Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Euler, Leonhard

Berlin, 1797

VD18 90239571

XV. Capitel. Auflösung solcher Aufgaben, zu welchen Cubi erfordert werden.

urn:nbn:de:hbz:466:1-50547

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch, wenn sie mit 16 multiplicirt wird, dann bekömmt man folgendes: $s^4 + 296s^3t + 408s^2t^2 + 160st^3 + 16t^4$; hiervon nehme man die Wurzel $= s^2 + 148st - 4t^2$ an, wovon das Quadrat $s^4 + 296s^3t + 21896s^2t^2 - 1184st^3 + 16t^4$. Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber, durch st^2 dividirt, geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also $\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$. Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$, folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir $x = r^4 - 6r^2s^2 + s^4 = 4565486027761$ und $y = 1061652293520$.

XV. Capitel.

Auflösung solcher Aufgaben, zu welchen Cubi erfordert werden.

§. 241.

In dem vorigen Capitel sind solche Aufgaben vorgekommen, wo gewisse Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, wobey wir denn Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist nur noch übrig solche Aufgaben zu betrachten, wo gewisse Formeln zu einem Cubus gemacht werden sollen, wozu auch schon im vorigen Capitel die Regeln angegeben worden sind, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Aufgaben noch weit besser erläutert werden.

§. 242.

§. 242.

I. Aufg. Man verlangt zwey Cubus x^3 und y^3 zu wissen, deren Summe wieder ein Cubus seyn soll.

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel, durch den Cubus y^3 dividirt, noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 =$ Cubus. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$, so bekommen wir $z^3 - 3z^2 + 3z$, welches ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubicwurzel $= z - u$ annehmen, von welcher der Cubus $z^3 - 3uz^2 + 3u^2z - u^3$ ist, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u = 1$, die übrigen Glieder aber würden geben: $3z = 3u^2z - u^3 = 3z - 1$, woraus $z = \infty$ gefunden wird, welcher Werth uns aber zu nichts hilft. Man lasse aber u unbestimmt, so bekommen wir die Gleichung: $-3z^2 + 3z = -3uz^2 + 3u^2z - u^3$; aus welcher quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde; wir bekommen aber $3uz^2 - 3z^2 = 3u^2z - 3z - u^3$, das ist $= 3(u-1)z^2 = 3(u^2-1)z - u^3$, oder $z^2 = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)}$, woraus gefunden wird $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}\right)}$ oder $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3u^2-3u-3}{12(u-1)}}$.

Es kömmt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrate gebracht werde; wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nemlich $\frac{-3u^4+12u^3-18u^2+9}{36(u-1)^2}$, von welchem

Qua-

Quadrate also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, nimmt man aber nach der Regel die Wurzel davon $= gu^2 + fu + 3$ an, von welcher das Quadrat $g^2u^4 + 2fgu^3 + 6gu^2 + 2fu + 9$ ist
$+ f^2u^2$
und macht die drey letzten Glieder verschwinden, so wird zuerst $o = 2f$, das ist $f = o$, und hernach $6g + f^2 = -18$, und daher $g = -3$; alsdann geben die zwey ersten Glieder, durch u^3 dividirt, $-3u + 12 = g^2u + 2fu = 9u$; und daher $u = 1$, welcher Werth aber zu nichts führt. Wollen wir nun weiter $u = 1 + t$ annehmen, so wird unsere Formel $-12t - 3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll; dieses kann aber nicht geschehen, wenn t nicht negativ ist. Es sey also $t = -s$, so wird unsere Formel $12s - 3s^4$, welche in dem Fall $s = 1$ ein Quadrat wird, alsdann aber wäre $t = -1$ und $u = o$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreifen, wie man will, so wird man nie einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Zwecke führt, woraus man schon mit ziemlicher Gewißheit schließen kann, daß es nicht möglich sey, zwey Cubus zu finden, deren Summe ein Cubus wäre. Es läßt sich dieses aber auch noch auf folgende Art beweisen.

§. 243.

Lehrsatz. Es ist nicht möglich zwey Cubus zu finden, deren Summe oder auch deren Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß, wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist, daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich, daß $z^3 - y^3 = x^3$ sey; nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz zweyer Cubus. Es ist also hinlänglich, die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere schon daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y unter sich untheilbar sind. Denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so würden sich die Cubus durch den Cubus desselben theilen lassen. Wäre z. B. $x = 2a$, und $y = 2b$, so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.

II. Da nun u und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerade, oder die eine gerade, und die andere ungerade. Im erstern Falle müßte z gerade seyn; im andern Falle aber müßte z ungerade seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerade und eine gerade. Wir wollen daher zu unserm Beweise die beyden ungeraden nehmen, weil es gleichviel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyen also x und y zwey ungerade Zahlen, so wird sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn. Man setze daher $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus erhellt, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß; daher aber wird $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(p^2 + 3q^2)$; es muß also bewiesen werden, daß das Product $2p(p^2 + 3q^2)$ kein Cubus seyn könne. Sollte es aber von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(q^2 + 3p^2)$, welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, daher es hinlänglich ist, die Unmöglichkeit der Formel $2p(p^2 + 3q^2)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folgt, daß weder die Summe noch die Differenz zweyer Cubus ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(p^2 + 3q^2)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerade und also durch 8 theilbar; folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und noch dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(p^2 + 3q^2)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade ist, so wird $p^2 + 3q^2$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folgt, daß sich p durch 4 theilen lassen müsse und also $\frac{p}{4}$ eine ganze Zahl sey.

V. Wenn nun das Product $\frac{p}{4} \cdot (p^2 + 3q^2)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $p^2 + 3q^2$, ein Cubus seyn, wenn nemlich dieselben keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn wenn ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn; wenn diese aber einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist daher die Frage: ob die zwey Factoren p und $p^2 + 3q^2$ nicht einen gemeinschaftlichen Factor haben könnten? welches auf folgende Art untersucht wird. Hätten sie einen gemeinschaftlichen Theiler, so würden auch p^2 und $p^2 + 3q^2$ eben denselben gemeinschaftlichen Theiler haben, und also auch dieser ihre Differenz, welche $3q^2$ ist, mit dem p^2 eben denselben gemeinschaftlichen Theiler haben, da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen p^2 und $3q^2$ keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben als 3, welches geschieht, wenn sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben daher zwey Fälle zu betrachten: der erste ist, wenn die Factoren p und $p^2 + 3q^2$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, welches jedesmal geschieht, wenn sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler haben; dieses geschieht, wenn sich p durch 3 theilen läßt, wo dann beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden besonders führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey daher p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $p^2 + 3q^2$ untheilbar unter sich, so müßte jeder für sich ein Cubus seyn. Machen wir daher $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus, welches ge-

geschieht, wenn man, wie oben gezeigt worden, $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$ annimmt. Damit dadurch $p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3u^2)^3$ und also ein Cubus werde; hieraus aber wird $p = t^3 - 9tu^2 = t(t^2 - 9u^2)$, und $q = 3t^2u - 3u^3 = 3u(t^2 - u^2)$; weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerade, t aber gerade seyn, weil sonst $t^2 - u^2$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus gemacht und $p = t(t^2 - 9u^2) = t(t + 3u)(t - 3u)$ gefunden worden, so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$ ein Cubus seyn; daher die Formel $2t(t + 3u)(t - 3)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist; also sind die drey Factoren $2t$, $t + 3u$ und $t - 3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubus f^3 und g^3, deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbar ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubus x^3 und y^3. Denn nachdem wir $x = p + q$ und $y = p - q$ angenommen haben, jetzt aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müssen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wenn es also zwey solche Cubus in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleinern Zahlen eben dergleichen anzeigen, deren Summe auch ein Cubus wäre, und auf diese Art könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubus kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubus gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den größten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftigt, daß auch der andere Fall eben dahin führt, wie wir sogleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p = 3r$, so wird unsere Formel $\frac{3r}{4} \cdot (9r^2 + 3q^2)$, oder $\frac{9}{4}r\,(3r^2 + q^2)$, welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3r^2 + q^2$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben sowohl gerade seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3r^2 + q^2$ oder $q^2 + 3r^2$ zu einem Cubus, so finden wir, wie oben, $q = t\,(t^2 - 9u^2)$ und $r = 3u\,(t^2 - u^2)$; wobey zu merken ist, daß, weil q ungerade war, hier auch t ungerade, u aber eine gerade Zahl seyn müsse.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubus $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$, das ist $2u\,(t^2 - u^2) = 2u\,(t+u)\,(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte; wenn man aber

$t + u = f^3$ annimmt und $t - u = g^3$, so folgt daraus $2u = f^3 - g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Auf diese Art hätte man zwey weit kleinere Cubus f^3 und g^3, deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche, deren Summe ein Cubus wäre; denn man darf nur $f^3 - g^3 = h^3$ annehmen, so wird $f^3 = h^3 + g^3$, und also hätte man zwey Cubus, deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätigt, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubus gebe, deren Summe oder Differenz wieder ein Cubus wäre, und zwar darum, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

§. 244.

Weil es nun nicht möglich ist, zwey solche Cubus zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fällt auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit der Frage zu machen, wie drey Cubus gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache; man kann aber zwey derselben nach Belieben annehmen, so daß nur der dritte gefunden werden soll. Wir wollen daher diese Frage jetzt in Untersuchung ziehen.

§. 245.

II. Aufg. **Es wird zu zweyen gegebenen Cubus a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit jenen zusammen wieder einen Cubus ausmache.**

Es soll also die Formel $a^3 + b^3 + x^3$ ein Cubus werden; da dieses aber nicht anders geschehen kann, als wenn schon ein Fall bekannt ist, ein solcher Fall sich hier aber von selbst darbietet, nemlich $x = -a$, so setze man $x = y - a$, dann wird $x^3 = y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3$, und daher unsere Formel, die ein Cubus werden soll, $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y + b^3$, von welcher das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, daher man sogleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten nehme man die Wurzel davon $y + b$ an, deren Cubus $y^3 + 3by^2 + 3b^2y + b^3$ ist, woraus wir $-3ay + 3a^2 = 3by + 3b^2$ erhalten, daher $y = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$; folglich $x = -b$, welcher Werth uns zu nichts dient.

II. Man kann aber die Wurzel auch $= b + fy$ annehmen, von welcher der Cubus $f^3y^3 + 3bf^2y^2 + 3b^2fy + b^3$ ist; und f so bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen; dieses geschieht, wenn $3a^2 = 3b^2f$ oder $f = \frac{a^2}{b^2}$, wo dann die zwey ersten Glieder, durch y^2 dividirt, $y - 3a = f^3y + 3bf^2 = \frac{a6y}{b^6} + \frac{3a^4}{b^3}$ geben, welche mit b^6 multiplicirt, $b^6y - 3ab^6 = a^6y + 3a^4b^3$ giebt; daraus wird $y = \frac{3a^4b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3(a^3 + b^3)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3}{b^3 - a^3}$ gefunden, und also $x = y - a = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} = a \cdot \frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}$.

Wenn also die beyden Cubus a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubus gefunden, und damit diese positiv

werde,

werde, so darf man nur b^3 für den größern Cubus annehmen, welches wir noch durch einige Beyspiele erläutern wollen.

I. Es seyen die beyden gegebenen Cubus 1 und 8, so daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird die Form $9 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{17}{7}$; denn alsdann wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3$.

II. Es sey die zwey gegebenen Cubus 8 und 27, so daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird die Form $35 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyen die beyden gegebenen Cubus 27 und 64, so daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird die Form $91 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubus noch mehrere dergleichen dritte finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$, ferner $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$ annehmen, wo man dann wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber in viel zu weitschweifige Rechnungen führen würde.

§. 246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merkwürdiger Fall, wenn die beyden gegebenen Cubus einander gleich sind, oder $b = a$; wir bekommen denn $x = \frac{3a^4}{0}$, das ist unendlich, und erhalten also keine Auflösung; daher die Frage, wenn $2a^3 + x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelöset werden können. Es sey z. B. $a = 1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu merken, daß, was man auch immer für Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergeblich sind, und niemals daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann; woraus sich schon mit ziemlicher Gewißheit schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubus kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubus ausmachte, oder daß die Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folgt diese: $2a^3 = y^3 - x^3$, und daher es auch nicht möglich ist, zwey Cubus zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen ist und auf folgende Art bewiesen werden kann.

§. 247.

Lehrsatz. Weder die Summe, noch die Differenz zweyer Cubus kann jemals einem doppelten Cubus gleich werden, oder die Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer in dem Falle $y = x$, welcher für sich selbst klar ist.

Hier können wieder x und y als unter sich untheilbar angenommen werden, denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so müßte auch z dadurch theilbar seyn, und also die gaaze Gleichung durch den Cubus davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müssen beyde Zahleu x und y ungerade seyn, daher sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn wird. Man setze also $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$; wo dann von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß. Hierans folgt aber $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(p^2 + 3q^2)$, und $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(3p^2 + q^2)$, welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Daher wird es hinlänglich seyn, zu zeigen, daß die Formel $2p(p^2+3q^2)$ kein

kein doppelter Cubus, und also $p(p^2 + 3q^2)$ kein Cubus seyn könne; hiervon ist der Beweis in folgenden Sätzen enthalten.

I. Es kommen hier wieder zwey Fälle in Betrachtung; von diesen ist der erste, wenn die zwey Factoren p und $p^2 + 3q^2$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, wo dann ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler haben, der, wie wir oben gesehen haben, kein anderer als 3 seyn kann.

II. Erster Fall. Es sey daher p nicht durch 3 theilbar, und also die beyden Factoren unter sich untheilbar, so mache man zuerst $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus, welches geschieht, wenn $p = t(t^2 - 9u^2)$ und $q = 3u(t^2 - u^2)$, so daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müßte. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonst p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind die zwey Factoren t und $t^2 - 9u^2$ unter sich untheilbar, und folglich muß ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factoren, nemlich $t + 3u$ und $t - 3u$, welche unter sich untheilbar sind, zuerst weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber, weil von den Zahlen t und u die eine gerade und die andere ungerade ist. Denn wenn beyde ungerade wären, so würde nicht nur p, sondern auch q ungerade werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein jeder von diesen Factoren $t + 3u$ und $t - 3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man nehme daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$ an, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus, welcher $= k^3$ sey, so

daß

daß $f^3 + g^3 = 2h^3$ wäre, das ist, wir hätten zwey weit kleinere Cubus, nemlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze daher $p = 3r$, so wird unsere Formel $3r(9r^2 + 3q^2) = 9r(3r^2 + q^2)$, welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und daher ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letztern $q^2 + 3r^2$ zu einem Cubus zu machen, so setze man $q = t(t^2 - 9u)^2$ und $r = 3u(t^2 - u^2)$, wo dann wieder von den Zahlen t und u die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß, weil sonst die beyden Zahlen q und r gerade würden. Hieraus aber bekommenen wir den erstern Factor $9r = 27u(t^2 - u^2)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nemlich $u(t^2 - u^2)$, das ist $u(t + u)(t - u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich untheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man daher für die beyden letztern $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$, so bekömmt man $2u = f^3 - g^3$; weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahlen zwey Cubus f^3 und g^3, deren Differenz gleichfalls ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubus giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar, daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht geben könne.

IX. Man könnte zwar einwenden, daß, da es in kleinern Zahlen gleichwohl einen solchen Fall gebe, nemlich wenn $f = g$ ist, der obige Schluß

Schluß betrügen könne. Allein wenn $f = g$ wäre, so hätte man in dem ersten Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$, und da wir $x = p + q$ und $y = p - q$ angenommen haben, so wären auch die zwey ersten Cubus x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen ist. Eben so auch in dem andern Fall, wenn $f = g$ wäre, so müßte $t + u = t - u$ und also wieder $u = 0$ seyn, daher auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, wo dann wieder die beyden erstern Cubus x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber gar nicht die Rede ist.

§. 248.

III. Aufg. Man verlangt auf eine allgemeine Art drey Cubus x^3, y^3 und z^3, deren Summe wieder einen Cubus ausmache.

Wir haben schon gesehen, daß man zwey dieser Cubus für bekannt annehmen und daraus immer den dritten bestimmen könne, wenn nur die beyden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubus, und es würde sehr schwer fallen, daraus noch mehrere aufzufinden.

Wir sehen also hier alle drey Cubus als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, nehmen wir $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$ an, und bringen den einen von den erstern auf die andere Seite, damit wir $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$ bekommen; welcher Gleichung auf folgende Art ein Genüge geschehen kann.

I. Man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so wird, wie wir gesehen, $x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2)$; ferner setze man $v = r + s$ und $z = r - s$, so wird $v^3 - z^3 = 2s(s^2 + 3r^2)$; daher denn $2p(p^2 + 3q^2) = 2s(s^2 + 3r^2)$, oder $p(p^2 + 3q^2) = s(s^2 + 3r^2)$ seyn muß.

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $p^2 + 3q^2$ keine andre Theiler habe, als die selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun die beyden Formeln $p^2 + 3q^2$ und $s^2 + 3r^2$ nothwendig einen gemeinschaftlichen Theiler haben müssen, so sey derselbe $= t^2 + 3u^2$.

III. Zu diesem Ende setze man
$p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2)$ und
$s^2 + 3r^2 = (h^2 + 3k^2)(t^2 + 3u^2)$, wo dann
$p = ft + 3gu$ und $q = gt - fu$ wird;
folglich $p^2 = f^2t^2 + 6fgtu + 9g^2u^2$ und
$q^2 = g^2t^2 - 2fgtu + f^2u^2$; hieraus
$p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)t^2 + (3f^2 + 9g^2)u^2$,
das ist $p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2)$.

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel
$s = ht + 3ku$ und $r = kt - hu$,
woraus folgende Gleichung entsteht:
$(ft + 3gu)(f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2) = (ht + 3ku)(h^2 + 3k^2)(t^2 + 3u^2)$, welche durch $t^2 + 3u^2$ dividirt, $ft(f^2 + 3g^2) + 3gu(f^2 + 3g^2) = ht(h^2 + 3k^2) + 3ku(h^2 + 3k^2)$, oder $ft(f^2 + 3g^2) - ht(h^2 + 3k^2) = 3ku(h^2 + 3k^2) - 3gu(f^2 + 3g^2)$ giebt, woraus wir
$t = \frac{3k(h^2 + 3k^2 - 3g(f^2 - 3g^2)}{f(f^2 + 3g^2) - h(h^2 + 3k^2)} u$ erhalten.

V. Um nun ganze Zahlen zu bekommen, so nehme man $u = f(f^2 + 3g^2) - h(h^2 + 3k^2)$, damit $t = 3k(h^2 + 3k^2) - 3g(f^2 + 3g^2)$ sey,

sey, wo man die vier Buchstaben f, g, h und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus: I.) $p = ft + 3gu$, II.) $q = gt - fu$, III.) $s = ht + 3ku$, IV.) $r = kt - hu$, und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage $x = p + q$, $y = p - q$, $z = r - s$, und $v = r + s$, welche Auflösung so allgemein ist, daß darin alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser ganzen Rechnung keine willkührliche Einschränkung gemacht worden.

Der ganze Kunstgriff besteht darin, daß unsere Gleichung durch $t^2 + 3u^2$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich verschiedene Arten angestellt werden, von welchen wir einige Beyspiele anführen wollen.

I. Es sey $k = 0$ und $h = 1$, so wird $t = -3g(f^2 + 3g^2)$ und $u = s(f^2 + 3g^2) - 1$; hieraus also $p = -3fg(f^2 + 3g^2) + 3fg(f^2 + 3g^2) - 3g = -3g$, $q = -(f^2 + 3g^2)^2 + f$, ferner $s = -3g(f^2 + 3g^2)$ und $r = -f(f^2 + 3g^2) + 1$, woraus wir endlich bekommen: $x = -3g - (f^2 + 3g^2)^2 + f$, $y = -3g + (f^2 + 3g^2)^2 - f$, $z = (3g - f)(f^2 + 3g^2) + 1$ und endlich $v = -(3g + f)(f^2 + 3g^2) + 1$. Setzen wir nun $f = -1$ und $g = +1$, so bekommen wir $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ und $v = -7$; daher erhalten wir die Gleichung $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$ oder $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Es sey $f = 2$, $g = 1$ und also $f^2 + 3g^2 = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $h^2 + 3k^2 = 3$, so wird

wird $t = -12$ und $u = 14$ seyn; hieraus wird $p = 2t + 3u = 18$, $q = t - 2u = -40$, $r = t = -12$ und $s = 3u = 42$; daher bekommen wir $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$, $z = r - s = -54$ und $v = r + s = 30$, so daß $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$, oder $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$. Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen lassen, so wird auch $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$ seyn.

III. Es sey $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ und $k = 1$, also $f^2 + 3g^2 = 12$ und $h^2 + 3k^2 = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen lassen; und da es hier nur auf ihr Verhältniß ankömmt, so wollen wir $t = -3$ und $u = 4$ annehmen. Hieraus bekommen wir $p = 3t + 3u = +3$, $q = t - 3u = -15$, $r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = +9$; hieraus wird $x = -12$ und $y = 18$, $z = -16$ und $v = 2$, so daß $-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3$ oder $18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3$; oder auch durch 2 abgekürzt, $9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3$.

IV. Setzen wir nun $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $f^2 + 3g^2 = f^2$ und $h^2 + 3k^2 = 4h^2$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner $p = st = 12fh^3$, $q = -f^4 + 4fh^3$, $r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3$ und $s = 3hf^3$, daraus endlich $x = p + q = 16fh^3 - f^4$, $y = p - q = 8fh^3 + f^4$, $z = r - s = 16h^4 - 4hf^3$, und $v = r + s = 16h^4 + 2hf^3$. Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$, und $v = 18$, welche durch 3 abgekürzt, $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$, und $v = 6$ geben, so daß $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Hierbey ist merk-

würdig

würdig, daß die drey Wurzeln 3, 4, 5, um Eins steigen, daher wir untersuchen wollen, ob es noch mehrere dergleichen gebe?

§. 249.

IV. Aufg. Man verlangt drey Zahlen in einer arithmetischen Progression, deren Differenz $= 1$, so daß die Cubus derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubus hervorbringen.

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $= x - 1$ und die größere $= x + 1$; die Cubus derselben addirt, geben nun $3x^3 + 6x = 3x(x^2 + 2)$, welches ein Cubus seyn soll. Hiezu ist nun nöthig, daß ein Fall bekannt sey, in welchem dieses geschieht, und nach einigen Versuchen findet man $x = 4$, daher setzen wir nach den oben angegebenen Regeln $x = 4 + y$, so wird $x^2 = 16 + 8y + y^2$ und $x^3 = 64 + 48y + 12y^2 + y^3$, woraus unsere Formel wird: $216 + 150y + 36y^2 + 3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze daher die Wurzel $6 + fy$ und mache, daß die beyden ersten Glieder wegfallen; da nun der Cubus davon $216 + 108fy + 18f^2y^2 + f^3y^3$ ist, so muß $150 = 108f$, also $f = \frac{25}{18}$ seyn. Die übrigen Glieder aber durch y^2 dividirt, geben $36 + 3y = 18f^2 + f^3y = \frac{25^2}{18} + \frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3 . 36 + 18^3 . 3y = 18^2 . 25^2 + 25^3y$, oder $18^3 . 36 - 18^2 . 25^2 = 25^3y - 18^3 . 3y$, daher $y = \frac{18^3.36 - 18^2.25^2}{25^3 - 3.18^3} = \frac{18^2(18.36 - 25^2)}{25^3 - 3.18^2}$, und also $y = -\frac{324.23}{1871} = -\frac{7452}{1871}$; folglich $x = \frac{32}{1871}$.

Da es beschwerlich scheinen möchte, diese Reduction zu einem Cubus weiter zu verfolgen, so ist zu merken, daß die Frage immer auf Quadrate gebracht werden könne. Denn da $3x(x^2 + 2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $= x^3y^3$, wo man denn $3x^2 + 6 = x^2y^3$ und also $x^2 = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}$ erhält. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3 - 18$ zu einem Quadrate zu machen; wozu wieder nöthig ist, einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen lassen. Man nehme deswegen $y = 3z$ an, so wird unser Nenner $= 162z^3 - 18$, welcher durch 9 dividirt, nemlich $18z^3 - 2$, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar, wenn $z = 1$ ist; man setze daher $z = 1 + v$, so muß $16 + 54v + 54v^2 + 18v^5 = \square$ seyn. Von diesem setze man die Wurzel $4 + \frac{27}{4}v$, deren Quadrat $16 + 54v + \frac{729}{16}v^2$ ist, und also $54 + 18v = \frac{729}{16}$, oder $18v = -\frac{135}{16}$, folglich $2v = -\frac{15}{16}$, und $v = -\frac{15}{32}$, hieraus erhalten wir $z = 1 + v = \frac{17}{32}$, ferner $y = \frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher $6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2)$ war. Von diesem Factor aber $18z^3 - 2$ haben wir die Quadratwurzel $4 + \frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, also ist die Quadratwurzel aus dem ganzen Nenner $\frac{321}{128}$; aus dem Zähler aber ist dieselbe $= 6$, woraus $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$ folgt, welcher Werth von dem vorher gefundenen durchaus verschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubus folgende: I.) $x - 1 = \frac{149}{107}$, II.) $x = \frac{256}{107}$, III.) $x + 1 = \frac{363}{107}$, deren Cubus zusammen addirt, einen Cubus hervorbringen, von welchem die Wurzel $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{32} = \frac{408}{107}$ seyn wird.

§. 250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytik beschließen, weil wir bey den beygebrachten Aufgaben hinlängliche Gelegenheit gefunden haben, die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, die bisher in dieser Wissenschaft sind angewendet worden.

Ende des zweyten Theils.

Druckfehler

(im ersten Theile von Eulers Algebra.)

Im Vorbericht
Seite 2. Zeile 14. lies: unter dem
— — — 21. — Einen Auszug
— — — 26. — Ausgabe mich zu
— 5. ganz oben — des Fußes
— 6. 2. Zusatz, Zeile 10. l. oder einen Ausdruck
— 16. Z. 1. l. und den
eben daselbst, Z. 2. l. den
— 45. § 86. Z. 4. streiche: die man, weg
— 75. Z. 14. l. $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{+1}{-1}} = \sqrt{-1}$
— 80. Z. 1. l. hervorbringet
— 86. § 173. Z. 9. l. u. a^6
— 105. Z. 6 l. dem
— 106. § 217. Z. 4. l. u. $a^2 = c$ setzt,
— 107. § 220. Z. 2. streiche: wir, weg

Seite 108.