Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XI. Capitel. Von der Auflösung der Formel $ax^2+bxy+cy^2$ in Factoren.

Der Grund hiervon ist offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält, daher auch alle dergleichen Formeln $a(b + cx)^2$ oder $ab^2 + 2abcx + ac^2x^2$ ganz leicht zu einem Cubus gemacht werden können; denn man setze die Cubicwurzel davon $= \frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b + cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt, $a = \frac{b+cx}{q^3}$ giebt, daraus $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellt, wie höchst nützlich es sey, die gegebene Formel in ihre Factoren aufzulösen, so oft als es geschehen kann. Wir wollen von dieser Materie umständlicher in dem folgenden Capitel handeln.

XI. Capitel.

Von der Auflösung der Formel $ax^2 + bxy + cy^2$ in Factoren.

§. 162.

Es bedeuten hier die Buchstaben x und y nur allein ganze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisher vorgetragenen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte, gesehen, wie die Frage immer auf ganze Zahlen gebracht werden kann. Denn wenn z. B. die gesuchte Zahl x ein Bruch ist, so darf man nur $x = \frac{t}{u}$ setzen, wo dann für t und u immer ganze

Zahlen

Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und y nur ganze Zahlen, und ehe wir zeigen können, wie sie zu einem Quadrate, oder Cubus, oder einer noch höhern Potenz gemacht werden soll, so ist noch nöthig zu untersuchen, welche Werthe man den Buchstaben x und y geben soll, so daß diese Formel zwey oder mehrere Factoren erhalte.

§. 163.

Hier kommen nun drey Fälle in Betrachtung, zuerst der, wenn sich diese Formel wirklich in zwey rationale Factoren auflösen läßt; dieses geschieht, wie wir schon oben gezeigt haben, wenn $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl wird.

Der zweyte Fall ist, wenn diese beyden Factoren einander gleich werden, in welchem Falle die Formel selbst ein wirkliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wenn sich diese Formel nicht anders, als in irrationale Factoren auflösen läßt, sie mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht, wenn $b^2 - 4ac$ eine positive Zahl, aber kein Quadrat ist, dieses aber, wenn $b^2 - 4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle, welche wir hier zu betrachten haben.

§. 164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factoren auflösen, so läßt sie sich auf folgende Art vorstellen: $(fx + gy)(hx + ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factoren in sich schließt. Will man aber, daß sie auf eine allgemeine Art mehrere Factoren in sich schließe, so darf man nur $fx + gy = pq$ und $hx + ky = rs$ setzen, da dann unsere Formel dem Producte $pqrs$ gleich wird, und also vier Factoren in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehrt werden könnte. Hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth, nemlich $x = \frac{pq - gy}{f}$ und $x = \frac{rs - ky}{h}$, woraus $hpq - hgy = frs - fky$ gefunden wird, und also $y = \frac{frs - hqp}{fk - hg}$ und $x = \frac{kpq - grs}{fk - hg}$. Damit nun x und y in ganzen Zahlen ausgedrückt werde, so müssen die Buchstaben p, q, r, s so angenommen werden, daß sich der Zähler durch den Nenner wirklich theilen lasse; dieses geschieht, wenn sich entweder p und r oder q und s dadurch theilen lassen.

§. 165.

Um dieses zu erläutern, so sey die Formel $x^2 - y^2$ gegeben, welche aus folgenden Factoren besteht: $(x + y)(x - y)$; soll diese nun noch mehrere Factoren haben, so setze man $x + y = pq$ und $x - y = rs$, so bekömmt man $x = \frac{pq + rs}{2}$ und $y = \frac{pq - rs}{2}$. Damit nun dieses ganze Zahlen werden, so müssen die beyden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerade oder beyde ungerade seyn.

Es sey z. B. $p = 7$, $q = 5$, $r = 3$ und $s = 1$, so wird $pq = 35$ und $rs = 3$, folglich $x = 19$ und $y = 16$; daher entspringt $x^2 - y^2 = 105$, welche Zahl wirklich aus den Factoren 7. 5. 3. 1. besteht; also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

§. 166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factoren in sich schließt und daher auf folgende Art vorgestellt werden kann: $(fx + gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann, als die aus der Wurzel $fx + gy$ entstehen. Nimmt man also $fx + gy = pqr$ an, so wird unsere Formel $p^2q^2r^2$, und kann also so viel Factoren haben, als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserm Belieben frey gestellt. Denn man bekömmt $x = \frac{pqr - gy}{f}$, wo y leicht so angenommen werden kann, daß der Bruch wegfällt. Die leichteste Formel von dieser Art ist x^2, nimmt man $x = pqr$, so schließt das Quadrat x^2 drey quadratische Factoren in sich, nemlich p^2, q^2 und r^2.

§. 167.

Aber mit weit größern Schwierigkeiten ist der dritte Fall verknüpft, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und hier erfordert es besondere Kunstgriffe, für x und y solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern, so merke man, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlt; man darf nemlich nur $x = \frac{z - by}{2a}$ setzen, wo denn die folgende Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{z^2 - 2byz + b^2y^2}{4a} + \frac{byz - b^2y^2}{2a} + cy^2 = \frac{z^2 + (4ac - b^2)y^2}{4a}$$

Wir wollen daher sogleich das mittlere Glied weglassen und die Formel $ax^2 + cy^2$ betrachten, wobey es darauf ankömmt, welche Werthe man den Buchstaben x und y beylegen soll, damit diese Formel Factoren erhalte. Es ist leicht einzusehen, daß dieses von der Natur der Zahlen a und c abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

§. 168.

Es sey also zuerst die Formel $x^2 + y^2$ gegeben, welche alle Zahlen in sich begreift, die eine Summe zweyer Quadrate sind, und von welchen wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

unter welchen sich einige Primzahlen befinden, die keine Theiler haben, als: 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41. Die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, welche Werthe man den Buchstaben x und y geben müsse, daß die Formel $x^2 + y^2$ Theiler oder Factoren habe und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschließen, wo x und y einen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben, weil alsdann $x^2 + y^2$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen lassen. Denn wäre z. B. $x = 7p$ und $y = 7q$, so würde die Summe ihrer Quadrate $49p^2 + 49q^2 = 49(p^2 + q^2)$ sich gar durch 49 theilen lassen. Daher geht die Frage nur auf solche Formeln, wo x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben oder unter sich untheilbar sind. Die Schwierigkeit fällt hier bald in die Augen; denn wenn man gleich einsieht, daß, wenn die beyden Zahlen x und y ungerade

rade sind, alsdann die Formel $x^2 + y^2$ eine gerade Zahl und also durch 2 theilbar werde; ungerade hingegen, wenn die eine Zahl gerade, die andere ungerade ist, so ist doch nicht leicht einzusehen, ob sie Theiler habe oder nicht? Beyde Zahlen x und y können aber nicht gerade seyn, weil sie keinen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben müssen.

§. 169.

Es seyen daher die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar, und dennoch soll die Formel $x^2 + y^2$ zwey oder mehrere Factoren in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt; allein die irrationalen Factoren, in welche diese Formel aufgelöset wird und durch folgendes Product vorgestellt werden können: $(x + y\sqrt{-1}).(x - y\sqrt{-1})$ können uns eben denselben Dienst leisten; denn wenn die Formel $x^2 + y^2$ wirkliche Factoren hat, so müssen die irrationalen Factoren wiederum Factoren haben, indem, wenn diese Factoren keine weitern Theiler hätten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factoren irrational, ja sogar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen, so können sie keine rationale Factoren haben, sondern sie müssen irrational und sogar imaginär von gleicher Art seyn.

§. 170.

Will man also, daß die Formel $x^2 + y^2$ zwey rationale Factoren bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factoren, und nehme $x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(r + s\sqrt{-1})$, und dann wird, weil $\sqrt{-1}$ sowohl negativ als

 positiv

positiv genommen werden kann, von selbst $x - y\sqrt{-1} = (p - q\sqrt{-1})(r - s\sqrt{-1})$ seyn, so daß das Product davon, das ist unsere Formel, seyn wird: $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$, und diese folglich zwey rationale Factoren enthält, nemlich $p^2 + q^2$ und $r^2 + s^2$. Hier ist aber noch übrig die Werthe von x und y zu bestimmen, welche nemlich auch rational seyn müssen.

Wenn man nun jene irrationale Factoren mit einander multiplicirt, so bekömmt man $x + y\sqrt{-1} = pr - qs + ps\sqrt{-1} + qr\sqrt{-1}$, und $x - y\sqrt{-1} = pr - qs - qr\sqrt{-1} - ps\sqrt{-1}$. Addirt man diese Formeln, so wird $x = pr - qs$; subtrahirt man sie aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1} = 2ps\sqrt{-1} + 2qr\sqrt{-1}$, oder $y = ps + qr$.

Nimmt man also $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, so erhält unsere Formel $x^2 + y^2$ gewiß zwey Factoren, indem $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$ herauskömmt. Verlangte man mehr Factoren, so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $p^2 + q^2$ zwey Factoren hätte, und alsdann hätte man in allem drey Factoren, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben noch vermehrt werden kann.

§. 171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden; nimmt man z. B. q negativ, so wird $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summe der Quadrate eben dieselbe ist als vorher; daraus ersehen wir, daß, wenn eine Zahl einem solchen Producte, wie $(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$ gleich ist, diese auf eine doppelte Art in zwey Quadrate zerlegt werden könne, indem man zuerst $x = pr - qs$

und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$ gefunden hat.

Es sey z. B. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$ und $s = 1$, so daß folgendes Product heraus käme: $13 . 5 = 65 = x^2 + y^2$, wo dann entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$ seyn wird; in beyden Fällen aber ist $x^2 + y^2 = 65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summe zweyer Quadratzahlen seyn. Man multiplicire z. B. $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$ mit einander, so kömmt 1105, welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadrate zerlegt werden kann:
I.) $33^2 + 4^2$, II.) $32^2 + 9^2$, III.) $31^2 + 12^2$, IV.) $24^2 + 23^2$.

§. 172.

Unter den Zahlen, die in der Form $x^2 + y^2$ enthalten sind, befinden sich also zuerst solche, die aus zwey oder mehreren dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammen gesetzt sind; hernach aber auch solche, welche nicht auf diese Art zusammen gesetzt sind; diese wollen wir einfache Zahlen von der Form $x^2 + y^2$ nennen, jene aber zusammengesetzte. Daher werden die einfachen Zahlen dieser Art seyn:

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 u. s. f.

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nemlich Primzahlen, oder solche, welche gar keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, und welche alle, außer 2, so beschaffen sind, daß, wenn man 1 davon wegnimmt, das übrige durch 4 theilbar werde, oder welche alle in der Form $4n + 1$ enthalten sind. Hernach sind auch Quadratzahlen vorhanden 9, 49 u. s. f., deren Wurzeln aber

3, 7 u. s. f. nicht vorkommen; wobey zu merken ist, daß diese Wurzeln 3, 7 u. s. f. in der Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbar, daß keine Zahl von der Form $4n-1$ eine Summe zweyer Quadrate seyn könne. Denn da diese Zahlen ungerade sind, so müßte das eine der beyden Quadrate gerade, das andere aber ungerade seyn. Wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadrate durch 4 theilbar, die ungeraden aber in der Form $4n+1$ enthalten sind. Wenn man daher ein gerades und ein ungerades Quadrat zusammen addirt, so bekömmt die Summe immer die Form $4n+1$, nie aber die Form $4n-1$. Daß aber alle Primzahlen von der Form $4n+1$ Summen von zweyen Quadraten sind, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.

§. 173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel x^2+2y^2 betrachten, um zu sehen, welche Werthe x und y haben müssen, damit dieselbe Factoren erhalte. Da nun diese Formel durch folgende imaginären Factoren vorgestellt wird: $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, so ersieht man, wie vorher, daß, wenn unsere Formel Factoren hat, auch ihre imaginären Factoren dergleichen haben müssen. Man setze daher erst $x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2})$, so folgt von selbst, daß auch $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$ seyn müsse, und hieraus wird unsere Formel $x^2+2y^2=(p^2+2q^2)(r^2+2s^2)$, und hat also zwey Factoren, von welchen so gar ein jeder von eben derselben Art ist. Damit dieses aber geschehe, so müssen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches auf folgende Art geschehen kann:

Denn da $x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$ und $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, so ist die Summe $2x = 2pr - 4qs$; folglich $x = pr - 2ps$. Hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$, daher $y = qr + ps$. Wenn also unsere Formel $x^2 + 2y^2$ Factoren haben soll, so sind sie immer so beschaffen, daß der eine $p^2 + 2q^2$ und der andere $r^2 + 2s^2$ seyn wird, oder sie sind beyde Zahlen von eben der Art, als $x^2 + 2y^2$; und damit dieses geschehe, so können x und y wieder auf zweyerley Arten bestimmt werden, weil q sowohl negativ als positiv genommen werden kann. Man hat nemlich zuerst $x = pr - 2qs$ und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + 2qs$ und $y = ps - qr$.

§. 174.

Die Formel $x^2 + 2y^2$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrate und einem doppelten Quadrate bestehen, und welche wir hier bis auf 50 anführen wollen, als: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50. Diese lassen sich wieder, wie vorher, in einfache und zusammengesetzte abtheilen, und dann werden die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, welche alle, außer den Quadraten 25 und 49 Primzahlen sind. Von allen denen aber, die hier nicht stehen, kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemerken, daß alle Primzahlen, die in unserer Formel enthalten sind, entweder zu der Form $8n + 1$ oder zu der $8n + 3$ gehören, da hingegen die übrigen, welche entweder zu der Form $8n + 5$ oder zu der $8n + 7$ gehö-

gehören, niemals aus einem Quadrate und einem doppelten Quadrate bestehen können. Es ist aber auch gewiß, daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beyden Formeln $8n + 1$ und $8n + 3$ enthalten sind, sich jedesmal in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen lassen.

§ 175.

Wir wollen nun auf gleiche Weise zu der allgemeinen Formel $x^2 + cy^2$ fortgehen, und sehen, welche Werthe man x und y geben muß, damit diese Formel Factoren erhalte.

Da nun diese durch das Product $(x + y\sqrt{-c})$ $(x - y\sqrt{-c}$ vorgestellt wird, so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factoren von gleicher Art; man setze nemlich $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c})$, und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-c})$. Nunmehr wird unsere Formel: $x^2 + cy^2 = (p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2)$ werden, woraus erhellt, daß die Factoren wieder von eben der Art, als die Formel selbst, seyn werden. Die Werthe aber von x und y werden sich folgender maaßen verhalten: $x = pr + cqs$ und $y = qr + ps$, oder $y = ps - qr$, und hieraus läßt sich leicht ersehen, wie unsere Formel noch mehrere Factoren erhalten könne.

§. 176.

Nun ist es auch leicht, der Formel $x^2 - cy^2$ Factoren zu verschaffen, weil man nur $-c$ statt $+c$ schreiben darf. Indessen lassen sich diese auch unmittelbar auf folgende Art finden: da unsere Formel dem Producte $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$ gleich ist, so setze man $x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})$ $(r + s$

$(r + s\sqrt{c})$ und $x - y\sqrt{c}\,(p - q\sqrt{c})$ $(r - s\sqrt{c})$, woraus sogleich die Factoren $x^2 - cy^2 = (p^2 - cq^2)(r^2 - cs^2)$ entstehen, welche wieder von eben der Art, als unsere Formel selbst sind. Die Werthe aber von x und y lassen sich auch wieder auf eine doppelte Art bestimmen, nemlich zuerst $x = pr + cqs$, $y = qr + ps$, und hernach auch $x = pr - cqs$ und $y = ps - qr$. Will man die Probe machen, ob so das gefundene Product herauskomme, so probire man die ersten Werthe, wo dann $x^2 = p^2r^2 + 2cpqrs + c^2q^2s^2$ und $y = p^2s^2 + 2pqrs + q^2r^2$ seyn wird, also $cy^2 = cp^2s^2 + 2cpqrs + cq^2r^2$, woraus man $x^2 - cy^2 = p^2r^2 - cp^2s^2 + c^2q^2s^2 - cq^2r^2$ erhält, welches mit dem gefundenen Producte $(p^2 - cq^2)(r^2 - cs^2)$ übereinkömmt.

§. 177.

Bis hieher haben wir das erste Glied ohne Coefficienten betrachtet; nun wollen wir annehmen, daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen, was die Formel $ax^2 + cy^2$ für Factoren erhalten könne.

Hier ist nun klar, daß unsere Formel dem Producte $(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c})$ gleich sey, welchen beyden Factoren daher wieder Factoren gegeben werden müssen. Hierbey aber zeigt sich eine Schwierigkeit. Denn wenn man nach der obigen Art $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) = apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c}) = apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$ annehmen wollte, woraus man $2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs$, und $2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac}$ erhielte, so würde man sowohl für x als y irrationale

Werthe finden, welche hier gar nicht Statt finden.

§. 178.

Dieser Schwierigkeit aber kann man abhelfen, wenn man $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c}$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - aps\sqrt{-c}$ annimmt; woraus nun für x und y die rationalen Werthe $x = pr - cqs$ und $y = qr + aps$ gefunden werden, alsdann aber wird unsere Formel die Factoren $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)(r^2 + acs^2)$ bekommen, von welchen nur einer eben dieselbe Form hat, als unsere Formel, der andere aber von einer ganz verschiedenen Art ist.

§. 179.

Aber es stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandschaft mit einander, indem alle Zahlen, welche in der ersten Form enthalten sind, wenn sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wieder in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $x^2 + acy^2$, welche nemlich mit der obigen $x^2 + cy^2$ übereinkömmt, mit einander multiplicirt, wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Es ist also nur noch zu untersuchen, wenn zwey Zahlen von der ersten Form $ax^2 + cy^2$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehöre.

Wir wollen daher folgende zwey Formeln von der ersten Art $(ap^2 + cq^2)(ar^2 + cs^2)$ mit einander multipliciren, und da ist leicht einzusehen, daß

daß ihr Product auf folgende Art vorgestellt werden könne: $(apr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr + cqs = x$ und $ps - qr = y$, so bekommen wir die Formel $x^2 + acy^2$, welche von der letzten Art ist; daher denn zwey Zahlen von der erstern Art $ax^2 + cy^2$ mit einander multiplicirt, eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kurz so vorstellen kann; die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der zweyten Art aber durch II andeuten. Nemlich I. I giebt II; I. II giebt I; II. II giebt II, woraus auch ferner erhellt, was heraus kommen müsse, wenn man mehrere solche Zahlen mit einander multiplicirt, als I. I. I giebt I; I. I. II giebt II; I. II. II giebt I; II. II. II giebt II.

§. 180.

Um dieses zu erläutern, so sey $a = 2$ und $c = 3$, woraus folgende zwey Arten von Zahlen entstehen, die erste ist in der Form $2x^2 + 3y^2$, die andere aber in der Form $x^2 + 6y^2$ enthalten. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Nehmen wir nun eine Zahl von der ersten Art, z. B. 35, und multipliciren sie mit einer von der zweyten Art 31, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2x^2 + 3y^2$ enthalten ist; oder man kann für y eine solche Zahl finden, daß $1085 - 3y^2$ ein doppeltes Quadrat, nemlich $2x^2$ werde. Dieses geschieht nun erstlich, wenn $y = 3$, denn alsdann wird $x = 23$; hernach auch, wenn

$y = 11$,

$y = 11$, denn alsdann wird $x = 19$; drittens auch noch, wenn $y = 13$, denn da wird $x = 17$, und endlich viertens, wenn $y = 19$, denn alsdann wird $x = 1$. Man kann diese beyden Arten von Zahlen wieder in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind, welche aus zwey oder mehreren kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen. Es werden also von der ersten Art folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29; zusammengesetzt hingegen sind folgende: 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, u. s. f. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach: 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt, nemlich: 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

XII. Capitel.

Von der Verwandlung der Formel $ax^2 + cy^2$ in Quadrate oder auch in höhere Potenzen.

§. 181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von der Form $ax^2 + cy^2$ oft durchaus nicht zu Quadraten gemacht werden können; so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden, in welcher $a = 1$ ist. Z. B. die Form $2p^2 - q^2$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch auf folgende Art vorstellen: $(2p + q)^2 - 2(p + q)^2$. Nimmt man nun $2p + q = x$ und $p + q = y$ an, so kömmt die Formel $x^2 - 2y^2$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben eine

solche