UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

# Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

**Euler, Leonhard**

**Berlin, 1797**

**VD18 90239571**

## XIII. Capitel. Von einigen Formeln der Art $ax^4 + bx^4$, welche sich nicht zu einem Quadrate machen lassen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50547

Visual Library

§. 201.

Bei den ungeraden Potenzen aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, so kann die Formel $ax^2 + cy^2$ allezeit zu einer jeden ungeraden Potenz gemacht werden. Denn verlangt man z. B. die fünfte Potenz, so darf man nur $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5$ annehmen, wo dann offenbar $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)^5$ wird. Die fünfte Potenz von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist nun $a^2p^5\sqrt{a} + 5a^2p^4q\sqrt{-c} - 10acp^3q^2\sqrt{a} - 10acp^2q^3\sqrt{-c} + 5c^2pq^4\sqrt{a} + c^2q^5\sqrt{-c}$, woraus sogleich $x = a^2p^5 - 10acp^3q^2 + 5c^2pq^4$ und $y = 5a^2p^4q - 10acp^2q^3 + c^2q^5$ geschlossen wird.

Verlangt man also eine Summe zweyer Quadrate $x^2 + y^2$, die zugleich eine fünfte Potenz sey, so $a = 1$ und $c = 1$; folglich $x = p^5 - 10p^3q^2 + 5pq^4$ und $y = 5p^4q - 10p^2q^3 + q^5$. Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $q = 41$, und $x^2 + y^2 = 3125 = 5^5$.

---

## XIII. Capitel.

## Von einigen Formeln der Art $ax^4 + bx^4$, welche sich nicht zu einem Quadrate machen lassen.

§. 202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summe oder Differenz eine Quadrat-

dratzahl würde; allein alle Mühe war vergeblich, und endlich fand man so gar einen Beweis, daß weder die Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nemlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber entweder $y = 0$ oder $y = x$, in welchen Fällen die Sache offenbar vor Augen liegt. Daß es aber in allen übrigen Fällen unmöglich seyn soll, ist um so viel merkwürdiger, weil unendlich viele Auflösungen statt finden, wenn nur von schlechten Quadraten die Rede ist.

§ 203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vorzüglich noch zu bemerken, daß die beyden Zahlen x und y unter sich als untheilbar angesehen werden können; denn sollten sie einen gemeinschaftlichen Theiler, z. B. d haben, so daß man $x = dp$ und $y = dq$ annehmen könnte, so würden unsere Formeln $d^4p^4 + d^4q^4$ und $d^4p^4 - d^4q^4$, die, wenn sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat $d^4$ dividirt, Quadrate bleiben müßten, so daß auch die Formeln $p^4 + q^4$ und $p^4 - q^4$ Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinschaftlichen Theiler haben; es ist daher hinlänglich zu beweisen, daß diese Formeln in dem Fall, wo x und y unter sich untheilbar sind, keine Quadrate werden können, und alsdann erstreckt sich der Beweis von selbst auf alle Fälle, in welchen auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

§. 204.

Wir wollen daher von der Summe zweyer Biquadrate, nemlich der Formel $x^4 + y^4$ den Anfang machen, wo wir x und y als unter sich untheilbare

Zahlen

Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen, daß $x^4 + y^4$ außer den oben angezeigten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis auf folgende Art geführt:

Wenn jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten, daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch $x^4 + y^4$ ein Quadrat würde, sie möchten auch so groß seyn, als sie wollten, weil in kleinen gewiß keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß, wenn auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern u. s. f. Da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey angezeigten, welche aber nicht auf andere führen, so kann man sicher schließen, daß auch in größern, ja so gar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadrate $x^4 - y^4$ bewiesen, wie wir dieses so gleich zeigen wollen.

## §. 205.

Um also zu zeigen, daß $x^4 + y^4$ kein Quadrat sein könne, außer in den beyden Fällen, die für sich deutlich sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemerken.

I. Nehmen wir an, daß die Zahlen x und y unter sich untheilbar sind oder keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ungerade.

II. Beyde

II. Beyde aber können nicht ungerade seyn, weil die Summe zweyer ungeraden Quadrate nie ein Quadrat seyn kann; denn ein ungerades Quadrat ist jedesmal in der Form $4n + 1$ enthalten, und also würde die Summe zweyer ungeraden Quadrate die Form $4n + 2$ haben, welche sich durch 2, nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses gilt aber auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wenn daher $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerade, das andere aber ungerade seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß, wenn die Summe zweyer Quadrate ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $p^2 - q^2$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde, woraus folgt, daß $x^2 = p^2 - q^2$ und $y^2 = 2pq$ seyn müßte, und dann würde $x^4 + y^4 = (p^2 + q^2)^2$ seyn.

IV. Hier also würde y gerade, x aber ungerade seyn; da nun $x^2 = p^2 - q^2$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn; die erstere p aber kann nicht gerade seyn, weil sonst $p^2 - q^2$ als eine Zahl von der Form $4n - 1$ oder $4n + 3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerade, q aber gerade seyn, wo sich von selbst versteht, daß sie unter sich untheilbar seyn müssen.

V. Da nun $p^2 - q^2$ ein Quadrat, nemlich $x^2$ gleich seyn soll, so geschieht dieses, wie wir oben gesehen haben, wenn $p = r^2 + s^2$ und $q = 2rs$; denn alsdann wird $x^2 = (r^2 - s^2)^2$, und also $x = r^2 - s^2$.

VI. Allein $y^2$ muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun $y^2 = 2pq$ haben, so wird jetzt $y^2 = 4rs(r^2 + s^2)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch $rs(r^2 + s^2)$ ein Quadrat seyn, wo r und s unter sich untheilbare Zahlen sind, so daß auch die hier befindlichen drey Factoren, r, s, und $r^2 + s^2$, keinen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben können.

VII. Wenn aber ein Product aus mehreren Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r = t^2$ und $s = u^2$, so muß auch $t^4 + u^4$ ein Quadrat seyn. Wenn daher $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so würde auch hier $t^4 + u^4$, das ist ebenfalls eine Summe zweyer Biquadrate, ein Quadrat seyn. Wobey zu merken ist, daß, weil hier $x^2 = (t^4 - u^4)^2$ und $y^2 = 4t^2u^2(t^4 + u^4)$, die Zahlen t und u offenbar weit kleiner seyn würden, als x und y, indem x und y so gar durch die vierten Potenzen von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müssen.

VIII. Wenn daher zwey Biquadrate, als $x^4$ und $y^4$ auch in den größten Zahlen vorhanden seyn sollten, deren Summe ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summe zweyer weit kleinerer Biquadrate ableiten, welche ebenfalls ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachher noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden und so weiter, bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme; da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summe möglich ist, so folgt daraus offenbar, daß es auch in

den

den größten Zahlen dergleichen nicht geben könne.

IX. Man könnte hier zwar einwenden, daß es in den kleinen Zahlen wirklich dergleichen gebe, wie schon anfänglich bemerkt worden, nemlich wenn das eine Biquadrat o wird; allein auf diesen Fall kommt man gewiß nicht, wenn man auf solche Weise von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Denn wäre bey der kleinern Summe $t^4 + u^4$, entweder $t = o$ und $u = o$, so würde auch bey der größern Summe nothwendig $y^2 = o$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kömmt.

## §. 206.

Nun kommen wir zu dem zweyten Hauptsatze, daß auch die Differenz zweyer Biquadrate, als $x^4 - y^4$, niemals ein Quadrat werden könne, außer in den Fällen, wo $y = o$ und $y = x$; zu welchem Beweise folgendes zu merken ist.

I. Sind die Zahlen x und y als unter sich untheilbar anzusehen, und also entweder beyde ungerade, oder die eine gerade und die andere ungerade. Da nun in beyden Fällen die Differenz zweyer Quadrate wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders betrachtet werden.

II. Es seyen also zuerst die beyden Zahlen x und y ungerade, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerade, die andere aber gerade seyn. Nun wird $x^2 - y^2 = 4pq$ und $x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2$, folglich unsere Formel $x^4 - y^4 = 4pq(2p^2 + 2q^2)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil

davon $pq(2p^2 + 2q^2) = 2pq(p^2 + q^2)$, deren Factoren unter sich untheilbar sind; folglich muß ein jeder dieser Factoren $2p$, $q$, und $p^2 + q^2$ für sich ein Quadrat seyn, weil nemlich die eine Zahl $p$ gerade, die andere $q$ aber ungerade ist. Man setze daher, um die beyden ersten zu Quadraten zu machen, $2p = 4r^2$ oder $p = 2r^2$, und $q = s^2$, wo $s$ ungerade seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4 + s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun $s^4 + 4r^4$ eine Summe zweyer Quadrate ist, von welchen $s^4$ ungerade, $4r^4$ aber gerade ist, so setze man die Wurzel des erstern $s^2 = t^2 - u^2$, wo $t$ ungerade und $u$ gerade ist; die Wurzel des letztern aber $2r^2 = 2tu$ oder $r^2 = tu$, wo $t$ und $u$ unter sich untheilbar sind.

IV. Weil nun $tu = r^2$ ein Quadrat seyn muß, so muß sowohl $t$ als $u$ ein Quadrat seyn; man setze daher $t = m^2$ und $u = n^2$, wo $m$ ungerade und $n$ gerade ist, so wird $s^2 = m^4 - n^4$, so daß wieder eine Differenz zweyer Biquadrate, nemlich $m^4 - n^4$ ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar, daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden, als $x$ und $y$, weil $r$ und $s$ offenbar kleiner sind als $x$ und $y$, und eben so $m$ und $n$ kleiner als $r$ und $s$; wenn es also in den größten Zahlen möglich und $x^4 - y_4$ ein Quadrat wäre, so würde es in weit kleinern Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort, bis man endlich auf die kleinsten Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber, wo dieses möglich ist, sind, wenn das eine Biquadrat gleich $0$ oder dem andern gleich ist; wäre das erstere, so müßte $n = 0$ seyn, folglich $u = 0$, ferner

$r = 0$

$s = o$ und $p = o$ und $x^4 - y^4 = o$, oder $x^4 = y^4$; von einem solchen Fall ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n = m$, so würde $t = u$, weiter $s = o$, $q = o$ und endlich auch $x = y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

§. 207.

Man könnte hier einwenden, daß, da m ungerade und n gerade ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen der Schluß machen könnte. Es ist aber hinlänglich, daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen ist, und wir werden jetzt zeigen, daß auch $x^4 - y^4$ kein Quadrat seyn könne, wenn das eine Biquadrat gerade und das andere ungerade ist.

I. Wäre das erstere $x^4$ gerade und $y^4$ ungerade, so wäre die Sache an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n + 3$ herauskäme, die kein Quadrat seyn kann. Es sey daher x ungerade und y gerade, so muß $x^2 = p^2 + q^2$ und $y = 2pq$ seyn, denn so wird $x^4 - y^4 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 - q^2)^2$, wo von p und q das eine gerade, das andere aber ungerade seyn muß.

II. Da nun $p^2 + q^2 = x^2$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p = r^2 - s^2$ und $q = 2rs$; folglich $x = r^2 + s^2$. Hieraus aber wird $y^2 = 2(r^2 - s^2) \cdot 2rs$ oder $y^2 = 4rs(r^2 - s^2)$, welches ein Quadrat seyn muß, und also auch der vierte Theil davon, nemlich $rs(r^2 - s^2)$, wovon die Factoren unter sich untheilbar sind.

III. Man setze daher $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird der dritte Factor $r^2 - s^2 = t^4 - u^4$, welcher ebenfalls ein Quadrat seyn muß; da nun dieser

auch eine Differenz zweyer Biquadrate ist, welche viel kleiner sind, als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärke, so daß, wenn auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadrate ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbaren Fälle zu kommen; daher dieses gewiß auch in den größten Zahlen nicht möglich ist.

§. 208.

Der erste Theil dieses Beweises, wo die Zahlen x und y beyde ungerade genommen werden, kann folgendermaaßen abgekürzt werden. Wenn $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte $x^2 = p^2 + q^2$ und $y^2 = p^2 - q^2$ seyn, wo von den Buchstaben p und q der eine gerade, der andere aber ungerade wäre; alsdann aber würde $x^2y^2 = p^4 - q^4$, folglich müßte $p^4 - q^4$ auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz zweyer solcher Biquadrate ist, von welchen das eine gerade, das andere aber ungerade ist; daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theile des Beweises gezeigt worden.

§. 209.

Wir haben also diese zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summe, noch die Differenz zweyer Biquadrate jemals eine Quadratzahl werden könne, außer in einigen wenigen offenbaren Fällen.

Wenn daher auch andere Formeln, die zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summe oder eine Differenz zweyer Biquadrate ein Quadrat werden müßte, so sind diese Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun

in

in den folgenden Formeln statt, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich, daß die Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde; denn weil diese Formel eine Summe zweyer Quadrate ist, so müßte $x^2 = p^2 - q^2$ und $2y^2 = 2pq$ oder $y^2 = pq$ seyn; da nun p und q unter sich untheilbar sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man daher $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird $x^2 = r^4 - s^4$; also müßte eine Differenz zweyer Biquadrate ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich, daß die Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde; denn alsdann müßte $x^2 = p^2 + q^2$ und $2y^2 = 2pq$ seyn, weil alsdann $x^4 - 4y^4 = (p^2 - q^2)^2$ herauskäme; da nun $y^2 = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird $x^2 = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summe zweyer Biquadrate ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß die Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdann y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Nimmt man nun $y = 2z$ an, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müssen, welches nach dem vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es ist auch nicht möglich, daß die Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; denn da dasselbe gerade seyn müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4z^2$ wäre, so würde $x^4 + y^4 = 2z^2$ seyn, und daher $2z^2 + 2x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ und also ein Quadrat. Eben so würde $2z^2 - 2x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ und also auch ein

Quadrat seyn. Da nun sowohl $2z^2 + 2x^2y^2$ als $2z^2 - 2x^2y^2$ ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4 - 4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4 - x^4y^4$ und also eine Differenz zweyer Biquadrate, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch die Formel $2x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn; denn da beyde Zahlen x und y nicht gerade sind, weil sie sonst einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerade und die andere ungerade, weil sonst der eine Theil durch 4, der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbar seyn würde, so müssen beyde ungerade seyn. Setzt man nun $x = p + q$ und $y = p - q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerade, die andere aber ungerade, und da $2x^4 - 2y^4 = 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$, so bekömmt man $x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2 = 2(p^2 + q^2)$ und $x^2 - y^2 = 4pq$; also unsere Formel $16pq(p^2 + q^2)$, deren sechzehnter Theil, nemlich $pq(p^2 + q^2)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factoren unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird der dritte $r^4 + s^4$, welcher auch ein Quadrat seyn müßte; dieses ist aber nicht möglich.

## §. 210.

Auf gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß die Formel $x^4 + 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht:

I. Kann

I. Kann x nicht gerade seyn, weil dann y ungerade seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2, nicht aber durch 4 würde theilen lassen; daher muß x ungerade seyn.

II. Man setze daher die Quadratwurzel unserer Formel $= x^2 + \frac{2py^2}{q}$, damit diese ungerade werde; so wird $x^4 + 2y^4 = x^4 + \frac{4px^2y^2}{q} + \frac{4p^2y^4}{q^2}$, wo sich die $x^4$ aufheben, die übrigen Glieder aber durch $y^2$ dividirt und mit $q^2$ multiplicirt, geben $4pqx^2 + 4p^2y^2 = 2q^2y^2$, oder $4pqx^2 = 2q^2y^2 - 4p^2y^2$, daraus wird $\frac{x^2}{y^2} = \frac{q^2 - 2p^2}{2pq}$; woraus $x^2 = q^2 - 2p^2$ und $y^2 = 2pq$ folgt, welches eben die Formeln sind, die wir schon oben angegeben haben.

III. Es müßte also $q^2 - 2p^2$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wenn $q = r^2 + 2s^2$ und $p = 2rs$ ist; denn da würde $x^2 = (r^2 - 2s^2)^2$; hernach aber würde $4rs(r^2 + 2s^2) = y^2$, und also müßte auch der vierte Theil $rs(r^2 + 2s^2)$ ein Quadrat seyn, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird der dritte Factor $r^2 + 2s^2 = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre daher $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat seyn, wo die Zahlen t und u weit kleiner wären als x und y; und auf diese Weise würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie man leicht versuchen kann,

so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

§. 211.

Was hingegen die Formel $x^4 - 2y^4$ betrifft, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könne, und wenn man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können so gar unendlich viele Fälle gefunden werden, in welchen dieselbe wirklich ein Quadrat wird.

Denn wenn $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß $x^2 = p^2 + 2q^2$ und $y^2 = 2pq$ seyn werde, weil man alsdann $x^4 - 2y^4 = (p^2 - 2q^2)^2$ bekömmt. Da nun auch $p^2 + 2q^2$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses, wenn $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$; denn da wird $x^2 = (r^2 + 2s^2)^2$. Allein hier ist wohl zu merken, daß dieses auch geschehen würde, wenn man annähme, daß $p = 2s^2 - r^2$ und $q = 2rs$ sey, daher zwey Fälle hier in Betrachtung kommen.

I. Es sey zuerst $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$, so wird $x = r^2 + 2s^2$; und weil $y^2 = 2pq$, so wird nun $y^2 = 4rs(r^2 - 2s^2)$ seyn; und müßten also r und s Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird $y^2 = 4t^2u^2(t^4 - 2u^4)$; also $y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; wenn daher $t^4 - 2u^4$ ein Quadrat ist, so wird auch $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat; ob aber gleich t und u kleinere Zahlen sind als x und y, so kann man doch nicht, wie vorher, schließen, daß $x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, und zwar deswegen, weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinern Zahlen gelangt; denn $x^4 - 2y^4$ kann ein Quadrat seyn, ohne auf die Formel $t^4 - 2u^4$

zu

zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nemlich in dem andern Fall, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p = 2s^2 - r^2$ und $q = 2rs$, so wird zwar, wie vorher, $x^2 = r^2 + 2s^2$, allein für y bekömmt man $y^2 = 2pq = 4rs(2s^2 - r^2)$. Setzt man nun $r = t^2$ und $s = u^2$, so bekömmt man $y^2 = 4t^2u^2(2u^4 - t^4)$, folglich $y = 2tu\sqrt{(2u^4 - t^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; woraus sich ergiebt, daß unsere Formel $x^4 - 2y^4$ auch ein Quadrat werden könne, wenn die Formel $2u^4 - t^4$ ein Quadrat wird. Dieses geschieht aber offenbar, wenn $t = 1$ und $u = 1$; und daher bekommen wir $x = 3$ und $y = 2$, woraus unsere Formel $x^4 - 2y^4$ wird $81 - 2.16 = 49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4 - t^4$ ein Quadrat werde, wenn $u = 13$ und $t = 1$ ist, weil alsdann $\sqrt{(2u^4 - t^4)} = 239$ ist. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nemlich $x = 1 + 2.13^4 = 57123$ und $y = 2.13.239 = 6214$.

IV. Sobald man aber Werthe für x und y gefunden hat, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für t und u schreiben, wo man dann wieder neue Werthe für x und y erhalten wird.

Weil wir nun $x = 3$ und $y = 2$ gefunden haben, so wollen wir in den No. I. gegebenen Formeln $t = 3$ und $u = 2$ setzen, da dann $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$ wird, so bekommen wir folgende neue Werthe: $x = 81 + 2.16 = 113$ und $y = 2.3.2.7 = 84$. Hieraus erhalten wir $x^2 = 12769$, und $x^4 = 163047361$; ferner $y^2 = 7056$ und $y^4 = 49787136$, daher wird

$x^4 -$

$x^4 - 2y^4 = 63473089$, wovon die Quadratwurzel 7967 ist, welche auch mit der anfänglich angegebenen $p^2 - 2q^2$ völlig übereinstimmt. Denn da $t=3$ und $u=2$, so wird $r=9$ und $s=4$, daher $p = 81 - 32 = 49$ und $q = 72$, woraus $p^2 - 2q^2 = 2401 - 10368 = -7967$.

---

## XIV. Capitel.

## Auflösung einiger Aufgaben, die zu diesem Theile der Analytik gehören.

### §. 212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theile der Analytik vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, welche hieher gehören, aufzulösen; wir wollen daher hier noch einige dergleichen Aufgaben folgen lassen, um dieses in ein desto größeres Licht zu setzen, und auch die Auflösung derselben zugleich hinzufügen.

### §. 213.

I. Man suche eine Zahl, daß, wenn man 1 sowohl dazu addirt, als auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Setzt man die gesuchte Zahl $= x$, so muß sowohl $x + 1$ als auch $x - 1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x + 1 = p^2$, so wird $x = p^2 - 1$ und $x - 1 = p^2 - 2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man nehme an, die Wurzel davon sey $p - q$, so wird $p^2 - 2 = p^2 - 2pq + q^2$, wo sich die