Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XII. Capitel. Von der Verwandlung der Formel ax^2+cy^2 in Quadrate oder auch in höhere Potenzen.

$y = 11$, denn alsdann wird $x = 19$; drittens auch noch, wenn $y = 13$, denn da wird $x = 17$, und endlich viertens, wenn $y = 19$, denn alsdann wird $x = 1$. Man kann diese beyden Arten von Zahlen wieder in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind, welche aus zwey oder mehreren kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen. Es werden also von der ersten Art folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29; zusammengesetzt hingegen sind folgende: 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, u. s. f. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach: 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt, nemlich: 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

XII. Capitel.

Von der Verwandlung der Formel $ax^2 + cy^2$ in Quadrate oder auch in höhere Potenzen.

§. 181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von der Form $ax^2 + cy^2$ oft durchaus nicht zu Quadraten gemacht werden können; so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden, in welcher $a = 1$ ist. Z. B. die Form $2p^2 - q^2$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch auf folgende Art vorstellen: $(2p + q)^2 - 2(p + q)^2$. Nimmt man nun $2p + q = x$ und $p + q = y$ an, so kömmt die Formel $x^2 - 2y^2$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben eine solche

solche Verwandlung findet auch jedesmal Statt, so oft es nemlich möglich ist, dergleichen Formeln zu einem Quadrate zu machen.

Wenn daher die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Quadrate oder einer andern höhern geraden Potenz gemacht werden soll, so können wir sicher $a = 1$ annehmen, und die übrigen Fälle als unmöglich ansehen.

§. 182.

Es sey daher die Formel $x^2 + cy^2$ vorgelegt, welche zu einem Quadrate gemacht werden soll. Da diese nun aus den Factoren $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$ besteht, so müssen diese entweder Quadrate, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Denn wenn das Product zweyer Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. B. pq, so wird erfordert, daß entweder $p = r^2$ und $q = s^2$, das ist, daß ein jeder Factor für sich ein Quadrat sey, oder daß $p = mr^2$ und $q = ms^2$ sey, das ist, daß die Factoren Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyen; deswegen nehme man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$ an, so wird von selbst $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$, daher bekommen wir $x^2 + cy^2 = m^2(p^2 + cq^2)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, so haben wir die Gleichungen $x + y\sqrt{-c} = mp^2 + 2mpq\sqrt{-c} - mcq^2$ und $x - y\sqrt{-c} = mp^2 - 2mpq\sqrt{-c} - mcq^2$, wo sich deutlich zeigt, daß x dem rationalen Theile, $y\sqrt{-c}$ aber dem irrationalen Theile gleich seyn muß; daher wird $x = mp^2 - mcq^2$, und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Nimmt man also $x = mp^2 - mcq^2$ und $y = 2mpq$ an, so wird unsere Formel $x^2 + cy^2$ ein

Quadrat, nemlich $m^2(p^2 + cq^2)^2$, von welchem die Wurzel $mp^2 + mcq^2$ ist.

§. 183.

Sollen die zwey Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn, oder keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wenn daher $x^2 + cy^2$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x = p^2 - cq^2$ und $y = 2pq$, wo denn diese Formel dem Quadrate $p^2 + cq^2$ gleich wird. Statt daß man $x = p^2 - cq^2$ annimmt, so kann man auch $x = cq^2 - p$ setzen, weil auf beyden Seiten das Quadrat x^2 einerley wird. Dieses ist nun eben diejenige Formel, die wir schon oben aus ganz andern Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätigt wird.

Denn nach der vorigen Methode, wenn $x^2 + cy^2$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$, und dann bekömmt man $x^2 + cy^2 = x^2 + \frac{2pxy}{q} + \frac{p^2y^2}{q^2}$, wo sich die x^2 aufheben; die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit q^2 multiplicirt, geben $cq^2y = 2pqx + p^2y$, oder $cq^2y - p^2y = 2pqx$; man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y} = \frac{cq^2 - p^2}{2pq}$. Da aber x und y untheilbar seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zähler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x = cq^2 - p^2$ und $y = 2pq$, wie vorher.

§. 184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbst Factoren, als

als z. B. wenn die gegebene Formel $x^2 + acy^2$ wäre, welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche $x = acq^2 - p^2$ und $y = 2pq$ giebt, sondern auch noch diese: $x = cq^2 - ap^2$ und $y = 2pq$; denn da wird ebenfalls $x^2 + acy^2 = c^2q^4 + 2acp^2q^2 + a^2p^4 = (cq^2 + ap^2)^2$, welches auch geschieht, wenn man $x = ap^2 - cq^2$ annimmt, weil das Quadrat x^2 in beyden Fällen einerley herauskömmt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode auf folgende Art gefunden. Man setze $x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2$, und $x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2$, damit herauskomme: $x^2 + acy^2 = (ap^2 + cq^2)^2$, und also gleich einem Quadrat; alsdann aber wird $x + y\sqrt{-ac} = ap^2 + 2pq\sqrt{-ac} - cq^2$ und $x - y\sqrt{-ac} = ap^2 - 2pq\sqrt{-ac} - cq^2$, woraus folgt $x = ap^2 - cq^2$ und $y = 2pq$. Läßt sich also die Zahl ac auf mehrere Arten in zwey Factoren zertheilen, so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

§. 185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und zuerst die Formel $x^2 + y^2$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac = 1$ ist, so nehme man $x = p^2 - q^2$ und $y = 2pq$, so wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^2$.

Soll zweytens die Formel $x^2 - y^2$ ein Quadrat werden, so ist $ac = -1$; man nehme also $x = p^2 + q^2$ und $y = 2pq$, wo dann $x^2 - y^2 = (p^2 - q^2)^2$ wird.

Soll drittens die Formel $x^2 + 2y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = 2$ ist, so nehme man $x = p^2 - 2q^2$, oder $x = 2p^2 - q^2$ und $y = 2pq$, und dann wird $x^2 + 2y^2 = (p^2 + 2q^2)^2$, oder $x^2 + 2y^2 = (2p^2 + q^2)^2$.

Soll viertens die Formel $x^2 - 2y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = -2$ ist, so nehme man $x = p^2 + 2q^2$ und $y = 2pq$, wo man dann $x^2 - 2y^2 = (p^2 - 2q^2)^2$ erhält.

Soll fünftens die Formel $x + 6y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = 6$, und also entweder $a = 1$ und $c = 6$, oder $a = 2$ und $c = 3$ ist; so kann man erstlich $x = p^2 - 6q^2$ und $y = 2pq$ annehmen, wo dann $x^2 + 6y^2 = (p^2 + 6q^2)^2$ ist. Hernach kann man auch $x = 2p^2 - 3q^2$ und $y = 2pq$ setzen, wo dann $x^2 + 6y^2 = (2p^2 + 3q^2)^2$ ist.

§. 186.

Sollte aber die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Quadrate gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne, wofern nicht schon ein Fall bekannt ist, in welchem diese Formel wirklich ein Quadrat werde. Dieser bekannte Fall sey daher, wenn $x = f$ und $y = g$ ist, so daß $af^2 + cg^2 = h^2$ ist; und alsdann kann unsere Formel in eine andere von dieser Art $t^2 + acu^2$ verwandelt werden, wenn man $t = \frac{afx + cgy}{h}$ und $u = \frac{gx - fy}{h}$ setzt; denn da wird $t^2 = \frac{a^2f^2x^2 + 2acfgxy + c^2g^2y^2}{h^2}$ und $u^2 = \frac{g^2x^2 - 2fgxy + f^2y^2}{h^2}$, woraus folgt, daß $t^2 + acu^2 = \frac{a^2f^2x^2 + c^2g^2y^2 + acg^2x^2 + acf^2y^2}{h^2} = \frac{ax^2(af^2 + cg^2) + cy^2(af^2 + eg^2)}{h^2}$ ist; da nun $af^2 + cg^2 = h^2$, so wird $t^2 + acu^2 = ax^2 + cy^2$, und auf diese Art bekömmt die vorgelegte Formel $ax^2 + cy^2$ die Form $t^2 + acu^2$, welche nach den hier angegebenen Regeln leicht zu einem Quadrate gemacht werden kann.

§. 187.

Nun wollen wir weiter fortgehen und sehen, wie die Formel $ax^2 + cy^2$, wo x und y unter sich untheilbar seyn sollen, zu einem Cubus gemacht werden könne; hierzu sind die vorigen Regeln keineswegs hinlänglich, die hier angegebene Verfahrungsart aber kann mit dem besten Fortgange angewendet werden, wobey noch vorzüglich dieses zu bemerken ist, daß diese Formel allezeit zu einem Cubus gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht anging, wenn nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potenzen gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten Potenz u. s. f. ist die Auflösung immer möglich.

§. 188.

Wenn daher die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Cubus gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher
$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$ und
$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$, denn daraus wird das Product $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)^3$, und also unsere Formel ein Cubus; es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden können? welches glücklicher Weise gelingt; denn wenn die angesetzten Cubi wirklich genommen werden, so erhalten wir folgende zwey Gleichungen: $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3ap^2q\sqrt{-c} - 3cpq^2\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3ap^2q\sqrt{-c} - 3cpq^2\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c}$, woraus offenbar folgt, daß $x = ap^3 - 3cpq^2$, und $y = 3ap^2q - cq^3$.

Man suche z. B. zwey Quadrate x^2 und y^2, deren Summe $x^2 + y^2$ einen Cubus ausmache; weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir $x = p^3 - 3pq^2$ und $y = 3p^2q - q^3$, und alsdann wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^3$. Es sey nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $x^2 + y^2 = 125 = 5^3$.

§. 189.

Wir wollen noch die Formel $x^2 + 3y^2$ betrachten, welche zu einem Cubus gemacht werden soll; weil nun hier $a = 1$ und $c = 3$, so wird $x = p^3 - 9pq^2$ und $y = 3p^2q - 3q^3$, und alsdann $x^2 + 3y^2 = (p^2 + 3q^2)^3$. Weil diese Formel oft vorkömmt, so wollen wir davon die leichtern Fälle hierher setzen:

p	q	x	y	$x^2 + 3y^2$
1	1	8	0	$64 = 4^3$
2	1	10	9	$343 = 7^3$
1	2	35	18	$2197 = 13^3$
3	1	0	24	$1728 = 12^3$
1	3	80	72	$21952 = 28^3$
3	2	81	30	$9261 = 21^3$
2	3	154	45	$29791 = 31^3$

§. 190.

Wäre es nicht zur Bedingung gemacht worden, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn sollten, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit; denn wenn $ax^2 + cy^2$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, so wird unsere Formel $at^2z^2 + cu^2z^2$, welche dem Cubus $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus sogleich $z = v^3(at^2 + cu^2)$ gefunden wird; folglich sind die gesuchten Werthe für x

und

und y, $x = tv^3 (at^2 + cu^2)$ und $y = uv^3 (at^2 + cu^2)$, welche außer dem Cubus v^3 noch $at^2 + cu^2$ zum gemeinschaftlichen Theiler haben: diese Auflösung giebt sogleich $ax^2 + cy^2 = v^6 (at^2 + cu^2)^2 (at^2 + cu^2) = v^6 (at^2 + cu^2)^3$, welches offenbar der Cubus von $v^2 (at^2 + cu^2)$ ist.

§. 191.

Das hier gebrauchte Verfahren ist um so viel merkwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginärer Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu nur allein rationale und so gar ganze Zahlen erfordert wurden. Noch merkwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen, wo die Irrationalität verschwindet, unser Verfahren nicht mehr statt findet; denn wenn z. B. $x^2 + cy^2$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen, daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nemlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cubi seyn müssen; weil sie unter sich untheilbar sind, indem die Zahlen x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als z. B. wenn $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr statt finden, weil alsdann die beyden Factoren, nemlich $x + y$ und $x - y$ allerdings gemeinschaftliche Theiler haben könnten, ungeachtet x und y dergleichen nicht haben, z. B. wenn beyde ungerade Zahlen wären.

Wenn daher $x^2 - y^2$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig, daß sowohl $x + y$ als $x - y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl $x + y = 2p^3$ und $x - y = 4q^3$ annehmen, wo dann $x^2 - y^2$ unstreitig ein Cubus würde, nemlich $8p^3q^3$, wovon die Cubicwurzel $2pq$ ist; alsdann aber wird $x = p^3 + 2q^3$, und $y = p^3 - 2q^3$. Wenn aber die Formel $ax^2 + cy^2$ sich nicht in zwey rationale Factoren zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden sind.

§. 192.

Wir wollen diese Abhandlung noch durch einige merkwürdige Aufgaben erläutern:

I. Aufg. Man verlangt in ganzen Zahlen ein Quadrat x^2, daß, wenn dazu 4 addirt wird, ein Cubus herauskomme; dergleichen sind 4 und 121; ob aber noch mehr dergleichen angegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man zuerst die Fälle auf, in welchen $x^2 + y^2$ ein Cubus wird; dieses geschieht, wie aus dem obigen erhellt, wenn $x = p^3 - 3pq^2$ und $y = 3p^2q - q^3$; da nun hier $y^2 = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß $3p^2q - q^3 = + 2$, oder $3p^2q - q^3 = - 2$ seyn; im erstern Falle wird also $q(3p^2 - q^2) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey daher $q = 1$, so wird $3p^2 - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$, und $x^2 = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6p^2 - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen $+$, so wird $6p^2 = 10$ und $p^2 = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen $-$, so wird $6p^2 = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehrere Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadrate angegeben werden, nemlich 4 und 121, welche Cubi werden, wenn man dazu 4 addirt.

§. 193.

II. Aufg. Man verlangt solche Quadrate in ganzen Zahlen, die, wenn dazu 2 addirt wird, Cubi werden, wie bey

dem

dem Quadrate 25 geschieht; ob es nun noch mehr dergleichen giebt, wird hier gefragt?

Da also $x^2 + 2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man zuerst die Fälle auf, wo die Formel $x^2 + 2y^2$ ein Cubus wird, welches aus dem oben gezeigten (§. 188), wo $a = 1$ und $c = 2$, geschieht, wenn $x = p^3 - 6qp^2$ und $y = 3p^2q - 2q^3$; da nun hier $y = \pm 1$, so muß $3p^2q - 2q^3 = q(3p^2 - 2q^2) = \pm 1$ seyn, und also q ein Theiler von 1; es sey also $q = 1$, so wird $3p^2 - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3p^2 = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt für p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; hieraus folgt, daß nur das einzige Quadrat 25 in ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

§. 194.

III. Aufg. Man verlangt solche fünffache Quadrate; wenn dazu 7 addirt wird, daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5x^2 + 7$ ein Cubus sey.

Man suche zuerst diejenigen Fälle auf, in welchen $5x^2 + 7y^2$ ein Cubus wird, welches nach dem (§. 188), wo $a = 5$ und $c = 7$ ist, geschieht, wenn $x = 5p^3 - 21pq^2$ und $y = 15p^2q - 7q^3$; weil nun hier $y = \pm 1$ seyn soll, so wird $15p^2q - 7q^3 = q(15p^2 - 7q^2) = \pm 1$, wo dann q ein Theiler von 1 seyn muß, folglich $q = 1$; daher wird $15p^2 - 7 = \pm 1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q solche Brüche seyn könnten, da $y = 1$ und x doch eine ganze Zahl würde; dieses geschieht wirklich, wenn $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$ ist, denn alsdann wird $y = 1$ und $x = 2$; mit andern Brüchen aber ist dieses nicht möglich.

§. 195.

IV. Aufg. Man suche solche Quadrate in ganzen Zahlen, so daß ein Cubus herauskomme, wenn man die Zahlen doppelt nimmt und davon 5 subtrahirt; oder $2x^2 - 5$ soll ein Cubus seyn.

Man suche zuerst diejenigen Fälle auf, in welchen $2x^2 - 5y^2$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten §, wo $a = 2$ und $c = -5$ geschieht, wenn $x = 2p^3 + 15pq^2$ und $y = 6p^2q + 5q^3$. Hier aber muß $y = \pm 1$ seyn, und folglich $6p^2q + 5q^3 = q(6p^2 + 5q^2) = \pm 1$, welches weder in ganzen Zahlen, noch in Brüchen geschehen kann; daher ist dieser Fall sehr merkwürdig, weil gleichwohl eine Auflösung statt findet, wenn nemlich $x=4$, denn alsdann wird $2x^2 - 5 = 27$, welches der Cubus von 3 ist; und es ist von der größten Wichtigkeit, hiervon den Grund zu untersuchen.

§. 196.

Es ist also möglich, daß $2x^2 - 5y^2$ ein Cubus seyn könnte, dessen Wurzel sogar die Form $2p^2 - 5q^2$ hat, wenn nemlich $x = 4$, $y = 1$ und $p = 2$, $q = 1$, und also haben wir einen Fall, wo $2x^2 - 5y^2 = (2p^2 - 5q^2)^3$, ungeachtet es die beyden Factoren von $2x^2 - 5y^2$, nemlich $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da sie doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2} +$

$q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2} - q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Falle $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}$, welches keinesweges mit $4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ überein kömmt.

Es ist aber zu bemerken, daß die Formel $r^2 - 10s^2$ in unendlich vielen Fällen 1 oder -1 werden kann, wenn nemlich $r = 3$ und $s = 1$, ferner wenn $r = 19$ und $s = 6$, welche mit der Formel $2p^2 - 5q^2$ multiplicirt, wieder eine Zahl von der letztern Form giebt.

Es sey daher $f^2 - 10g^2 = 1$, und statt, daß wir oben $2x^2 - 5y^2 = (2p^2 - 5q^2)^3$ gesetzt haben, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art $2x^2 - 5y^2 = (f^2 - 10g^2) \cdot (2p^2 - 5q^2)^3$ annehmen, und die Factoren davon genommen, geben $x\sqrt{2} \pm y\sqrt{5} = (f \pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3$. Es ist aber $(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3 = (2p^3 + 15pq^2)\sqrt{2} \pm (6p^2q + 5q^3)\sqrt{5}$, wofür wir der Kürze wegen $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$ schreiben wollen, welches mit $f + g\sqrt{10}$ multiplicirt, $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$ giebt, und dem $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ gleich seyn muß; hieraus entsteht $x = Af + 5Bg$ und $y = Bf + 2Ag$; da nun $y = \pm 1$ seyn muß, so ist es nicht durchaus nöthig, daß $6p^2q + 5q^3 = 1$ werde, sondern es ist genug, wenn nur die Formel $Bf + 2Ag$, das ist $f(6p^2q + 5q^3) + 2g(2p^3 + 15pq^2)$ dem ± 1 gleich werde, wo f und g mehrere Werthe haben können. Es sey z. B. $f = 3$ und $g = 1$, so muß die Formel $18p^2q + 15q^3 + 4p^3 + 30pq^2$ dem ± 1 gleich werden, und es muß $4p^3 + 18p^2q + 30pq^2 + 15q^3 = \pm 1$ seyn.

§. 197.

§. 197.

Diese Schwierigkeit, alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen, findet sich aber nur alsdann, wenn in der Formel $ax^2 + cy^2$ die Zahl c negativ ist, weil alsdann die Formel $ax^2 + cy^2$ oder $x^2 - acy^2$, welche mit ihr in einer genauen Verwandschaft steht, 1 werden kann; dieses kann aber niemals geschehen, wenn c eine positive Zahl ist, weil $ax^2 + cy^2$ oder $x^2 + acy^2$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden. Daher kann die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden, wo die beyden Zahlen a und c positiv genommen werden.

§. 198.

Wir kommen nun zur vierten Potenz und bemerken zuerst, daß, wenn die Formel $ax^2 + cy^2$ ein Biquadrat werden soll, die Zahl $a = 1$ seyn müsse; denn wenn sie kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrate zu machen, oder wenn es auch möglich wäre, so könnte sie auch in die Form $t^2 + acu^2$ verwandelt werden, daher wir die Frage nur auf diese letztere Form einschränken, mit welcher die obige $x^2 + cy^2$, wenn $a = 1$, übereinstimmt. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen seyn müssen, damit die Formel $x^2 + cy^2$ ein Biquadrat werde. Da nun diese aus den beyden Factoren $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$ besteht, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, daher muß $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})^4$ und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})^4$ angenommen werden, woraus unsere Formel dem Biquadrate $(p^2 + cq^2)^4$ gleich wird; die Buchstaben x

und

und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmt, wie folgt:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cp^2q^2 - 4cpq^3\sqrt{-c} + c^2q^4$$

$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cp^2q^2 + 4cpq^3\sqrt{-c} + c^2q^4$$

folglich $x = p^4 - 6cp^2q^2 + c^2q^4$ und

$$y = 4p^3q - 4cpq^3.$$

§. 199.

Wenn also $x^2 + y^2$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c = 1$, so haben wir die Werthe $x = p^4 - 6p^2q^2 + q^4$ und $y = 4p^3q - 4pq^3$, und alsdann wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^4$ seyn.

Nehmen wir z. B. $p = 2$ und $q = 1$ an, so bekommen wir $x = 7$ und $y = 24$; hieraus wird $x^2 + y^2 = 625 = 5^4$.

Nimmt man ferner $p = 3$ und $q = 2$, so bekömmt man $x = 119$ und $y = 120$, daraus wird $x^2 + y^2 = 13^4$.

§. 200.

Bey allen geraden Potenzen, wozu die Formel $ax^2 + cy^2$ gemacht werden soll, ist ebenfalls durchaus nothwendig, daß diese Formel zu einem Quadrat gemacht werden könne, zu welchem Ende es hinlänglich ist, daß man nur einen einzigen Fall wisse, in welchem dieses geschieht; und alsdann kann diese Formel, wie wir oben gesehen haben, in folgende verwandelt werden: $t^2 + acu^2$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in der Form $x^2 + cy^2$ enthalten, angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, so wohl zur sechsten Potenz als zu einer jeden andern noch höhern geraden Potenz gemacht werden kann.

§. 201.

Bei den ungeraden Potenzen aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, so kann die Formel $ax^2 + cy^2$ allezeit zu einer jeden ungeraden Potenz gemacht werden. Denn verlangt man z. B. die fünfte Potenz, so darf man nur $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5$ annehmen, wo dann offenbar $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)^5$ wird. Die fünfte Potenz von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist nun $a^2p^5\sqrt{a} + 5a^2p^4q\sqrt{-c} - 10acp^3q^2\sqrt{a} - 10acp^2q^3\sqrt{-c} + 5c^2pq^4\sqrt{a} + c^2q^5\sqrt{-c}$, woraus sogleich $x = a^2p^5 - 10acp^3q^2 + 5c^2pq^4$ und $y = 5a^2p^4q - 10acp^2q^3 + c^2q^5$ geschlossen wird.

Verlangt man also eine Summe zweyer Quadrate $x^2 + y^2$, die zugleich eine fünfte Potenz sey, so $a = 1$ und $c = 1$; folglich $x = p^5 - 10p^3q^2 + 5pq^4$ und $y = 5p^4q - 10p^2q^3 + q^5$. Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $q = 41$, und $x^2 + y^2 = 3125 = 5^5$.

XIII. Capitel.

Von einigen Formeln der Art $ax^4 + bx^4$, welche sich nicht zu einem Quadrate machen lassen.

§. 202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summe oder Differenz eine Quadrat-