Weil wir aber schon die zwey Fälle $x = 2$ und $x = 11$ kennen, so kann man $x = \frac{2+11y}{1+y}$ annehmen, denn ist $y = 0$, so wird $x = 2$, ist aber y unendlich groß, so wird $x = \pm 11$.

Es sey daher zuerst $x = \frac{2+11y}{1+y}$, so wird unsere Formel $4 + \frac{4+44y+121y^2}{1+2y+y^2}$ oder $\frac{8+52y+125y^2}{(1+y)^2}$; man multiplicire oben und unten mit $1+y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zähler, welcher $8+60y+177y^2+125y^3$ seyn wird, zu einem Cubus gemacht werden soll.

Man setze daher zuerst die Wurzel $= 2 + 5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder, sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze also nach der zweiten Art die Wurzel $p + 5y$, wovon der Cubus $p^3 + 15p^2y + 75py^2 + 125y^3$ ist, und mache $177 = 75p$, oder $p = \frac{59}{25}$, so wird $8 + 60y = p^3 + 15p^2y$, daher $-\frac{2043}{125}y = \frac{80379}{307875}$ und $y = \frac{80379}{307875}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch $x = \frac{2+11y}{1-y}$ setzen, und dann wird unsere Formel $1 + \frac{4+44y+121y^2}{1-2y+y^2} = \frac{8+36y+125y^2}{(1-y)^2}$, wovon der Zähler, mit $1-y$ multiplicirt, ein Cubus wird. Also muß auch $8+28y+89y^2-125y^3$ ein Cubus werden.

Sehen

Sehen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $= 2 + \frac{7}{3}y$, von welcher der Cubus $8 + 28y + \frac{28}{3}y^2 + \frac{343}{27}y^3$ ist, so wird $89 - 125y = \frac{28}{3} + \frac{343}{27}y$, oder $\frac{371}{27}y = \frac{155}{3}$, und also $y = \frac{155 \cdot 27}{3 \cdot 371} = \frac{27}{21}$; folglich $x = 11$, welches der schon bekannte Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2 - 5y$, deren Cubus $8 - 60y + 150y^2 - 125y^3$ ist, so erhalten wir $28 + 89y = -60 + 150y$, folglich $y = \frac{88}{62}$, woraus $x = -\frac{1000}{27}$ gefunden wird, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus von $\frac{106}{9}$ ist.

§. 160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Verfahrensarten, wodurch eine solche Formel entweder zu einem Quadrat oder zu einem Cubus gemacht werden kann, wenn nur in jenem Falle die höchste Potenz der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in dem letztern Falle aber den dritten nicht übersteigt.

Man könnte noch den Fall hinzufügen, wo eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potenz die zweite nicht übersteigen muß. Wenn aber eine solche Formel, wie $a + bx + cx^2$, ein Biquadrat seyn soll, so muß sie vor allen Dingen zu einem Quadrate gemacht werden, wo alsdaun nur noch übrig ist, daß die Wurzel von diesem Quadrate noch ferner zu einem Quadrate gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also wenn z. B. $x^2 + 7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrate, welches geschieht, wenn $x = \frac{7p^2 - q^2}{2pq}$, oder auch $x = \frac{q^2 - 7p^2}{2pq}$; alsdann wird unsere Formel gleich dem Quadrate $\frac{q^4 - 14q^2p^2 + 49p^4}{4p^2q^2} + 7$

+ 7 = $\frac{q^4 + 14q^2p^2 + 49p^4}{4p^2q^2}$, von welchem die Wurzel $\frac{7p^2 + q^2}{2pq}$ ist, welche noch zu einem Quadrate gemacht werden muß; man multiplicire daher oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdann wird der Zähler $2pq(7p^2 + q^2)$ ein Quadrat seyn müssen, welches nicht anders geschehen kann, als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu dem Ende $q = pz$ annehmen, damit die Formel $2p^2z(7p^2 + p^2z^2) = 2p^4z(7 + z^2)$ und also auch durch p^4 dividirt, nemlich diese $2z(7 + z^2)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z = 1$, daher setze man $z = 1 + y$, so bekommen wir $(2 + 2y)(8 + 2y + y^2) = 16 + 20y + 6y^2 + 2y^3$, wovon die Wurzel $4 + \frac{5}{2}y$ sey, davon das Quadrat $16 + 20y + \frac{25}{4}y^2$, und unserer Formel gleich gesetzt, giebt $6 + 2y = \frac{25}{4}$, $y = \frac{5}{8}$ und $z = \frac{13}{8}$; da nun $z = \frac{q}{p}$, so wird $q = 13$ und $p = 8$, daher $x = \frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7 + x^2 = \frac{2707841}{20735}$, davon ist zuerst die Quadratwurzel $\frac{520}{144}$, und hiervon nochmals die Quadratwurzel $\frac{13}{8}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

§. 161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln giebt, welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubus gemacht werden können; denn wenn z. B. cx^2 ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon = px , und dann wird $cx^2 = p^3x^3$ oder $c = p^3x$, daher $x = \frac{c}{p^3}$; man schreibe $\frac{1}{q}$ statt p , so wird $x = cq^3$.

II. Theil.

2

Der

Der Grund hiervon ist offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält, daher auch alle dergleichen Formeln $a(b + cx)^2$ oder $ab^2 + 2abcx + ac^2x^2$ ganz leicht zu einem Cubus gemacht werden können; denn man setze die Cubicwurzel davon $= \frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b + cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt, $a = \frac{b+cx}{q^3}$ giebt, daraus $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellt, wie höchst nützlich es sey, die gegebene Formel in ihre Factoren aufzulösen, so oft als es geschehen kann. Wir wollen von dieser Materie umständlicher in dem folgenden Capitel handeln.

XI. Capitel.

Von der Auflösung der Formel
 $ax^2 + bxy + cy^2$
 in Factoren.

§. 162.

Es bedeuten hier die Buchstaben x und y nur allein ganze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisher vorgetragenen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte, gesehen, wie die Frage immer auf ganze Zahlen gebracht werden kann. Denn wenn z. B. die gesuchte Zahl x ein Bruch ist, so darf man nur $x = \frac{t}{u}$ setzen, wo dann für t und u immer ganze Zahlen