



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XIV. Capitel. Auflösung einiger Aufgaben, die zu diesem Theile der
Analytik gehören.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-50547](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-50547)

$x^4 - 2y^4 = 63473089$, wovon die Quadratwurzel 7967 ist, welche auch mit der anfänglich angegebenen $p^2 - 2q^2$ völlig übereinstimmt. Denn da $t=3$ und $u=2$, so wird $r=9$ und $s=4$, daher $p=81 - 32 = 49$ und $q=72$, woraus $p^2 - 2q^2 = 2401 - 10368 = -7967$.

XIV. Capitel.

Auflösung einiger Aufgaben, die zu diesem Theile der Analytik gehören.

§. 212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theile der Analytik vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, welche hieher gehören, aufzulösen; wir wollen daher hier noch einige dergleichen Aufgaben folgen lassen, um dieses in ein desto größeres Licht zu setzen, und auch die Auflösung derselben zugleich hinzusetzen.

§. 213.

I. Man suche eine Zahl, daß, wenn man 1 sowohl dazu addirt, als auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Setzt man die gesuchte Zahl $= x$, so muß sowohl $x + 1$ als auch $x - 1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x + 1 = p^2$, so wird $x = p^2 - 1$ und $x - 1 = p^2 - 2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man nehme an, die Wurzel davon sey $p - q$, so wird $p^2 - 2 = p^2 - 2pq + q^2$, wo sich die

die p^2 aufheben und daraus $p = \frac{q^2+2}{2q}$ gefunden wird; daraus erhält man ferner $x = \frac{q^4+4}{4q^2}$, wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze daher $q = \frac{r}{s}$, so erhalten wir $x = \frac{r^4+4s^4}{4r^2s^2}$, wovon wir einige kleinere Werthe anzeigen wollen:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \text{wenn } r=1 & 2 & 1 & 3 \\ \text{und } s=1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{so wird } x = \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{65}{16} & \frac{85}{16} \end{array}$$

§. 214.

II. Aufg. Man suche eine Zahl x , daß wenn man dazu 2 beliebige Zahlen, als z. B. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Es müssen also die zwey Formeln $x+4$ und $x+7$ Quadrate werden; man setze daher für die erstere $x+4=p^2$, so wird $x=p^2-4$, die andere Formel aber wird $x+7=p^2+3$, welche auch ein Quadrat seyn muß. Man setze daher die Wurzel, davon $=p+q$, so wird $p^2+3=p^2+2pq+q^2$, woraus $p = \frac{3-q^2}{2q}$, folglich $x = \frac{9-22q^2+q^4}{4q^2}$ gefunden wird. Setzen wir für q einen Bruch, als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x = \frac{9s^4-22r^2s^2+r^4}{4r^2s^2}$, wo man für r und s alle beliebige ganze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r=1$ und $s=1$, so wird $x=-3$, und daraus wird $x+4=1$ und $x+7=4$. Will man

man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s = 2$ und $r = 1$, so bekommt man $x = \frac{5}{16}$; woraus $x + 4 = \frac{125}{16}$ und $x + 7 = \frac{169}{16}$ wird; will man ferner $s = 3$ und $r = 1$ annehmen, so bekommt man $x = \frac{13}{9}$, und daraus $x + 4 = \frac{49}{9}$ und $x + 7 = \frac{121}{9}$. Soll das letzte Glied größer seyn als das mittlere, so setze man $r = 5$ und $s = 1$, dann wird $x = \frac{21}{25}$, und daraus $x + 4 = \frac{121}{25}$ und $x + 7 = \frac{169}{25}$.

§. 215.

III. Aufg. Man suche einen solchen Bruch x , daß, wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Da die beyden Formeln $1 + x$ und $1 - x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1 + x = p^2$, dann wird $x = p^2 - 1$ und die andere Formel $1 - x = 2 - p^2$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste, noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, in welchem dieses geschieht; ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nemlich $p = 1$, deswegen setze man $p = 1 - q$, so daß $x = q^2 - 2q$, so wird unsere Formel $2 - p^2 = 1 + 2q - q^2$, davon setze man die Wurzel $= 1 - qr$, so bekommt man $1 + 2q - q^2 = 1 - 2qr + q^2 r^2$; hieraus $2 - q = -2r + qr^2$ und $q = \frac{2r+2}{r^2+1}$; hieraus

wird $x = \frac{4r-4r^3}{(r^2+1)^2}$, weil r ein Bruch ist, so setze

man $r = \frac{t}{u}$, so wird $x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(t^2+u^2)^2} = \frac{4tu(u^2-t^2)}{(t^2+u^2)^2}$; also muß u größer seyn als t .

Man

Man setze daher $u = 2$ und $t = 1$, so wird $x = \frac{2}{3}$; setzt man $u = 3$ und $t = 2$, so wird $x = \frac{1}{3}$, und daraus $1 + x = \frac{4}{3}$ und $1 - x = \frac{2}{3}$, welches beydes Quadrate sind.

§. 216.

IV. Aufg. Man suche solche Zahlen x , welche sowohl zu 10 addirt, als von 10 subtrahirt, Quadrate hervorbringen.

Es müssen also die Formeln $10 + x$ und $10 - x$ Quadrate seyn, welches nach der vorigen Methode geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedenke man, daß auch das Product dieser Formel ein Quadrat seyn müsse, nemlich $100 - x^2$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $= 10 - px$, so wird $100 - x^2 = 100 - 20px + p^2x^2$ und also

$x = \frac{20p}{p^2 + 1}$; hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede besonders. Wenn aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch eins seyn; nun aber wird die erste $10 + x = \frac{10p^2 + 20p + 10}{p^2 + 1} = \frac{10(p^2 + 2p + 1)}{p^2 + 1}$; und weil $p^2 + 2p + 1$ schon ein

Quadrat ist, so muß noch der Bruch $\frac{10}{p^2 + 1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser: $\frac{10p^2 + 10}{(p^2 + 1)^2}$. Es

ist also nur nöthig, daß die Zahl $10p^2 + 10$ ein Quadrat werde, wo man wieder einen Fall, in welchem es geschieht, errathen muß. Dieser ist, wenn $p = 3$ ist, und deswegen setze man $p = 3 + q$, so bekommt man $100 + 60q + 10q^2$; davon setze man

man die Wurzel $10 + qt$, so wird $100 + 60q + 10q^2 = 100 + 20qt + q^2t^2$, daraus $q = \frac{60 - 20t}{t^2 - 10}$,

daraus $p = 3 + q$, und $x = \frac{20p}{p^2 + 1}$.

Nimmt man $t = 3$, so wird $q = 0$ und $p = 3$, folglich $x = 6$, daher wird $10 + x = 16$ und $10 - x = 4$. Es sey aber $t = 1$, so wird $q = -\frac{40}{9}$ und $p = -\frac{13}{9}$ und $x = -\frac{234}{25}$; es ist aber gleich viel $x = +\frac{234}{25}$ anzunehmen, und dann wird $10 + x = \frac{484}{25}$ und $10 - x = \frac{16}{25}$, welches beydes Quadrate sind.

§. 217.

Anmerkung. Wollte man diese Aufgabe allgemein machen und für eine jede gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, so, daß sowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung oft unmöglich werden, nemlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe zweyer Quadrate ist. Aber wir haben oben gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen zweyer Quadrate, oder in der Form $x^2 + y^2$ enthalten sind.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

und daß also die übrigen Zahlen, welche gleichfalls bis 50 sind:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, nicht in zwey Quadrate zerlegt werden können; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so oft würde auch die Aufgabe unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir annehmen, daß $a + x = p^2$ und $a - x = q^2$ sey, und dann
gibt

giebt die Addition $2a = p^2 + q^2$, so daß $2a$ eine Summe zweyer Quadrate seyn muß; ist aber $2a$ eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn; wenn daher a keine Summe zweyer Quadrate ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a + x$ und $a - x$ zugleich Quadrate seyn können.

§. 218.

Wäre daher $a = 3$, so würde die Frage unmöglich seyn, und zwar darum, weil 3 keine Summe zweyer Quadrate ist; man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmache, allein dieses ist auch nicht möglich, denn wäre $3 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2}$ und man multiplicire mit $q^2 s^2$, so würde $3q^2 s^2 = p^2 s^2 + q^2 r^2$, wo $p^2 s^2 + q^2 r^2$ eine Summe zweyer Quadrate ist, welche sich durch 3 theilen ließe; wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe zweyer Quadrate keine andere Theiler haben könne, als die selbst solche Summen sind.

Es lassen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein sie sind auch durch 9 theilbar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, aus welchen sie bestehen, weil nemlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht statt findet; daher ist dieser Schluß richtig, daß, wenn eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe zweyer Quadrate ist, dieses auch nicht in Brüchen statt finden könne; ist aber die Zahl a in ganzen Zahlen eine Summe zweyer Quadrate, so kann sie auch in Brüchen auf unendlich viele Arten eine Summe zweyer Quadrate seyn, welches wir nun noch zeigen wollen.

§. 219.

V. Aufg. Eine Zahl, die eine Summe zweyer Quadrate ist, auf unendlich viele Arten in eine Summe von zweyen andern Quadraten zu zerlegen.

Die gegebene Zahl sey daher $f^2 + g^2$ und man soll zwey andere Quadrate, als x^2 und y^2 suchen, deren Summe $x^2 + y^2$ der Zahl $f^2 + g^2$ gleich sey, so daß $x^2 + y^2 = f^2 + g^2$ sey. Hier zeigt sich nun so gleich, daß, wenn x größer oder kleiner ist als f , y umgekehrt kleiner oder größer seyn müsse als g . Man setze daher $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so wird $f^2 + 2fpz + p^2z^2 + g^2 - 2gqz + q^2z^2 = f^2 + g^2$, wo sich die f^2 und g^2 aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen lassen. Daher wird $2fp + p^2z - 2gq + q^2z = 0$ oder $p^2z + q^2z = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{p^2 + q^2}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden:

$$x = \frac{2gp + f(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2} \text{ und } y = \frac{2fpq + g(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2},$$
 wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, so daß $f = 1$ und $g = 1$, so wird $x^2 + y^2 = 2$, wenn $x = \frac{2pq + q^2 - p^2}{p^2 + q^2}$ und $y = \frac{2pq + p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$; setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

§. 220.

VI. Aufg. Wenn die Zahl a eine Summe zweyer Quadrate ist, solche Zahlen x zu finden, daß sowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde.

Es

Es sey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man
 setze $13 + x = p^2$ und $13 - x = q^2$, so giebt zuerst
 die Addition $26 = p^2 + q^2$, die Subtraction aber
 $2x = p^2 - q^2$; also müssen p und q so beschaffen
 seyn, daß $p^2 + q^2$ der Zahl 26 gleich werde, die
 auch eine Summe zweyer Quadrate ist, nemlich
 $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Qua-
 drate zerlegt werden, von welchen das größere für
 p^2 , das kleinere aber für q^2 genommen wird. Hier-
 aus bekommt man zuerst $p = 5$ und $q = 1$, und
 daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem
 obigen die Zahl 26 noch auf unendlich verschiedene
 Arten in zwey Quadrate aufgelöst werden. Denn
 weil $f = 5$ und $g = 1$, und wenn wir in den obigen
 Formeln statt der Buchstaben p und q , t und u setzen,
 für x und y aber die Buchstaben p und q , so finden
 wir $p = \frac{2tu + 5(u^2 - t^2)}{t^2 + u^2}$ und $q = \frac{10tu + t^2 - u^2}{t^2 + u^2}$.
 Nimmt man nun für t und u Zahlen nach Belieben
 an, und bestimmt daraus die Buchstaben p und q ,
 so erhält man die gesuchte Zahl $x = \frac{p^2 - q^2}{2}$.

Es sey z. B. $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = \frac{17}{5}$
 und $q = \frac{23}{5}$; und daher $p^2 - q^2 = \frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

§. 221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so
 sey die gegebene Zahl $a = c^2 + d^2$, die gesuchte
 aber $= z$, so daß die Formeln $a + z$ und $a - z$
 Quadrate werden sollen.

Nun setze man $a + z = x^2$ und $a - z = y^2$, so
 wird zuerst $2a = 2(c^2 + d^2) = x^2 + y^2$, und her-
 nach $2z = x^2 - y^2$. Es müssen also die Quadrate
 x^2 und y^2 so beschaffen seyn, daß $x^2 + y^2 =$
 $2(c^2 + d^2)$, wo $2(c^2 + d^2)$ auch eine Summe

2

zweyer

zweyer Quadrate ist, nemlich $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Man setze der Kürze wegen $c + d = f$ und $c - d = g$, so daß $x^2 + y^2 = f^2 + g^2$ seyn muß; dieses geschieht aber aus dem obigen, wenn man $x = \frac{2gpq + f(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2}$ und $y = \frac{2fpq + g(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}$ annimmt; hieraus bekommt man die leichteste Auflösung, wenn man $p = 1$ und $q = 1$ setzt, denn hieraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ und $y = f = c + d$, und hieraus folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar $c^2 + d^2 + 2cd = (c + d)^2$ und $c^2 + d^2 - 2cd = (c - d)^2$. Um eine andere Auflösung zu finden, so sey $p = 2$ und $q = 1$, da wird $x = \frac{7c + 8d}{5}$ und $y = \frac{c - 7d}{5}$, wo sowohl c und d , als x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer seyn soll als y , so nehme man d negativ, und dann wird $x = \frac{c + 7d}{5}$ und $y = \frac{7c - d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24d^2 + 14cd - 24c^2}{25}$, welcher Werth zu $a = c^2 + d^2$ addirt, $\frac{c^2 + 14cd + 4cd^2}{25}$ giebt, wovon die Quadratwurzel $\frac{c + 7d}{5}$ ist. Subtrahirt man aber z von a , so bleibt $\frac{49c^2 - 14cd + d^2}{25}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{7c - d}{5}$ ist; jene ist nemlich x , diese aber y .

S. 222.

VII. Aufg. Man suche eine Zahl x , daß, wenn sowohl zu derselben selbst als zu

zu ihrem Quadrate x^2 , eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme.

Es müssen also die beyden Formeln $x + 1$ und $x^2 + 1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze daher für die erste $x + 1 = p^2$, so wird $x = p^2 - 1$, und die zweyte Formel $x^2 + 1 = p^4 - 2p^2 + 2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: diese ist aber von der Art, daß man keine Auflösung finden kann, wenn nicht schon ein Fall bekannt ist; ein solcher Fall aber fällt sogleich in die Augen, nemlich wenn $p = 1$. Man setze daher $p = 1 + q$, so wird $x^2 + 1 = 1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4$, welches auf vielen Arten zu einem Quadrate gemacht werden kann.

I. Man setze zuerst die Wurzel davon $1 + q^2$, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 2q^2 + q^4$, daraus wird $4q + 4q^3 = 2q$ oder $4 + 4q = 2$ und $q = -\frac{1}{2}$, folglich $p = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{3}{4}$.

II. Nimmt man die Wurzel $1 - q^2$ an, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 - 2q^2 + q^4$, und daher $q = -\frac{3}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$, hieraus $x = -\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1 + 2q + q^2$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6q^2 + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ und $p = -1$, daher $x = 0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel $1 - 2q - q^2$ setzen, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2q^2 + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel $1 + 2q^2$, dann wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q^2 + 4q^4$, und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$; folglich $x = \frac{40}{9}$, woraus

woraus $x + 1 = \frac{49}{9} = (\frac{7}{3})^2$ und $x^2 + 1 = \frac{1681}{81} = (\frac{41}{9})^2$ folgt.

Wollte man noch mehrere Werthe für q finden, so müßte man einen von diesen hier gefundenen, z. B. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner $q = -\frac{1}{2} + 1$ annehmen; daraus aber würde $p = \frac{1}{2} + r$; $p^2 = \frac{1}{4} + r + r^2$ und $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}r^2 + 2r^3 + r^4$, folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}r^2 + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat seyn soll, und daher auch mit 16 multipliziert, nemlich $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4$. Davon sehe man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4r^2$, so daß $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr + 4or^2 \pm 8fr^3 + 16r^4$. Da nun die ersten

und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen; dieses geschieht, wenn $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$ ist; alsdann geben die übrigen Glieder durch r^2 dividirt $-8 + 32r = \pm 40 + f^2 \pm 8fr$. Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + f^2 + 8fr$, und daraus $r = \frac{48 + f^2}{32 - 8f^2}$.

Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$, daraus wird $x + 1 = (\frac{961}{400})^2$, und $x^2 + 1 = (\frac{6081}{1600})^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + f^2 - 8fr$, und daraus $r = \frac{f^2 - 32}{32 + 8f^2}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entsteht.

III. Es sey die Wurzel $4r^2 + 4r \pm 5$, so daß $16r^4 + 32r^3 - 8r^2 - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3$

$$32r^3 \pm 40r^2 \pm 40r + 25: \text{ wo die zwey} \\ \pm 16r^2$$

ersten und die ganz letzten Glieder wegfallen,
die übrigen aber durch r dividirt, geben $-8r$
 $-24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder $-24r$
 $-24 = \pm 40r \pm 40$. Wenn das obere Zei-
chen gilt, so wird $-24r - 24 = 40r + 40$,
oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, das ist
 $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon
gehabt haben; und eben derselbe folgt auch
aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5 + fr + gr^2$ und be-
stimme f und g so, daß die drey ersten Glieder
wegfallen. Da nun $25 - 24r - 8r^2 +$
 $32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr + 10gr^2 + 2fgr^3$
 $+ f^2r^2$

$+ g^2r^4$, so wird zuerst $-24 = 10f$ und also
 $f = -\frac{12}{5}$, ferner $-8 = 10g + f^2$, und
also $g = \frac{-8 - f^2}{10}$, oder $g = -\frac{344}{625} = -\frac{172}{3125}$;

die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt,
geben $32 + 16r = 2fg + g^2r$ und daraus $r =$
 $\frac{2fg - 32}{16 - g^2}$. Hier wird der Zähler $2fg - 32 =$
 $+ 24 \cdot 172 - 32 \cdot 625 = -32 \cdot 496$, oder dieser
 $\frac{5 \cdot 125}{625}$

Zähler $= \frac{-16 \cdot 32 \cdot 31}{625}$; der Nenner aber giebt

$16 - g^2 = (4 - g)(4 + g) = \frac{328}{3125} \cdot \frac{672}{3125}$,
oder $16 - g^2 = \frac{8 \cdot 32 \cdot 41 \cdot 21}{25 \cdot 625}$; daraus wird

$r = -\frac{1550}{801}$, hieraus $p = -\frac{2732}{1722}$, und hier-
aus wird ein neuer Werth für x , nemlich
 $x = p^2 - 1$, gefunden.

§. 223.

VIII. Aufg. Zu drey gegebenen Zahlen a , b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derselben addirt, ein Quadrat hervorbringe.

Es müssen also folgende drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nemlich $x + a$, $x + b$, und $x + c$.

Man setze für die erstere $x + a = z^2$, so daß $x = z^2 - a$, so werden die beyden andern Formeln $z^2 + b - a$ und $z^2 + c - a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll. Hiervon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr oft unmöglich ist, und die Möglichkeit beruht einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b - a$ und $c - a$. Denn wäre z. B. $b - a = 1$ und $c - a = -1$, das ist $b = a + 1$ und $c = a - 1$, so müßten $z^2 + 1$ und $z^2 - 1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn. Man setze daher $z = \frac{p}{q}$, so würden folgende zwey Formeln Quadrate seyn müssen: $p^2 + q^2$ und $p^2 - q^2$, folglich müßte auch ihr Product $p^4 - q^4$ ein Quadrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey, ist schon oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b - a = 2$, und $c - a = -2$, das ist $b = a + 2$ und $c = a - 2$, so müßten, wenn man wiederum $z = \frac{p}{q}$ annähme, die zwey Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 - 2q^2$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product $p^4 - 4q^4$, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b - a = m$ und $c - a = n$, ferner auch $z = \frac{p}{q}$, so müssen die Formeln $p^2 + mq^2$
und

und $p^2 + nq^2$ Quadrate seyn, welches, wie wir eben gesehen haben, unmöglich ist, wenn entweder $m = +1$ und $n = -1$, oder wenn $m = +2$ und $n = -2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich, wenn $m = f^2$ und $n = -f^2$ ist. Denn alsdann würde das Product derselben $p^4 - f^4 q^4$ eine Differenz zweyer Bi-quadrate seyn, welche niemals ein Quadrat werden kann.

Eben so, wenn $m = 2f^2$ und $n = -2f^2$, so können auch die Formeln $p^2 + 2f^2 q^2$ und $p^2 - 2f^2 q^2$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4 - 4f^4 q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich, wenn man $f q = r$ annähme, die Formel $p^4 - 4r^4$, wovon die Unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, so daß die Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 2q^2$ Quadrate seyn müßten, so setze man $p^2 + q^2 = r^2$ und $p^2 + 2q^2 = s^2$; dann wird aus der erstern $p^2 = r^2 - q^2$, und also die andere $r^2 + q^2 = s^2$; daher müßte sowohl $r^2 - q^2$ als $r^2 + q^2$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus zeigt sich nun hinlänglich, daß es nicht leicht sey, solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einzige Mittel, solche Werthe für m und n zu finden, ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder auf solche Weise aufzufinden suche.

Nimmt man $f^2 + mg^2 = h^2$ und $f^2 + ng^2 = k^2$ an, so bekommt man aus der erstern $m = \frac{h^2 - f^2}{g^2}$, und aus der andern $n = \frac{k^2 - f^2}{g^2}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so

bestimmt man für m und n solche Werthe, in welchen die Auflösung möglich ist.

Es sey z. B. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ und $g = 2$; so wird $m = 2$ und $n = 6$. Jetzt sind wir versichert, daß es möglich sey, die zwey Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten zu machen, weil solches geschieht, wenn $p = 1$ und $q = 2$ ist. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat, wenn $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$; denn alsdann wird $p^2 + 2q^2 = (r^2 + 2s^2)^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $p^2 + 6q^2 = r^4 + 20r^2s^2 + 4s^4$, wovon ein Fall bekannt ist, in welchem dieselbe ein Quadrat wird, nemlich wenn $p = 1$ und $q = 2$, und dieses geschieht, wenn $r = 1$ und $s = 1$, oder wenn überhaupt $r = s$; denn alsdann wird unsere Formel $25s^4$. Da wir nun diesen Fall wissen, so setzen wir $r = s + t$, so wird $r^2 = s^2 + 2st + t^2$ und $r^4 = s^4 + 4s^3t + 6s^2t^2 + 4st^3 + t^4$; daher unsere Formel seyn wird: $25s^4 + 44s^3t + 26s^2t^2 + 4st^3 + t^4$; von dieser sey die Wurzel $5s^2 + fst + t^2$, wovon das Quadrat $25s^4 + 10fs^3t + 10s^2t^2 + 2fst^3 + f^2s^2t^2$

$+ t^4$ ist, wo sich die ersten und letzten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eins aufheben, welches geschieht, wenn $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdann geben die übrigen, durch s^2t dividirt, die Gleichung $44s + 26t = 10fs + 10t + f^2t = 20s + 14t$, oder $2s = -t$ und $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$, daher wird $s = -1$ und $t = 2$, oder $t = -2s$, folglich $r = -s$ und $r^2 = s^2$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Man nehme f so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben; dieses geschieht, wenn $44 = 10f$, oder $f = \frac{22}{5}$, wo dann die übrigen Glieder, durch s^2t^2

st^2 dividirt, $26s + 4t = 10s + f^2s + 2ft$ geben, das ist $-\frac{8}{5}s = \frac{2}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$; daher $r = 3$, und $s = 10$; hieraus bekommen wir $p = 2s^2 - r^2 = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln $p^2 + 2q^2 = 43681 = 209^2$, und $p^2 + 6q^2 = 58081 = 241^2$ werden.

§. 224.

Anmerkung. Dergleichen Zahlen für m und n , wo sich unsere Formeln zu Quadraten machen lassen, können nach der obigen Art noch mehrere gefunden werden. Es ist aber zu merken, daß das Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sey dieses Verhältniß wie a zu b , und man setze $m = az$ und $n = bz$, so kömmt es nun darauf an, wie man z bestimmen soll, damit die beyden Formeln $p^2 + azq^2$ und $p^2 + bzq^2$ zu Quadraten gemacht werden können? Wir wollen dieses in der folgenden Aufgabe zeigen.

§. 225.

IX. Aufg. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, die Zahl z zu finden, daß sich die beyden Formeln $p^2 + azq^2$ und $p^2 + bzq^2$ zu Quadraten machen lassen, und zugleich die kleinsten Werthe für p und q zu bestimmen.

Man nehme $p^2 + azq^2 = r^2$ und $p^2 + bzq^2 = s^2$, und multiplicire die erstere mit b , die andere aber mit a , so giebt die Differenz derselben die Gleichung $(b - a)p^2 = br^2 - as^2$ und also $p^2 = \frac{br^2 - as^2}{b - a}$, welche Formel daher ein Quadrat seyn muß. Da
nun

nun dieses geschieht, wenn $r = s$, so setze man, um die Brüche wegzubringen, $r = s + (b-a)t$, so wird $p^2 = \frac{br^2 - as^2}{b-a} = \frac{bs^2 + 2b(b-a)st + b(b-a)^2t^2 - as^2}{b-a}$
 $= \frac{(b-a)s^2 + 2b(b-a)st + b(b-a)^2t^2}{b-a} = s^2 + 2bst + b$

$(b-a)t^2$. Nun setze man $p = s + \frac{x}{y}t$, so wird

$$p^2 = s^2 + \frac{2x}{y} \cdot st + \frac{x^2}{y^2}t^2 = s^2 + 2bst + b(b-a)t^2,$$

wo sich die s^2 aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit y^2 multiplicirt, geben: $2bsy^2 + b(b-a)ty^2 = 2sxy + tx^2$, daraus $t = \frac{2sxy - 2bsy^2}{b(b-a)y^2 - x^2}$, daher $\frac{t}{s} = \frac{2xy - 2by^2}{b(b-a)y^2 - x^2}$. Hier-

aus bekommt man $t = 2xy - 2by^2$ und $s = b(b-a)y^2 - x^2$; ferner $r = 2(b-a)xy - b(b-a)y^2 - x^2$, und daraus $p = s + \frac{x}{y} \cdot t = b(b-a)y^2 + x^2 - 2bxy = (x - by)^2 - aby^2$. Da wir

nun p nebst r und s gefunden haben, so ist nur noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu dem Ende die erste Gleichung $p^2 + azq^2 = r^2$ von der andern $p^2 + bzq^2 = s^2$, so giebt der Rest $zq^2(b-a) = s^2 - r^2 = (s+r) \cdot (s-r)$. Da nun $s+r = 2(b-a)xy - 2x^2$ und $s-r = 2b(b-a)y^2 - 2(b-a)xy$; oder $s+r = 2x((b-a)y - x)$ und $s-r = 2(b-a)y(by - x)$, so wird $(b-a)zq^2 = 2x((b-a)y - x) \cdot 2(b-a)y(by - x)$ oder $zq^2 = 2x((b-a)y - x) \cdot 2y(by - x)$ oder $zq^2 = 4xy((b-a)y - x)(by - x)$; folglich $z = \frac{4xy((b-a)y - x)(by - x)}{q^2}$.

Daher für q^2 das größte Quadrat genommen werden muß, durch welches sich der Zähler theilen läßt; für

für p aber haben wir schon $p = b(b - a)y^2 + x^2 - 2bxy = (x - by)^2 - aqy^2$ gefunden, woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wenn man $x = y + by$ oder $x - by = y$ annimmt; denn alsdann wird $p = v^2 - aby^2$, und $z = \frac{4(v+by) \cdot y \cdot v(v+ay)}{q^2}$ oder $z = \frac{4vy(v+by)(v+ay)}{q^2}$,

wo die Zahlen v und y nach Belieben angenommen werden können, und alsdann findet man zuerst q^2 , indem dafür das größte Quadrat genommen wird, welches in dem Zähler enthalten ist, woraus sich sodann z ergibt; wo dann $m = az$ und $n = bz$, endlich aber $p = v^2 - aby^2$ wird; und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln.

I. $p^2 + azq^2 = (v^2 - aby^2)^2 + 4avy(v + ay)(v + by)$, welche ein Quadrat ist, von welchen die Wurzel $r = \sqrt{v^2 - 2avy - aby^2}$ ist.

II. Die zweite Formel aber wird $p^2 + bzq^2 = (v^2 - aby^2)^2 + 4bvy(v + ay)(v + by)$, welches auch ein Quadrat ist, wovon die Wurzel $s = \sqrt{v^2 - 2bvy - aby^2}$, wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können; es wird gut seyn, dieses noch mit einigen Beispielen zu erläutern.

§. 226.

I. Beispiel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z , so daß die beyden Formeln $p^2 - zq^2$ und $p^2 + zq^2$ Quadrate werden können; die erstere nemlich $= r^2$, und die andere $= s^2$.

Hier wird $p = v^2 + y^2$ und man hat also, um z zu finden, die Formel $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{q^2}$ zu betrachten, wo wir dann für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folgt:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
v-y	1	1	3	1	7	7
v+y	3	5	5	9	25	9
zq ²	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
q ²	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadraten gemacht werden können.

I. Können die zwey Formeln $p^2 - 6q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten gemacht werden; dieses geschieht, wenn $p = 5$ und $q = 2$. Denn alsdann wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch folgende zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden: $p^2 - 30q^2$ und $p^2 + 30q^2$, welches geschieht, wenn $p = 13$ und $q = 2$; denn alsdann wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Kann man auch die beyden Formeln $p^2 - 15q^2$ und $p^2 + 15q^2$ zu Quadraten machen, welches geschieht, wenn $p = 17$ und $q = 4$; denn alsdann wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch folgende zwey Formeln Quadrate werden: $p^2 - 5q^2$ und $p^2 + 5q^2$; dieses geschieht, wenn $p = 41$ und $q = 12$, denn alsdann wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Kann man auch die beyden Formeln $p^2 - 7q^2$ und $p^2 + 7q^2$ zu Quadraten machen; dieses geschieht, wenn $p = 337$ und $q = 120$; denn dann

dann wird die erste $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, und die andere $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VL Können auch die zwey Formeln $p^2 - 14q^2$ und $p^2 + 14q^2$ zu Quadraten gemacht werden; welches geschieht, wenn $p = 65$ und $q = 12$; denn alsdann wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$, und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

§. 227.

II Beyspiel: Wenn die beyden Zahlen m und n sich verhalten wie $1:2$, das ist, wenn $a = 1$ und $b = 2$, also $m = z$ und $n = 2z$, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so daß die Formeln $p^2 + zq^2$ und $p^2 + 2zq^2$ zu Quadraten gemacht werden können.

Man hat nicht nöthig hier die obigen allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Beyspiel kann sogleich auf das vorige gebracht werden. Denn nimmt man $p^2 + zq^2 = r^2$ und $p^2 + 2zq^2 = s^2$ an, so bekommt man aus der ersten $p^2 = r^2 - zq^2$, welcher Werth für p^2 in der zweyten gesetzt, $r^2 + zq^2 = s^2$ giebt; folglich müssen die zwey Formeln $r^2 - zq^2$ und $r^2 + zq^2$ zu Quadraten gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Beyspiels ist. Also hat man auch hier für z folgende Werthe: 6, 30, 15, 5, 7, 14, u. s. f.

Eine solche Verwandlung kann auch allgemein angestellt werden. Wenn wir annehmen, daß die beyden Formeln $p^2 + mq^2$ und $p^2 + nq^2$ zu Quadraten gemacht werden können, so wollen wir setzen $p^2 + mq^2 = r^2$ und $p^2 + nq^2 = s^2$; dann giebt die erstere $p^2 = r^2 - mq^2$, und also die zweyte $s^2 = r^2 - mq^2 + nq^2$ oder $r^2 + (n - m)q^2 = s^2$; wenn

wenn daher die erstern Formeln möglich sind, so sind auch diese $r^2 - mq^2$ und $r^2 + (n - m)q^2$ möglich; und da wir m und n unter sich verwechseln können, so sind auch die Formeln $r^2 - nq^2$ und $r^2 + (m - n)q^2$ möglich, sind aber jene Formeln unmöglich, so sind auch diese unmöglich.

§. 228.

III. Beispiel. Es seyen die Zahlen m und n wie $1:3$, oder $a = 1$ und $b = 3$, also $m = z$ und $n = 3z$, so daß die Formeln $p^2 + zq^2$ und $p^2 + 3zq^2$ zu Quadraten gemacht werden sollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$ ist, so wird die Sache möglich, so oft $zq^2 = 4vy(v + y)(v + 3y)$, und $p = v^2 - 3y^2$ ist. Man nehme daher für v und y folgende Werthe an:

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	8	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v + y$	2	5	5	9	25
$v + 3y$	4	9	7	25	43
zq^2	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
q^2	16	4.9	4.4	4.4.9.25	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z = 2$, aus welchen wir auf zweyerley Art die Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten machen können; zuerst geschieht es, wenn $p = 2$ und $q = 4$ ist, folglich auch, wenn $p = 1$ und $q = 2$; denn alsdann wird $p^2 + 2q^2 = 9$ und $p^2 + 6q^2 = 25$. Hernach geschieht es auch, wenn $p = 191$ und $q = 60$, denn alsdann wird $p^2 + 2q^2 = (209)^2$ und $p^2 + 6q^2 = (241)^2$. Ob aber nicht auch $z = 1$ seyn könnte, welches geschehen würde, wenn für zq^2 ein Quadrat heraus

heraus käme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun die Frage erörtern, ob die zwey Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

§. 229.

Man soll also untersuchen, ob die zwey Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? Man setze $p^2 + q^2 = r^2$ und $p^2 + 3q^2 = s^2$, so sind folgende Puncte zu bemerken.

- I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wenn p und q dadurch getheilt würde.
- II. Kann p keine gerade Zahl seyn; denn dann würde q ungerade, und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art: $4n + 3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; daher ist p nothwendig ungerade, und p^2 eine Zahl von dieser Art: $8n + 1$.
- III. Da nun p ungerade ist, so muß aus der ersten Form q nicht nur gerade, sondern sogar durch 4 theilbar seyn, damit q^2 eine Zahl von der Art $16n$ werde; und $p^2 + q^2$ von dieser Art $8n + 1$.
- IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar seyn; denn da würde p^2 sich durch 9 theilen lassen, q^2 aber nicht, folglich $3q^2$ nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $p^2 + 3q^2$ durch 3, nicht aber durch 9, und daher kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar seyn, daher p^2 von der Art $3n + 1$ seyn wird.

II. Theil.

3

V. Da

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen lassen: denn wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre q^2 eine Zahl von der Art $3n + 1$, und daher $p^2 + q^2$ von dieser Art $3n + 2$, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß q durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar seyn; denn wäre dieses der Fall, so wäre q nicht durch 5 theilbar und q^2 eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$, also $3q^2$ eine Zahl von der Art $5n + 3$ oder $5n + 2$, und von welcher Art auch $p^2 + 3q^2$ seyn würde, so könnte diese Formel doch kein Quadrat seyn; daher denn p nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also p^2 eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$ seyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen lasse oder nicht? Wäre q nicht durch 5 theilbar, so wäre q^2 von dieser Art $5n + 2$ oder $5n + 3$, wie wir gesehen haben, und da p^2 entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, so würde $p^2 + 3q^2$ entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$ eben wie p^2 seyn; es sey $p^2 = 5n + 1$, so müßte $q^2 = 5n + 4$ seyn, weil sonst $p^2 + q^2$ kein Quadrat seyn könnte; alsdann aber wäre $3q^2 = 5n + 2$, und $p^2 + 3q^2 = 5n + 3$, welches kein Quadrat seyn kann; wäre aber $p^2 = 5n + 4$, so müßte $q^2 = 5n + 1$ und $3q^2 = 5n + 3$ seyn, folglich $p^2 + 3q^2 = 5n + 2$, welches auch kein Quadrat seyn kann; woraus denn folgt, daß q^2 durch 5 theilbar seyn müsse.

VIII. Da nun q zuerst durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß q eine solche Zahl seyn: $4 \cdot 3 \cdot 5^m$,
oder

oder $q = 60m$; daher unsere Formeln seyn würden: $p^2 + 3600m^2 = r^2$ und $p^2 + 10800m^2 = s^2$; wo denn die erste von der zweyten subtrahirt, giebt $7200m^2 = s^2 - r^2 = (s + r)(s - r)$; so daß $s + r$ und $s - r$ Factoren von $7200m^2$ seyn müssen; wobei zu bemerken ist, daß sowohl s als r ungerade Zahlen, und dabey unter sich untheilbar seyn müssen.

IX. Es sey daher $7200m^2 = 4fg$ oder die Factoren davon $2f$ und $2g$, und man setze $s + r = 2f$ und $s - r = 2g$, so wird $s = f + g$, und $r = f - g$; wo dann f und g unter sich untheilbar seyn müssen, und die eine gerade und die andere ungerade. Da nun $fg = 1800m^2$, so muß man $1800m^2$ in zwey Factoren zerlegen, deren einer gerade, der andere aber ungerade sey, beyde aber unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

X. Ferner ist auch noch zu bemerken, daß, da $r^2 = p^2 + q^2$ und also r ein Theiler von $p^2 + q^2$ ist, die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zweyen Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerade ist, in der Form $4n + 1$ enthalten seyn müsse.

XI. Nehmen wir erstlich $m = 1$ an, so wird $fg = 1800 = 8. 9. 25$, woraus folgende Zerlegungen entstehen: $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$ und $g = 25$, oder $f = 225$ und $g = 8$; aus dem ersten wird $r = f - g = 1779 = 4n + 3$; nach der andern würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; daher die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupte

schließen kann, daß der größere Factor ungerade, der kleinere aber gerade seyn müsse; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

XII. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 \cdot 225$, daher nimmt man $t = 225$ und $g = 32$, so daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine Summe von zwey Quadraten ist und also verdient versucht zu werden. Da nun $q = 120$ und $r = 193$, so wird, weil $p^2 = r^2 - q^2 = (r + q) \cdot (r - q)$, also $r + q = 313$ und $r - q = 73$, also sieht man wohl, daß für p^2 kein Quadrat herauskomme, weil diese Factoren keine Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergeblich seyn, wie wir noch zeigen wollen.

§. 230.

Lehrsatz. Es ist nicht möglich, daß die zwey Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere niemals eines.

Dieses läßt sich auf folgende Art beweisen:

Da p ungerade und q gerade ist, wie wir gesehen haben, so kann $p^2 + q^2$ nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2rs$ und $p = r^2 - s^2$ ist; die andere aber $p^2 + 3q^2$ kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2tu$ und $p = t^2 - 3u^2$ oder $p = 3u^2 - t^2$ ist. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde $q = 2abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die andere aber $t = ac$ und $u = bd$,
so

so wird für die erstere $p = a^2b^2 - c^2d^2$, für die andere aber $p = a^2c^2 - 3b^2d^2$, oder $p = 3b^2d^2 - a^2c^2$, welche beyde Werthe einerley seyn müssen; daher bekommen wir entweder $a^2b^2 - c^2d^2 = a^2c^2 - 3b^2d^2$, oder $a^2b^2 - c^2d^2 = 3b^2d^2 - a^2c^2$; woben zu bemerken ist, daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q . Wir müssen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders betrachten; aus dem ersten erhalten wir $a^2b^2 + 3b^2d^2 = a^2c^2 + c^2d^2$ oder $b^2(a^2 + 3d^2) = c^2(a^2 + d^2)$, daraus wird $\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + d^2}{a^2 + 3d^2}$, welcher Bruch ein Quadrat seyn muß. Hier kann aber der Zähler und Nenner keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben als 2, weil die Differenz zwischen beyden $2d^2$ ist. Sollte daher 2 ein gemeinschaftlicher Theiler seyn, so müßte sowohl $\frac{a^2 + d^2}{2}$ als auch $\frac{a^2 + 3d^2}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerade und also ihre Quadrate von der Form $8n + 1$, daher die letztere Formel $\frac{a^2 + 3d^2}{2}$ die Form $4n + 2$ haben wird und kein Quadrat seyn kann. Folglich kann 2 kein gemeinschaftlicher Theiler seyn, sondern der Zähler $a^2 + d^2$ und der Nenner $a^2 + 3d^2$ sind unter sich untheilbar; daher ein jeder für sich ein Quadrat seyn muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß, wenn die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen ähnliche Formeln Quadrate seyn würden; also kann man hinwiederum schließen, daß, da man in kleinern Zahlen keine Quadrate gefunden hat, es auch nicht in den größten Zahlen vergleichen geben kann.

Dieser Schluß ist aber nur in so fern richtig, als auch der obige zweyte Fall $a^2b^2 - c^2d^2 = 3b^2d^2 - a^2c^2$

— a^2c^2 auf dergleichen führt; hieraus aber wird
 $a^2b^2 + a^2c^2 = 3b^2d^2 + c^2d^2$, oder $a^2(b^2 + c^2)$
 $= d^2(3b^2 + c^2)$, und daher $\frac{a^2}{d^2} = \frac{b^2 + c^2}{3b^2 + c^2} = \frac{c^2 + b^2}{c^2 + 3b^2}$,
 welcher Bruch ein Quadrat seyn muß, so daß das
 durch der vorige Schluß vollkommen bestätigt wird;
 denn wenn es in den größten Zahlen solche Fälle
 gäbe, in welchen $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ Quadrate
 wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen
 vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt
 findet.

§. 231.

XII. Aufg. Man soll drey solche Zah-
 len finden x , y und z , so daß, wenn je
 zwey mit einander multiplicirt werden
 und zum Product 1 addirt wird, ein
 Quadrat herauskomme.

Es müssen also folgende drey Formeln zu Qua-
 draten gemacht werden: I. $xy + 1$; II. $xz + 1$;
 III. $yz + 1$.

Man setze für die beyden letztern $xz + 1 = p^2$
 und $yz + 1 = q^2$, so findet man daraus $x = \frac{p^2 - 1}{z}$

und $y = \frac{q^2 - 1}{z}$, woraus die erste Formel wird
 $\frac{(p^2 - 1)(q^2 - 1)}{z^2} + 1$, welche ein Quadrat seyn soll,

und also auch mit z^2 multiplicirt, das ist $(p^2 - 1)$
 $(q^2 - 1) + z^2$, welche leicht dazu gemacht werden
 kann. Denn setzt man die Wurzel davon $= z + r$,
 so bekommt man $(p^2 - 1)(q^2 - 1) = 2rz + r^2$,
 und daher $z = \frac{(p^2 - 1)(q^2 - 1) - r^2}{2r}$, wo für p , q

und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es

Es sey z. B. $r = -pq - 1$, so wird $r^2 = p^2q^2 + 2pq + 1$ und $z = \frac{-2pq - p^2 - q^2}{-2pq - 2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2}{2pq + 2}$,
 folglich $x = \frac{(p^2 - 1)(2pq + 2)}{pq + 2pq + q^2} = \frac{2(pq + 1)(p^2 - 1)}{(p + q)^2}$, und
 $y = \frac{2(pq + 1)(q^2 - 1)}{(p + q)^2}$.

Will man aber ganze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy + 1 = p^2$ und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweite Formel $x^2 + xy + xq + 1 = x^2 + qx + p^2$; die dritte aber wird $xy + y^2 + qy + 1 = y^2 + qy + p^2$, welche offenbar Quadrate werden, wenn man $q = \pm 2p$ annimmt, denn da wird die zweite $x^2 \pm 2px + p^2$, von welcher die Wurzel $x \pm p$ ist, die dritte aber wird $y^2 \pm 2py + p^2$, davon die Wurzel $y \pm p$ ist; daher haben wir folgende sehr schöne Auflösung: $xy + 1 = p^2$ oder $xy = p^2 - 1$, welches für eine jede Zahl, die nur immer für p angenommen werden mag, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, welches wir durch folgende Beispiele erläutern wollen:

- I. Man nehme $p = 3$, so wird $p^2 - 1 = 8$: nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$; und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.
- II. Es sey $p = 4$, so wird $p^2 - 1 = 15$; nun nehme man $x = 5$ und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$; und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.
- III. Es sey $p = 5$, so wird $p^2 - 1 = 24$; nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$; woraus folgende Zahlen entstehen,

3 4

stehen,

stehen, als: entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

§. 232.

XIII. Aufg. Man suche drey ganze Zahlen x , y und z , so daß, wenn zu dem Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat herauskomme.

Es müssen also folgende drey Formeln Quadrate werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = p^2$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweite $x^2 + xy + xq + a = x^2 + xq + p^2$ und die dritte $xy + y^2 + yq + a = y^2 + yq + p^2$, welche beyde Quadrate werden, wenn $q = \pm 2p$ ist; so daß $z = x + y \pm 2p$, und daher für z zwey Werthe gefunden werden können.

§. 233.

XIV. Aufg. Man verlange vier ganze Zahlen x , y , z und v , so daß, wenn zu dem Producte aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat herauskomme.

Es müssen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$; IV. $xv + a$; V. $yv + a$; VI. $zv + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = p^2$ und nehme $z = x + y + 2p$, so wird die zweite und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x + y - 2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und es bleibt also nur noch die sechste übrig, welche $x^2 + 2xy + y^2 - 4p^2 + a$ seyn wird und ein Quadrat seyn muß. Da nun $p^2 = xy + a$ ist, so wird die letzte Formel $x^2 - 2xy + y^2 - 3a$,

— $3a$, folglich müssen noch folgende zwei Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a = p^2$ und II. $(x - y)^2 - 3a$. Von der letztern sey die Wurzel $(x - y) - q$, so wird $(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + q^2$, und dann wird $-3a = -2q(x - y) + q^2$ und folglich $x - y = \frac{q^2 + 3a}{2q}$ oder $x = y + \frac{q^2 + 3a}{2q}$; hieraus wird $p^2 = y^2 + \frac{q^2 + 3a}{2q}y + a$. Man nehme $p = y + r$, so wird $2ry + r^2 = \frac{q^2 + 3a}{2q}y + a$, oder $4qry + 2qr^2 = (q^2 + 3a)y - 4qry$ und $y = \frac{2qr^2 - 2aq}{q^2 + 3a - 4qr}$, wo q und r nach Belieben angenommen werden können, und es also nur noch darauf ankommt, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Denn weil $p = y + r$ ist, so werden auch z und v ganze Zahlen seyn. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, wo es mit den ganzen Zahlen noch einige Schwierigkeit haben könnte; allein es ist zu bemerken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränkt ist, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben worden, indem diese nothwendig noch viele andere haben könnten. Wir wollen zu dem Ende über diese Frage noch folgende Betrachtungen anstellen, die auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

- I. Wenn $xy + a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy = p^2 - a$ ist, so müssen die Zahlen x und y immer in der ähnlichen Form $r^2 - as^2$ enthalten seyn; wenn wir daher $x = b^2 - ac$ und $y = d^2 - ae^2$ annehmen, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun $be - cd$

$ed = \pm 1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$
und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Nehmen wir nun ferner $z = f^2 - ag^2$ und die
Zahlen f und g so an, daß $bg - cf = \pm 1$
und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch die
Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden.
Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen
für b, c und d, e und auch für f und g zu
finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch
folgende Brüche vorstellen: $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$,
welche daher so beschaffen seyn müssen, daß die
Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch
ausgedrückt werde, dessen Zähler $= 1$ ist.
Denn da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce}$ ist, so muß des-
sen Zähler, wie wir gesehen haben, allerdings
 ± 1 seyn. Man kann hier einen von diesen
Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht
einen andern dazu finden, so daß die angezeigte
Bedingung statt finde.

Es sey z. B. der erste $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, so muß der zweyte
 $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so
wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen
zweiten Bruch aus dem ersten auf eine allgemeine
Art bestimmen; denn da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, so
muß $3e - 2d = 1$, also $2d = 3e - 1$ und $d = e$
 $+ \frac{e-1}{2}$ seyn. Man nehme daher $\frac{e-1}{2} = m$ oder
 $e = 2m + 1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und
unser

unser zweyter Bruch wird seyn: $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Eben

so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruche der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Beispiele hinzusetzen wollen.

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es ganz leicht, dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu finden, welcher mit den beyden ersten in gleichem Verhältnisse steht. Man darf nur $f = b + d$ und $g = c + e$ annehmen, so daß $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, denn da aus den zwey ersten

$$be - cd = \pm 1 \text{ ist, so wird } \frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\pm 1}{c^2 + ce}.$$

Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{c^2 + ce} = \frac{\pm 1}{ce + e^2}.$

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus sogleich unsere Frage für drey Zahlen x , y und z auflösen, so daß die drey Formeln $xy + a$, $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Denn man darf nur $x = b^2 - ac^2$, $y = d^2 - ae^2$ und $z = f^2 - ag^2$ annehmen. Man nehme z. B. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{3}$, so wird

wird $\frac{f}{e} = \frac{1}{7}$; hieraus erhält man $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$ und $z = 144 - 49a$; denn alsdann wird $xy + a = 1225 - 840a + 144a^2 = (35 - 12a)^2$; ferner wird $xz + a = 3600 - 2520a + 441a^2 = (60 - 21a)^2$ und $yz + a = 7056 - 4704a + 784a^2 = (84 - 28a)^2$.

§. 234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen, x , y , z und v gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten hinzufügen. Es seyen daher die drey ersten $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältnisse stehe; wenn man nun annimmt, daß $x = b^2 - a^2c^2$; $y = d^2 - ae^2$; $z = f^2 - ag^2$ und $v = h^2 - ak^2$ sey, so werden schon folgende Bedingungen erfüllt: I. $xy + a = \square^*$; II. $xz + a = \square$; III. $yz + a = \square$; IV. $yv + a = \square$; V. $zv + a = \square$; es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbst nicht geschieht, weil der erste Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältnisse steht. Es ist daher nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beizubehalten, und diese so zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

VI. Man nehme daher aus der obigen Tabelle den

$$\text{ersten Fall und setze } \frac{b}{c} = \frac{3}{2}, \text{ und } \frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1},$$

so

*) $\square$ deutet hier jedesmal eine Quadratzahl an.

so wird $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x = 9 - 4a$ und $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$, also $xv + a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4a^2(4m+4)^2$ oder $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288m^2 + 538m + 243) + 4a^2(4m+4)^2$, welche leicht zu einem Quadrate gemacht werden kann, weil m^2 mit einem Quadrate multiplicirt ist; wobey wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man kann auch solche Brüche als dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen; denn es sey $\frac{b}{c} = \frac{1}{1}$, $\frac{d}{e} = \frac{nl-1}{n}$, so wird $\frac{f}{g} = \frac{nl+1-1}{n+1}$ und $\frac{g}{k} = \frac{2nl+1-2}{2n+1}$; man setze für den letzten $2n+1 = m$, so wird derselbe $\frac{1m-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x = M - a$ und aus dem letzten $v = (1m-2)^2 - am^2$. Also ist nur noch übrig, daß $vx + a$ ein Quadrat werde. Da nun $v = (11-a)m^2 - 41m + 4$ und also $xv + a = (11-a)^2 m^2 - 4(11-a)1m + 411 - 3a$, welches ein Quadrat seyn muß; von diesem setze man nun die Wurzel $(11-a)m - p$, wovon das Quadrat $(11-a)^2 m^2 - 2(11-a)mp + p^2$, woraus wir $-4(11-a)1m + 411 - 3a = -2(11-a)mp + p^2$ und $m = \frac{p^2 - 411 + 3a}{(11-a)(2p-41)}$ erhalten. Man nehme $p = 21 + q$, so wird $m = \frac{41q + q^2 + 3a}{2q(11-a)}$, wo für 1 und q beliebige Zahlen angenommen werden können.

Wäre

Wäre z. B. $a = 1$, so nehme man $I = 2$, dann wird $m = \frac{4q + q^2 + 3}{6q}$; setzt man $q = 1$, so wird $m = \frac{4}{3}$ und $m = 2n + 1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sonderu zur folgenden Frage fortgehen.

§. 235.

XV. Aufg. Man verlangt drey solche Zahlen x , y und z , daß sowohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde.

Es müssen also die folgenden sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $x + y$; II. $x + z$; III. $y + z$; IV. $x - y$; V. $x - z$; VI. $y - z$. Man fange bey den drey letzten an, und nehme $x - y = p^2$, $x - z = q^2$ und $y - z = r^2$ an, so bekommen wir aus den beyden letzten $x = q^2 + z$ und $y = r^2 + z$, daher die erstere $x - y = q^2 - r^2 = p^2$, oder $q^2 = p^2 + r^2$ giebt, so daß die Summe der Quadrate $p^2 + r^2$ ein Quadrat seyn muß, nemlich q^2 ; dieses geschieht, wenn $p = 2ab$ und $r = a^2 - b^2$ ist, denn alsdann wird $q = a^2 + b^2$. Wir wollen aber indessen die Buchstaben p , q und r beybehalten und die drey ersten Formeln betrachten, wo dann zuerst $x + y = q^2 + r^2 + 2z$; zweitens $x + z = q^2 + 2z$; drittens $y + z = r^2 + 2z$. Man setze für die erstere $q^2 + r^2 + 2z = t^2$, so ist $2z = t^2 - q^2 - r^2$; daher denn noch folgende Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen: $t^2 - r^2 = \square$ und $t^2 - q^2 = \square$, das ist $t^2 - (a^2 - b^2)^2 = \square$ und $t^2 - (a^2 + b^2)^2 = \square$, welche folgende Gestalt annehmen: $t^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2$ und $t^2 - a^4 - b^4 - 2a^2b^2$; weil nun sowohl $c^2 + d^2 + 2cd$ als $c^2 + d^2 - 2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man, daß

daß wir unsern Zweck erreichen, wenn wir $t^2 - a^4 - b^4$ mit $c^2 + d^2$ und $2a^2b^2$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerkstelligen, so wollen wir $cd = a^2b^2 = f^2g^2h^2k^2$ setzen und $c = f^2g^2$ und $d = h^2k^2$ annehmen; $a^2 = f^2h^2$ und $b^2 = g^2k^2$ oder $a = fh$ und $b = gk$, woraus die erstere Gleichung $t^2 - a^4 - b^4 = c^2 + d^2$ die Form $t^2 - f^4h^4 - g^4k^4 = f^4g^4 + h^4k^4$ erhält und also $t^2 = f^4g^4 + f^4h^4 + h^4k^4 + g^4k^4$, das ist $t^2 = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$, welches Product also ein Quadrat seyn muß, wovon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen daher auf eine andere Art verfahren, und aus den drey erstern Gleichungen $x - y = p^2$; $x - z = q^2$; $y - z = r^2$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche $y = x - p^2$ und $z = x - q^2$ seyn werden, so daß $q^2 = p^2 + r^2$. Nun werden die ersten Formeln $x + y = 2x - p^2$, $x + z = 2x - q^2$; und $y + z = 2x - p^2 - q^2$; für diese letzte setze man $2x - p^2 - q^2 = t^2$, so daß $2x = t^2 + p^2 + q^2$ und nur noch die Formeln $t^2 + q^2$ und $t^2 + q^2$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber $q^2 = p^2 + r^2$ seyn muß, so setze man $q = a^2 + b^2$, und $p = a^2 - b^2$, so wird $r = 2ab$; hieraus werden unsere Formeln seyn:

- I. $t^2 + (a^2 + b^2)^2 = t^2 + a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = \square$
- II. $t^2 + (a^2 - b^2)^2 = t^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = \square$.

Vergleichen wir nun hier nochmals $t^2 + a^4 + b^4$ mit $c^2 + d^2$, und $2a^2b^2$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Zweck: wir nehmen daher, wie oben, $c = f^2g^2$, $d = h^2k^2$ und $a = fh$, $b = gk$ an, so wird $cd = a^2b^2$, und $t^2 + f^4h^4 + g^4k^4$ muß noch $= c^2 + d^2 = f^4g^4 + h^4k^4$ seyn, woraus $t^2 = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$ folgt. Es kommt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als

$f^4 - k^4$

$f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multipliziert, ein Quadrat machen.

Wir wollen zu dem Ende die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen, welche Zahlen daraus entspringen, wenn für m und n gegebene Zahlen angenommen werden, und dabey die Quadrate, so darin enthalten sind, besonders bemerken. Weil nun $m^4 - n^4 = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$ ist, so wollen wir daraus folgende Tafel anfertigen:

Tafel
für die Zahlen, welche in der Form $m^4 - n^4$
enthalten sind

m^2	n^2	$m^2 - n^2$	$m^2 + n^2$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3.5
9	1	8	10	16.5
9	4	5	13	5.13
16	1	15	17	3.5.17
16	9	7	25	25.7
25	1	24	26	16.3.13
25	9	16	34	16.2.17
49	1	48	50	25.16.2.3
49	16	33	65	3.5.11.13
64	1	63	65	9.5.7.13
81	49	32	130	64.5.13
121	4	117	125	25.9.5.13
121	9	112	130	16.2.5.7.13
121	49	72	170	144.5.17
144	25	119	169	169.7.17
169	1	168	170	16.3.5.7.17
169	81	88	250	25.16.5.11
225	64	161	289	289.7.23

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nemlich $f^2 = 9$ und $k^2 = 4$, so wird

wird $f^4 - k^4 = 13 \cdot 5$; ferner nehme man $g^2 = 81$ und $h^2 = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64 \cdot 5 \cdot 13$, woraus $t^2 = 64 \cdot 25 \cdot 169$; folglich $t = 520$. Da nun $t^2 = 270400$; $f = 3$, $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, so bekommen wir $a = 21$; $b = 18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man $2x = t^2 + p^2 + q^2 = 869314$ und also $x = 434657$; daher ferner $y = x - p^2 = 420968$; und endlich $z = x - q^2 = 150568$, welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdann die Summe in die Differenz und umgekehrt die Differenz in die Summe verwandelt wird; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen.

$$x = 434657$$

$$y = 420968$$

$$z = 150568$$

$$\text{daher wird } x + y = 855625 = (925)^2$$

$$x + z = 585225 = (765)^2$$

$$y + z = 571536 = (756)^2$$

$$\text{und weiter } x - y = 13689 = (117)^2$$

$$x - z = 284089 = (533)^2$$

$$y - z = 270400 = (520)^2$$

Noch andere Zahlen können aus der vorstehenden Tabelle gefunden werden, wenn wir $f^2 = 9$, $k^2 = 4$, und $g^2 = 121$, $h^2 = 4$ annehmen; denn daraus wird $t^2 = 13 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 25 = 9 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 169$, so daß $t = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$; hieraus wird $p = a^2 - b^2 = -448$, $q = a^2 + b^2 = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir $2x = t^2 + p^2 + q^2 = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729$, daher $x = \frac{1421729}{2}$, daraus $y = x$

II. Theil.

II a

— p²

$$-p^2 = \frac{1020321}{2} \text{ und } z = x - q^2 = 880929.$$

Nun ist zu merken, daß, wenn diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nemliche Eigenschaft behalten müssen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein Genüge leisten:

$x = 2843458$, $y = 2040642$, und $z = 1761858$, welche größer sind als die vorhergehenden, so daß jene für die möglichst kleinsten gehalten werden können.

§. 236.

XVI. Aufg. Man verlangt drey Quadratzahlen, so daß die Differenz zwischen zweyen ein Quadrat werde.

Die vorige Auflösung dient uns auch dazu, um diese aufzulösen. Denn wenn x , y und z solche Zahlen sind, daß die Formeln I. $x + y$, II. $x - y$, III. $x + z$, IV. $x - z$, V. $y + z$, VI. $y - z$ Quadrate werden, so wird auch das Product aus der ersten und zweyten $x^2 - y^2$ ein Quadrat, imgleichen auch das Product von der dritten und vierten $x^2 - z^2$, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten $y^2 - z^2$ ein Quadrat seyn, daher die drey hier gesuchten Quadrate x^2 , y^2 und z^2 seyn werden. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweifel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß, um $x^2 - y^2$ zu einem Quadrate zu machen, auch $x + y$ und $x - y$ ein jedes besonders ein Quadrat seyn müsse, indem z. B. $25 - 9$ ein Quadrat ist, da doch weder $5 + 3$ noch $5 - 3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen und zuerst bemerken, daß für

für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Denn wenn $x^2 - y^2$, $x^2 - z^2$ und $y^2 - z^2$ Quadrate sind, so bleiben dieses auch Quadrate, wenn sie durch z^2 dividirt werden; daher folgende Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen, nemlich $\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = \square$, $\frac{x^2}{z^2} - 1 = \square$, und $\frac{y^2}{z^2} - 1 = \square$.

Also kommt es nur auf die zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an; nimmt man nun $\frac{x}{z} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}$, so werden die beyden letztern Bedingungen erfüllt; denn alsdann wird $\frac{x^2}{z^2} - 1 = \frac{4p^2}{(p^2 - 1)^2}$ und $\frac{y^2}{z^2} - 1 = \frac{4q^2}{(q^2 - 1)^2}$. Es ist also nur noch übrig die

erste Formel zu einem Quadrate zu machen, welche $\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = \frac{(p^2 + 1)^2}{(p^2 - 1)^2} - \frac{(q^2 + 1)^2}{(q^2 - 1)^2} = \left(\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} + \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \right) \left(\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} - \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \right)$ ist. Hier wird

nun der erste Factor $= \frac{2(p^2 q^2 - 1)}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)}$, der andere aber $= \frac{2(q^2 - p^2)}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)}$, von welchen das Product $\frac{4(p^2 q^2 - 1)(q^2 - p^2)}{(p^2 - 1)^2 (q^2 - 1)^2}$ ist. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zähler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig die Formel $(p^2 q^2 - 1)(q^2 - p^2)$, oder auch die Formel $(p^2 q^2 - 1) \left(\frac{q^2}{p^2} - 1 \right)$ zu einem Quadrate zu ma-

chen; dieses geschieht, wenn $pq = \frac{f^2 + g^2}{2fg}$ und $\frac{q}{p} = \frac{h^2 + k^2}{2hk}$ angenommen wird, wo alsdann ein je-

U a 2

der

der Factor besonders ein Quadrat wird. Hieraus ist nun $q^2 = \frac{f^2 + g^2}{2fg} \cdot \frac{h^2 + k}{2hk}$; folglich müssen diese zwei Brüche mit einander multiplicirt, ein Quadrat ausmachen, und so auch, wenn sie mit $4f^2g^2 \cdot h^2k^2$ multiplicirt werden, das ist $fg(f^2 + g^2)hk(h^2 + k^2)$; welche Formel derjenigen, die im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wenn man $f = a + b$, $g = a - b$, $h = c + d$ und $k = c - d$ setzt, alsdann kommt $2(a^4 - b^4) \cdot 2(c^4 - d^4) = 4(a^4 - b^4)(c^4 - d^4)$, welches, wie wir gesehen haben, geschieht, wenn $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = 81$ und $d^2 = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$, $g = 1$,

$h = 16$ und $k = 2$, und daher $pq = \frac{1}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{24} = \frac{65}{6}$; diese zwei Gleichungen mit einander multiplicirt, geben $q^2 = \frac{65 \cdot 13}{16 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, daher wird $p = \frac{4}{5}$; dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} = -\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = -\frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} = \frac{185}{153}$.

Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man, um ganze Zahlen zu bekommen, $z = 153$, dann wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drey gesuchten Quadratzahlen folgende:

$$\begin{array}{lll} x^2 = 485809; & \text{denn alsdann wird} & x^2 - y^2 = 451584 = (672)^2 \\ y^2 = 34225; & \text{---} & y^2 - z^2 = 10816 = (104)^2 \\ z^2 = 23409; & \text{---} & x^2 - z^2 = 462400 = (680)^2 \end{array}$$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wenn wir von den in der vorigen Aufgabe gefundenen drey Zahlen x , y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

§. 237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns dazu die obige Tabelle behülfflich gewesen sey. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedient, um die kleinste Auflösung zu finden; wollte man aber nicht darauf sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen angegeben werden. Da es nemlich bey der letztern Frage darauf ankommt, daß das Product $(p^2q^2 - 1)$

$\left(\frac{q^2}{p^2} - 1\right)$ zu einem Quadrate gemacht werde,

weil alsdann $\frac{x}{z} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}$ seyn wird,

so setze man $\frac{q}{p} = m$ oder $q = mp$, wo dann unsere

Formel $(m^2p^4 - 1)(m^2 - 1)$ seyn wird, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn $p = 1$ ist; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wenn wir $p = 1 + s$ annehmen, alsdann aber muß die Formel $(m^2 - 1) \cdot (m^2 - 1 + 4m^2s + 6m^2s^2 + 4m^2s^3 + m^2s^4)$ ein Quadrat seyn und also auch, wenn sie durch das Quadrat $(m^2 - 1)^2$ dividirt wird, wo

dann $1 + \frac{4m^2s}{m^2 - 1} + \frac{6m^2s^2}{m^2 - 1} + \frac{4m^2s^3}{m^2 - 1} + \frac{m^2s^4}{m^2 - 1}$ herauskömmt. Man setze hier der Kürze wegen

$\frac{m^2}{m^2 - 1} = a$, so daß die Formel $1 + 4as + 6as^2 + 4as^3 + as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel desselben $1 + fs + gs^2$, deren Quadrat $1 + 2fs + 2gs^2 + f^2s^2 + 2fgs^3 + g^2s^4$ ist, und man bestimme f und g so, daß die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht, wenn $4a = 2f$ oder $f = 2a$, und $6a = 2g + f^2$, folglich $g = \frac{6a - f^2}{2}$

Ma 3

= 32

$= 3a - 2a^2$, so geben die beyden letzten Glieder die Gleichung $4a + as = 2fg + g^2s$, woraus $s = \frac{4a - 2fg}{g^2 - a} = \frac{4a - 12a^2 + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9a^2 - a}$ gefunden wird, das ist $s = \frac{4 - 12a + 8a^2}{4a^3 - 12a^2 + 9a - 1}$, welcher Bruch durch $a - 1$ abgekürzt, $\frac{4(2a - 1)}{4a^2 - 8a + 1}$ giebt. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viele Auflösungen, weil die Zahl m , aus welcher hernach $a = \frac{m^2}{m^2 - 1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Beyspiele zu erläutern noch nöthig seyn wird.

I. Es sey $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{3}$ und daher $s = 4$.

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{50}{23}, \text{ und hieraus } p = -\frac{37}{23}, \text{ folg-}$$

$$\text{lich } q = -\frac{74}{23}; \text{ endlich } \frac{x}{z} = \frac{240}{4947} \text{ und } \frac{y}{z} = \frac{5004}{4947}.$$

II. Es sey $m = \frac{3}{2}$, so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = 4$. $\frac{\frac{13}{5}}{\frac{11}{5}}$

$$= -\frac{260}{11}, \text{ daher } p = -\frac{249}{11} \text{ und } q = \frac{747}{22};$$

woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch angemerkt zu werden, wenn a ein Quadrat ist, wie dieses geschieht, wenn $m = \frac{5}{3}$, denn alsdann wird $a = \frac{25}{8}$. Man setze wieder der Kürze wegen $a = b^2$, so daß unsere Formel $1 + 4b^2s + 6b^2s^2 + 4b^2s^3 + b^2s^4$ seyn wird; von dieser sey die Wurzel $1 + 2b^2s + bs^2$, deren Quadrat $1 + 4b^2s + 2bs^2 + 4b^4s^2 + 4b^3s^3 + b^2s^4$ ist, wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s^2 dividirt, geben $6b^2 + 4b^2s = 2b + 4b^4 + 4b^3s$,
dar-

daraus $s = \frac{6b^2 - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4b^2} = \frac{3b - 1 - 2b^3}{2b^2 - 2b}$; welcher Bruch noch durch $b - 1$ abgekürzt werden kann, wo man dann $s = \frac{1 - 2b - 2b^2}{2b}$ und $p = \frac{1 - 2b^2}{2b}$ erhält.

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch $1 + 2bs + bs^2$ annehmen können, von welcher das Quadrat $1 + 4bs + 2bs^2 + 4b^2s^2 + b^2s^3 + b^2s^4$ ist, wo sich die ersten und die beyden letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt, geben $4b^2 + 6b^2s = 4b + 2bs + 4b^2s$. Da nun $b^2 = \frac{2}{1} \frac{5}{8}$ und $b = \frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s = -2$ und $p = -1$, folglich $p^2 - 1 = 0$; woraus nichts gefunden wird, weil $z = 0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p = \frac{1 - 2b^2}{2b}$, wenn $m = \frac{5}{2}$ und daher $a = \frac{2}{1} \frac{5}{2} = b^2$, folglich $b = \frac{5}{4}$, so kömmt $p = \frac{1}{2} \frac{7}{8}$ und $q = mp = \frac{1}{1} \frac{7}{2}$, folglich $\frac{x}{z} = \frac{6}{1} \frac{3}{2}$ und $\frac{y}{z} = \frac{4}{1} \frac{3}{2}$.

§. 238.

XVII. Aufg. Man verlangt drey Quadratzahlen x^2 , y^2 und z^2 , so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache.

Da nun die drey Formeln $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$ und $y^2 + z^2$ zu Quadraten gemacht werden sollen, so theile man sie durch z^2 , um die drey folgenden zu erhalten: I. $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \square$, II. $\frac{x^2}{z^2} + 1 = \square$, III. $\frac{y^2}{z^2} + 1 = \square$. Hier geschieht dann den beyden

Na 4

letztern

lestern ein Genüge, wenn $\frac{x}{z} = \frac{p^2 - 1}{2p}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 - 1}{2q}$, hieraus wird die erste Formel $\frac{(p^2 - 1)^2}{4p^2} + \frac{(q^2 - 1)^2}{4q^2}$, welches also auch mit 4 multiplicirt, ein Quadrat werden muß, das ist $\frac{(p^2 - 1)^2}{p^2} + \frac{(q^2 - 1)^2}{q^2}$; oder auch mit $p^2 q^2$ multiplicirt, $q^2 (p^2 - 1)^2 + p^2 (q^2 - 1)^2 = \square$, welches nicht wohl geschehen kann, ohne einen Fall zu wissen, in welchem diese Formel ein Quadrat wird; allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, daher man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, von welchen wir einige anführen wollen.

- I. Da sich die Formel auf folgende Art ausdrücken läßt: $q^2 (p + 1)^2 (p - 1)^2 + p^2 (q + 1)^2 (q - 1)^2 = \square$, so mache man, daß sie sich durch das Quadrat $(p + 1)^2$ theilen lasse; dieses geschieht, wenn man $q - 1 = p + 1$ oder $q = p + 2$ annimmt, wo alsdann $q + 1 = p + 3$ seyn wird, woher unsere Formel wird: $(p + 2)^2 (p + 1)^2 (p - 1)^2 + p^2 (p + 3)^2 (p + 1)^2 = \square$, welche durch $(p + 1)^2$ dividirt, ein Quadrat seyn muß, nemlich $(p + 2)^2 (p - 1)^2 + p^2 (p + 3)^2$, welches in die Form $2p^4 + 8p^3 + 6p^2 - 4p + 4$ aufgelöst wird. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, so nehme man die Wurzel $2 + fp + gp^2$ oder $gp^2 + fp + 2$ an, von welcher das Quadrat $g^2 p^4 + 2fgp^3 + 4gp^2 + f^2 p^2 + 4fp + 4$ ist, wo man f und g so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches alsdann geschieht, wenn

— $4 = 4f$, oder $f = -1$ und $6 = 4g + 1$,
 oder $g = \frac{5}{4}$, wo denn die ersten Glieder, durch
 p^3 dividirt, $2p + 8 = g^2p + 2fg = \frac{25}{16}p - \frac{5}{2}$
 geben, woraus $p = -24$ und $q = -22$ ge-
 funden wird; daher erhalten wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2 - 1}{2p}$
 $= -\frac{575}{48}$ oder $x = -\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 - 1}{2q}$
 $= \frac{483}{44}$, oder $y = \frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z = 16 \cdot 3 \cdot 11$, so wird $x =$
 $575 \cdot 11$ und $y = 483 \cdot 12$; daher sind die Wurzeln
 von den drey gesuchten Quadraten folgende:

$x = 6325 = 11 \cdot 23 \cdot 25$, denn hieraus wird
 $x^2 + y^2 = 23^2 (275^2 + 252^2) = 23^2 \cdot 373^2$
 $y = 5796 = 12 \cdot 21 \cdot 23$, dieses giebt
 $x^2 + z^2 = 11^2 (575^2 + 48^2) = 11^2 \cdot 577^2$.
 $z = 528 = 3 \cdot 11 \cdot 16$, hieraus wird
 $y^2 + z^2 = 12^2 (483^2 + 44^2) = 12^2 \cdot 485^2$.

II. Man kann noch auf unendlich viele Arten ma-
 chen, daß unsere Formel durch ein Quadrat
 theilbar wird; man setze z. B. $(q + 1)^2 =$
 $4(p + 1)^2$ oder $q + 1 = 2(p + 1)$, das
 ist $q = 2p + 1$ und $q - 1 = 2p$, woraus
 unsere Formel wird $(2p + 1)^2 (p + 1)^2 (p - 1)^2$
 $+ p^2 \cdot 4 \cdot (p + 1)^2 (4p^2) = \square$, welche durch
 $(p + 1)^2$ getheilt, giebt $(2p + 1)^2 (p - 1)^2$
 $+ 16p^4 = \square$ oder $20p^4 - 4p^3 - 3p^2 +$
 $2p + 1 = \square$, woraus aber nichts gefunden
 werden kann.

III. Man setze daher $(q - 1)^2 = 4(p + 1)^2$,
 oder $q - 1 = 2(p + 1)$, so wird $q = 2p + 3$
 und $q + 1 = 2p + 4$ oder $q + 1 = 2(p + 2)$,
 woher unsere Formel, durch $(p + 1)^2$ getheilt,
 seyn wird: $(2p + 3)^2 (p - 1)^2 + 16p^2$
 $(p + 2)^2$, das ist $9 - 6p + 53p^2 + 68p^3 +$
 $20p^4$;
 A a 5

$20p^4$; davon sey die Wurzel $3 - p + gp^2$, deren Quadrat $9 - 6p + 6gp^2 + p^2 - 2gp^3 + g^2p^4$ ist. Um nun auch die dritten Glieder verschwinden zu machen, so nehme man $53 = 6g + 1$ oder $g = \frac{25}{3}$, so werden die übrigen Glieder, durch p dividirt, $20p + 6g = g^2p - 2g$ oder $2\frac{5}{3} = \frac{40}{3}p$ geben, daher $p = \frac{4}{3}$ und $q = \frac{18}{31}$, woraus wieder eine Auflösung folgt.

IV. Man setze $q - 1 = \frac{4}{3}(p - 1)$, so wird $q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}$ und $q + 1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p + 1)$, daher wird unsere Formel, durch $(p - 1)^2$ dividirt, $\frac{(4p-1)^2}{9} - (p+1)^2 + \frac{64}{81}p^2(2p+1)^2$ seyn, welche mit 81 multiplicirt, $9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64p^2(2p+1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73p^2 - 54p + 9$ wird, wo sowohl das erste als das letzte Glied Quadrate sind. Man setze daher die Wurzel $20p^2 - 9p + 3$, von welcher das Quadrat $400p^4 - 360p^3 + 201p^2 + 120p^2 - 54p + 9$ ist und daher erhält man $472p + 73 = -360p + 201$, daher $p = \frac{1}{13}$ und $q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3}$.

Man kann auch für die obige Wurzel $20p^2 + 9p - 3$ annehmen, davon das Quadrat $400p^4 + 360p^3 - 120p^2 + 81p^2 - 54p + 9$, mit unserer Formel verglichen, giebt $472p + 73 = 360p - 39$, und daraus $p = -1$, welcher Werth aber zu nichts nützt.

V. Man kann auch machen, daß sich unsere Formel sogar durch beyde Quadrate $(p + 1)^2$ und $(p - 1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q = \frac{pt+1}{p+t}$, da wird $q + 1 = \frac{pt+p+t+1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$ und $q - 1 = \frac{pt-p}{p+t}$

$$\frac{pt - p - t + 1}{p + t} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+t}, \text{ hieraus wird}$$

$$\text{nun unsere Formel, durch } (p+1)^2 (p-1)^2 \text{ dividirt,} = \frac{(pt-1)^2}{(p+t)^2} + p^2 \frac{(t+1)^2 (t-1)^2}{(p+t)^4},$$

welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt, noch ein Quadrat seyn muß, nemlich $(pt+1)^2 (p+t)^2 + p^2 (t+1)^2 (t-1)^2$ oder $t^2 p^4 + 2t(t^2+1)p^3 + 2t^2 p^2 + (t^2+1)^2 p^2 + (t^2-1)^2 p^2 + 2t(t^2+1)p + t^2$; wo sowohl das erste als letzte Glied Quadrate sind.

Man setze daher die Wurzel $tp^2 + (t^2+1)p - t$, von welcher das Quadrat $t^2 p^4 + 2t(t^2+1)p^3 - 2t^2 p^2 + (t^2+1)^2 p^2 - 2t(t^2+1)p + t^2$ mit unserer Formel verglichen, giebt: $2t^2 p + (t^2+1)^2 p + (t^2-1)^2 p + 2t(t^2+1) = -2t^2 p + (t^2+1)^2 p - 2t(t^2+1)$, oder $4t^2 p + (t^2-1)^2 p + 4t(t^2+1) = 0$, oder $(t^2+1)^2 p + 4t(t^2+1) = 0$, das ist $t^2 + 1 = -\frac{4t}{p}$;

woraus wir $p = \frac{-4t}{t^2+1}$ erhalten; hieraus wird

$$pt + 1 = -\frac{3t^2+1}{t^2+1} \text{ und } p + t = \frac{t^3-3t}{t^2+1},$$

folglich $q = -\frac{3t^2+1}{t^3-3t}$, wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. B. $t = 2$, so wird $p = -\frac{5}{5}$ und $q = -\frac{17}{17}$; woraus wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2-1}{2p} = +\frac{30}{30}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2-1}{2q} = -\frac{17}{44}$ finden, oder $x = \frac{3 \cdot 13}{4 \cdot 4 \cdot 5} z$ und $y = \frac{9 \cdot 13}{4 \cdot 11} z$.

Man nehme nun $z = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11$, so wird $x = 3 \cdot 13 \cdot 11$ und $y = 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13$; also sind die Wurzeln

Wurzeln der drey gesuchten Quadrate $x = 3. 11. 13 = 429$, $y = 4. 5. 9. 13 = 2340$ und $z = 4. 4. 5. 11 = 880$. Welche noch kleiner sind, als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$$x^2 + y^2 = 3^2 \cdot 13^2 (121 + 3600) = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 61^2;$$

$$x^2 + z^2 = 11^2 \cdot (1521 + 6400) = 11^2 \cdot 89^2;$$

$$y^2 + z^2 = 20^2 \cdot (13689 + 1936) = 20^2 \cdot 125^2.$$

VI. Zulezt bemerken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeden Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann; denn wenn die Werthe $x = a$, $y = b$, und $z = c$ gefunden worden sind, so daß $a^2 + b^2 = \square$, $a^2 + c^2 = \square$ und $b^2 + c^2 = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten: $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, denn da wird

$$x^2 + y^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 = b^2 (a^2 + c^2) = \square$$

$$x^2 + z^2 = a^2 b^2 + a^2 c^2 = a^2 (b^2 + c^2) = \square$$

$$y^2 + z^2 = a^2 c^2 + b^2 c^2 = c^2 (a^2 + b^2) = \square.$$

Da wir nun eben $x = a = 3. 11. 13$, $y = b = 4. 5. 9. 13$ und $z = c = 4. 4. 5. 11$ gefunden haben, so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$$x = ab = 3. 4. 5. 9. 11. 13. 13.$$

$$y = bc = 4. 4. 4. 5. 5. 9. 11. 13$$

$$y = ac = 3. 4. 4. 5. 11. 11. 13$$

welche sich alle drey durch 3. 4. 5. 11. 13 theilen lassen, und also auf folgende Formel gebracht werden: $x = 9. 13$, $y = 3. 4. 4. 5$ und $z = 4. 11$, das ist $x = 117$, $y = 240$, und $z = 44$, welche noch kleiner sind als die vorigen; daher wird aber:

$$x^2 + y^2 = 71289 = 267^2.$$

$$x^2 + z^2 = 15625 = 125^2.$$

$$y^2 + z^2 = 59536 = 244^2.$$

§. 239.

XVIII. Aufg. Man verlange zwei Zahlen x und y , daß, wenn man die eine zum Quadrate der andern addirt, ein Quadrat herauskomme, so daß die zwei Formeln $x^2 + y$ und $y^2 + x$ Quadrate seyn sollen.

Wollte man sogleich für die erstere $x^2 + y = p^2$ annehmen und daraus $y = p^2 - x^2$ herleiten, so würde die andere Formel $p^4 - 2p^2x^2 + x^4 + x = \square$, von welcher die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zugleich für beide Formeln $x^2 + y = (p - x)^2 = p^2 - 2px + x^2$ und $y^2 + x = (q - y)^2 = q^2 - 2qy + y^2$, woraus wir dann folgende zwei Gleichungen erhalten: I.) $y + 2px = p^2$ und II.) $x + 2qy = q^2$, aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nem-

lich $x = \frac{2qp^2 - q^2}{4pq - 1}$ und $y = \frac{2pq^2 - q^2}{4pq - 1}$; wo man p und q nach Belieben annehmen kann. Man setze z. B. $p = 2$ und $q = 3$, so bekommt man die zwei gesuchte Zahlen $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{2}$, denn daher wird $x^2 + y = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4} = (\frac{3}{2})^2$ und $y^2 + x = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{10}{4} = (\frac{5}{2})^2$.

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{1}$ und $y = \frac{1}{1}$; weil aber eine Zahl negativ ist, so mögte man diese Auflösung nicht gelten lassen. Man setze $p = 1$ und $q = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{3}{2}$ und $y = \frac{7}{2}$, denn dann wird $x^2 + y = \frac{9}{4} + \frac{7}{2} = \frac{23}{4} = (\frac{5}{2})^2$ und $y^2 + x = \frac{49}{4} + \frac{3}{2} = \frac{55}{2} = (\frac{11}{2})^2$.

§. 240.

XIX. Aufg. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadrate ein Biquadrat sey.

Diese

Diese Zahlen seyen x und y , und weil $x^2 + y^2$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe zuerst zu einem Quadrat, welches geschieht, wenn $x = p^2 - q^2$ und $y = 2pq$ ist, wo dann $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^2$ wird. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $p^2 + q^2$ ein Quadrat seyn, daher setze man ferner $p = r^2 - s^2$ und $q = 2rs$, so wird $p^2 + q^2 = (r^2 + s^2)^2$; folglich $x^2 + y^2 = (r^2 + s^2)^4$ und also ein Biquadrat; alsdann aber wird $x = r^4 - 6r^2s^2 + s^4$ und $y = 4r^3s - 4rs^3$. Also ist noch übrig, daß die Formel $x + y = r^4 + 4r^3s - 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4$ ein Quadrat werde, man setze die Wurzel davon $r^2 + 2rs + s^2$, und also unsere Formel gleich dem Quadrate $r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rs^2 dividirt, geben $6r + 4s = -6r - 4s$ oder $12r + 8s = 0$; also $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$, oder man kann die Wurzel auch $= r^2 - 2rs + s^2$ annehmen, damit die vierten Glieder wegfallen; da nun das Quadrat hiervon $r^4 - 4r^3s + 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4$ ist, so geben die übrigen Glieder, durch r^2s dividirt, $4r - 6s = -4r + 6s$, oder $8r = 12s$, folglich $r = \frac{3}{2}s$; wenn nun $r = 3$ und $s = 2$, so würde $x = -119$ negativ.

Nehmen wir ferner $r = \frac{3}{2}s + t$ an, so wird für unsere Formel:

$$r^2 = \frac{9}{4}s^2 + 3st + t^2, \quad r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}s^2t + \frac{3}{2}st^2 + t^3$$

$$\text{folglich } r^4 = \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}s^2t^2 + 6st^3 + t^4$$

$$+ 4r^3s = \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18s^2t^2 + 4st^3$$

$$- 6r^2s^2 = -\frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6s^2t^2$$

$$- 4rs^3 = -6s^4 - 4s^3t$$

$$+ s^4 = +s^4; \text{ also unsere Formel}$$

$$\frac{1}{16}s^4 + \frac{3}{2}s^3t + \frac{5}{2}s^2t^2 + 10st^3 + t^4$$

welche

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch, wenn sie mit 16 multiplicirt wird, dann bekommt man folgendes: $s^4 + 296s^2t + 408s^2t^2 + 160st^3 + 16t^4$; hiervon nehme man die Wurzel $= s^2 + 148st - 4t^2$ an, wovon das Quadrat $s^4 + 296s^2t + 21896s^2t^2 - 1184st^3 + 16t^4$. Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber, durch st^2 dividirt, geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also $\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$. Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$, folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir $x = r^4 - 6r^2s^2 + s^4 = 4565486027761$ und $y = 1061652293520$.

XV. Capitel.

Auflösung solcher Aufgaben, zu welchen Cubi erfordert werden.

§. 241.

In dem vorigen Capitel sind solche Aufgaben vorgekommen, wo gewisse Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, wobey wir denn Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist nur noch übrig solche Aufgaben zu betrachten, wo gewisse Formeln zu einem Cubus gemacht werden sollen, wozu auch schon im vorigen Capitel die Regeln angegeben worden sind, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Aufgaben noch weit besser erläutert werden.

§. 242.