Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Erstes Buch. Die Principien.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

DIE

ELEMENTE

DER

GEOMETRIE.

ERSTES BUCH.

DIE PRINCIPIEN.

[Der Uebersetzer muſs die, welche dieſes Werk ſtudiren wollen, gleich hier darauf aufmerkſam machen, daſs Hr. Le Gendre von den Principien der Geometrie, und von der Art, wie das Gebäude der Wiſſenſchaft durch ſie begründet wird, eine unrichtige Vorſtellung zu haben ſcheint. Er ſagt in einer der Anmerkungen am Ende des Werks: „mein Zweck wird erreicht ſeyn, wenn man findet, daſs alles in dieſem Werke *aus der einzigen Erklärung der geraden Linie, ohne weitere Vorausſetzung und ohne irgend eine Forderung*, ſtreng bewieſen iſt.“ In der That findet ſich auch unter Hr. Le Gendres Principien keine einzige *Forderung*, obgleich seit Euklid noch kein Geometer Postulate entbehren zu können glaubte. Allein man wird bald gewahr, dafs der französische Geometer sich hierin nur täuscht, und dafs auch er, wenn gleich nicht ausdrücklich, doch stillschweigend voraussezet und fordert, dafs man Punkte, Winkel u. d. m. sich vorstellen, gerade Linien und Kreise beschreiben, und dergleichen geometrische Grundvorstellungen mehr müsse eingehen können. Der Uebersetzer fügt deshalb hinter den Erklärungen noch die *Forderungen* hinzu, welche man an jemand, der Geometrie studieren will, gewöhnlich zu machen pflegt. Nicht als wenn er glaubte dafs dieses die geometrischen Forderungen in ihrer wahren Gestalt, und jenes ihre gehörige Stellung sey, sondern weil beydes mit dem Herkommen seit Euklids Zeit übereinstimmt. Die Ansicht der Principien und die Art, wie man das Lehrgebäude durch sie begründet, scheint dem Uebersetzer der schwächste Theil aller bisherigen Systeme der Geometrie, und so auch des unsers Verfassers zu seyn, und nach seiner Ueberzeugung einer gänzlichen Umformung zu bedürfen. Hier war begreiflich nicht der Platz eine solche Umbildung zu versuchen; höchstens durfte sie in zerstreuten Bemerkungen und Berichtigungen angedeutet werden, indem es ganz Zweckwidrig gewesen seyn würde, wenn der Uebersetzer sich in eine polemische Materie hätte vertiefen wollen, die gehörig ausgeführt, ein eignes Werkchen füllen könnte. Er hat sich daher bey den Principien mit den unentbehrlichsten Berichtigungen, Einschaltungen und Bemerkungen begnügt, die, wenn er nicht irrt, hinreichen, den Leser auf den Standpunkt aufmerksam zu machen, welchen der Uebersetzer für den richtigen hält, und die überdem dem Anfänger mehr Intresse für die Principien beybringen, und ihn darin besser orientiren werden, als die kurzen Aphorismen Euklids und Le Gendres. Auch glaubt der Uebersetzer dadurch, dafs er einige fruchtbare bisher unbenutzte Principien hier nicht blos aufgestellt, sondern auch dem Systeme selbst eingewebt hat, (besonders solche, worauf die Beurtheilung des Schneidens und Berührens beruht,) in dem Lehrgebäude des Hr. Le

Gendres eine beträchtliche Lücke ausgefüllt zu haben, von der auch kein andres ihm bekanntes System, selbst nicht das System Euklids völlig frey zu sprechen ist. In der systematischen Folge bey unserm Verfasser etwas Wesentliches zu ändern, und Materien ganz zu versetzen, hat der Uebersetzer sich übrigens fast nie erlaubt, so rathsam ihm dieses auch hin und wieder zur Vervollkommnung des Systems dünkte. Vielmehr hat er alle sein Bemühen darauf gewandt dieses Wissenschaftliche Gebäude, so wie es nun einmal da stand, besser zu stützen und zu gründen, und sich bestrebt ohne im Grossen viel umzubauen, (lediglich dadurch dass er manches ergänzte, einiges Untaugliche wegliess, und im Ausdruck und der Beweisart oft mehr umarbeitete als übersetzte) alles noch mehr in einander zu fügen, und abzurunden, womit man freylich bei eigner Begründung eines Systems ehr zu stande kommen kann, als bey einer fremden Arbeit, in der man manches nicht billigt. Zu allem was in Zeichen wie diesen [ ] eingeschlossen ist bekennt sich

der Uebersetzer.]

I. Erklärungen (Definitionen).

1.

Die *Geometrie* ist eine Wissenschaft, welche sich mit dem Messen des Ausgedehnten beschäftigt, und hierin besteht ihr eigenthümlicher Gegenstand. [Oder vielmehr, sie ist die Wissenschaft des Räumlichen; der Raum und alle Vorstellungsarten und Begriffe, die auf demselben beruhen, machen ihr eigenthümliches Gebieth aus, und ihr Geschäft besteht darin, die Eigenschaften, Beziehungen und Verhältnisse des Räumlichen durch allgemein gültige Schlüsse zu erforschen.

d. U.]

2.

Alles was ausgedehnt ist, hat *drey Dimensionen*, [und nicht mehr,] nemlich *Länge*, *Breite* und *Höhe* oder *Dicke*.

[Diese drey Dimensionen sollen sich nach der gewöhnlichen Behauptung von einem Körper nur durch *Abstraktion* absondern und für sich betrachten lassen. Allein die Abstraktion ist in der That weder der einzige noch der *an sich* erste und ursprüngliche Weg, wie wir zu der Vorstellung der drey Dimensionen des Ausgedehnten gelangen. Um uns einen Körper vorzustellen, müssen wir die Körperliche Gestalt erzeugen, den Körper beschreiben, und diese *Raumbeschreibung* ist ein zweyter Weg wie wir zu der Vorstellung der einzelnen Dimensionen gelangen, den aber die Geometer bey Aufstellung der Principien gewöhnlich übersehn. Und zwar geht auf diesem Wege die Vorstellung der einzelnen Dimensionen der Vorstellung des Körpers vorher, [indem wir bey der Raumbeschreibung vom Punkte anfangen, durch Fortbewegung desselben Linien erzeugen, durch Bewegung der Linien Flächen, und durch Bewegung der Flächen, Körper. Diese Unabhängigkeit und Priorität der Vorstellung des Punktes, der Linie und der Fläche scheint schon Euklid eingesehn zu haben, wie man aus der Stellung seiner Erklärungen urtheilen muss.

Das Vermögen der Raumbeschreibung muss der Geometer von jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, fordern, mithin auch die Vorstellungsarten, welche sie begründet, und die Begriffe die sich darauf unmittelbar beziehn. Solche Begriffe sind die der drey Dimensionen, und die Vorstellungen, welche die folgenden Erklärungen aussagen, über die eben deshalb der Geometer sich in keinen Beweis einläßt. d. U.]

3.

Die *Linie* ist eine Länge ohne Breite.

„Man erhält die Vorstellung derselben, sagt van Swinden, wenn man das Ausgedehnte lediglich in Rücksicht seiner Länge betrachtet, ohne auf dessen Breite und Dicke zu sehn, also von diesen beyden Dimensionen abstrahirt. Andre stellen sich die Linie *als durch den stetigen Fortgang eines Punkts erzeugt vor*, oder als die Spur eines fortbewegten Punktes." [Diese Vorstellungsarten sind beyde richtig, und man kann beyde Wege einschlagen, um zur Vorstellung der Linie zu gelangen, nur dass der letzte Weg, durch Raumbeschreibung, wie wir schon bemerket haben, an sich der erste und ursprüngliche ist. Er führt nicht nur zu einer ächt geometrischen, sondern selbst zu der ursprünglichen und fundamentalen Vorstellungs- und Erklärungsart der Linie, indess man auf dem erstern Wege (durch Abstraction) nur zu einer abgeleiteten Vorstellung der Linie gelangt. Wollen wir uns eine Linie vorstellen, so müssen wir sie ziehn, und das Vermögen dazu fordert der Geometer, daher die letzte Erklärung der Linie, die sich auf den eigentlichen Weg bezieht, wie wir zur Vorstellung der Linie gelangen, in der That die vorzüglichere und fruchtbarere ist, wenn gleich viele Geometer zu glauben scheinen, dass sie höchstens so mit unter laufen dürfe.

d. U.]

4.

Die Gränzen oder das Aeusserste einer Linie, das worin eine Linie sich endigt, nennt man *Punkte.* — Ein Punkt ist also nach keiner Dimension, folglich gar nicht ausgedehnt, und hat keine Theile.

[Der Anschein von Unbegreiflichkeit welchen der Punkt durch diese an sich richtige und fruchtbare Erklärung bekömmt, an den sich unter andern mehrere Scholastiker gestossen haben, fällt fort, sobald man sich den Punkt als einen *Ort* im Raume vorstellt. Ehr wir eine Linie ziehn können, müssen wir uns irgend einen Ort vorstellen, von welchem aus wir sie ziehn; folglich einen Punkt. Und endigen wir die Linie, so geschieht das wieder in irgend einem Punkte. Man sieht hieraus dass die Fähigkeit sich Punkte vorzustellen, so gut wie die, Linien zu ziehn, zu dem gehören müsse, was der Geometer von seinem Lehrling fordert, bey ihm voraussetzt.

Man *bezeichnet* gewöhnlich einzelne *Punkte* durch einzelne Buchstaben, *Linien* durch die Buchstaben ihrer Endpunkte, oder wenn dieses zur Deutlichkeit nicht hinreicht, durch die Buchstaben einiger Punkte in ihnen und der Endpunkte, und *Flächen* und *Körper* durch die Buchstaben ihrer Eckpunkte, aller oder einiger.
Fig. 1. So spricht der Geometer von den Punkten A, C, D, von den Linien AB, AC, AEB, von der Fläche ACDB u. s. f. oft selbst ohne ausdrücklich zu erinnern dass diese Buchstaben, Punkte, Linien, etc. bezeichnen, welches sich dann von selbst versteht.
d. U.]

5.

Die *grade Linie* ist der kürzeste Weg von einem Punkt zum andern.

Eine Linie, welche keinen graden Theil hat, nennt man eine *krumme Linie* oder eine *Curve*.

Fig. 1. So z. B. ist AB. eine *grade*, AEB eine *krumme*, dagegen ACDB weder eine grade, noch eine krumme, sondern eine sogenannte *gebrochne Linie*, weil sie aus lauter graden Linien zusammengesetzt ist.

[Die Eigenschaft der graden Linie, dass sie von allen Linien zwischen zwey Punkten die *kürzeste* ist, hat zuerst *Archimed* als Princip geometrischer Beweise aufgestellt und gebraucht. Hr. Le
Gr. 6. Gendre vervollständigt im folgenden den darauf sich gründenden Begriff der graden Linie dahin, dass zwischen zwey Punkten nur eine einzige grade Linie möglich ist, und sucht auf diesen Begriff das System der Geometrie vorzüglich zu gründen. Die Einwendung, welche einige (unter ander *van Swinden*) gegen die Archimedeische Erklärung machen, als setze sie den Satz voraus, dass zwey Seiten im Dreyeck stets grösser als die dritte sind, ist nichtig. Das würde nur der Fall seyn, wann es darauf

ankäme diese Definition zu beweisen, welches aber jemand, der sie unter den Principien aufstellt, nicht Willens seyn kann.

Die Erklärung welche *Euklid* von der graden Linie giebt, und die nach der gewöhnlichen Uebersetzung so lautet: „eine Linie die den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt" ist so dunkel, daſs unser Verfasser sie als nichtssagend und ohne Bedeutung gänzlich aufgiebt. Verständlicher wird sie, wenn man sie mit van Swinden folgendermaſsen ausdrückt: „eine *grade Linie* ist die, welche überall auf einerley Art oder gleichförmig (gelyklyk) zwischen ihren Punkten liegt, indeſs die *krumme Linie* zwischen ihren Punkten ungleichförmig liegt;" oder mit Simpson; „eine Linie welche überall gleichmäſig (evenly) zwischen ihren Endpunkten liegt, oder welche überall einerley Richtung hat (which every where tends the same way)." Durch einige Erörterungen lieſse sich das Dunkel wohl noch vermindern, das auf diesen Erklärungen ruht, und welches der holländische Geometer der Einfachheit des Begriffs der graden Linie zuschreibt. Eine grade Linie ziehn zu können, ist eine Forderung welche der Geometer an jeden thut, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will. Er setzt also voraus, daſs jedermann im Besitz des dazu nöthigen Verfahrens ist, mithin auch der Vorstellung, die sich darauf gründet, und es kömmt ihm nur darauf an, *ein fruchtbares Merkmal heraus zu heben*, wodurch sich diese Vorstellung von allen ähnlichen unterscheidet. Ein solches Merkmal ist allerdings das, welches unser Verfasser nach Archimeds Vorbild in seiner Erklärung der graden Linie aufstellt. Nur daſs dieses Merkmal nicht so unmittelbar in dem ursprünglichen Verfahren beym Ziehn einer graden Linie zu liegen scheint, daſs man sich nicht nach einem Beweise desselben sehnen sollte, welcher darthäte, daſs jenes Merkmal in diesem ursprünglichen Verfahren gegründet ist, und wie es daraus folgt. Unmittelbar aus diesem Verfahren ist das zulezt von Simpson angeführte Merkmal geschöpft, *Einerleyheit der Richtung im Ziehn der graden Linie*, und zunächst hierauf scheint sich Euklids Definition zu beziehn, welcher der Uebersetzer deshalb den Vorzug geben würde, lieſse sie sich nur eben so klar, faſslich und fruchtbar als jene Archimedeische machen. Das haben aber die Geometer bisher noch nicht geleistet, und wir müssen daher Hr. Le Gendre loben, dass er die Archimedeische Erklärung der graden Linie zum Grunde legt' aus welcher er manche Sätze leichter und kürzer beweist, als es bisher geschehn ist, gründet sich gleich nicht darauf, wie er sagt, einzig und allein sein ganzes System. d. U.]

6.

Eine *Fläche* ist etwas das Länge und Breite, aber keine Höhe oder Dicke hat; oder, nach van Swinden „eine Ausdehnung, in der man sich lediglich Länge und Breite vorstellt, von der dritten Dimension, der Dicke, aber ganz abstrahirt."

Die *Gränzen*, das Aeusserste *der Fläche*, das worin die Fläche sich endigt, sind *Linien*, entweder grade oder krumme.

„Man sieht auch wohl, bemerkt van Swinden, die Fläche als durch stetige Fortbewegung einer Linie erzeugt, oder als Spur einer sich bewegenden Linie an;" und dieses ist wiederum nicht nur eine ächt geometrische, sondern auch die ursprüngliche und fundamentale Vorstellung der Ebene, von der dasselbe gilt, was wir bey der analogen Vorstellungsart der Linie bemerkt haben * d. U.

* E. 3.

7.

Eine *Ebene* ist eine Fläche, welche in allen ihren Theilen vollkommen eben ist, d. h. in welcher jede grade Linie, die durch irgend zwey in der Fläche befindliche Punkte gezogen wird, ganz hineinfällt.

[Kein Theil einer solchen Linie fällt ausserhalb der unbegränzten Ebne. Dieses drückt Simpson auf ein uneigentliche, nicht zu billigende Art so aus: die Linie *berühre* die Ebene in allen ihren Theilen; ein Ausdruck der keine Nachahmung verdient, obgleich er von mehreren Mathematikern in einem ähnlichen Sinn gebraucht worden ist. Euklid und mit ihm van Swinden erklären die Ebne durch „eine Fläche, welche überall gleichförmig zwischen ihren Gränzen und zwischen den auf ihr befindlichen Linien liegt." Auch hiervon gilt, was mir oben * bemerkt haben. * E. 5.

d. U.

8.

Flächen, worin kein Theil eben ist, sind *krumme Flächen.*

9.

Ein *Körper* ist nach allen drey Dimensionen ausgedehnt, [und jede Ausdehnung, welche Länge, Breite und Dicke (oder Höhe hat, ist ein *Körper*, ein *körperlicher Raum.*

Die *Gränzen*, das Aeusserste *eines Körpers*, das worin der Körper sich endigt, sind *Flächen*, entweder ebene oder krumme.]

Der körperliche Raum wird beschrieben, und ein Körper erzeugt durch stetige Fortbewegung einer Fläche, so dass man sich den Körper als die Spur einer bewegten Fläche vorstellen kann. Und dieses ist wiederum die ursprüngliche Vorstellungsart des Körpers. * * E. 2.

Eine Ausdehnung von mehr Dimensionen als im Körper vereinigt sind, giebt es nicht. d. U.

10.

[Eine *grade Linie* wird durch jeden Punkt *in* ihr (d. h. der zwischen ihren Endpunkten liegt) in zwey Stücke getheilt, welche *zu den entgegengesetzten Seiten* jenes Punktes liegen und in Rücksicht desselben eine

Fig. 2. *entgegengesetzte Lage* haben, z. B. AB durch den Punkt C in die Stücke AC, CB, welche zu den entgegengesezten Seiten des Punktes C liegen, und die grade Linie DE durch denselben Punkt in die entgegengesetzt liegenden Stücke DC, CE.

Grade so wird eine *Ebne* durch jede grade Linie *in* ihr in zwey Theile getheilt, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Linie liegen, und ein *Körper* durch jede Ebne in demselben in zwey Theile, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Ebne liegen.]

II.

[Zwey Linien, welche einen Punkt gemein haben, *treffen einander*, und *stossen in diesem Punkte zusammen*, z. B. CA, BA. Genugsam verlängert schneiden oder berühren sie sich. — Sie *schneiden einander*, wenn der einen Linie AB Theile, AC, CB, welche zu entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Punktes C liegen, zugleich auch zu den entgegengesetzten Seiten der andern Linie DE liegen. — Lägen sie auf einerley Seite der Linie DE, so würden beyde Linien sich *berühren*, wie MN und AEB in Fig. I.

Fig. 3. / Fig. 2.

Eine ähnliche Bewandniss hat es mit dem Zusammentreffen, Schneiden und Berühren zweyer Flächen, oder einer graden Linie und einer Fläche.]

Die unter 10. und 11. aufgestellten Erklärungen fehlen fast in allen geometrischen Systemen, auch bey Le Gendre, und sind als die unentbehrlichsten unter vielen andern mangelnden von mir eingeschoben worden. d. U.

12.

Wenn zwey grade Linien AB, AC (oder EF, ED) Fig. 3.
einander treffen, so nennt man die Grösse um welche sie von einander entfernt sind einen *Winkel.* Die beyden Linien AB, AC selbst, heissen die *Schenkel des Winkels*, der Punkt A in welchem sie zusammenstossen oder einander schneiden, die *Spitze* oder der *Scheitel des Winkels.* — Man bezeichnet einen Winkel entweder allein durch den Buchstaben seines Scheitelpunkts, z. B. $\angle A$, $\angle E$, oder, wo das zu Zweydeutigkeiten Anlass gäbe, setzt man zu beyden Seiten dieses Buchstabens noch Buchstaben zweyer Punkte in beyden Schenkeln hinzu, z. B. $\angle BAC$, $\angle DEF$, doch so dass der Buchstabe am Scheitel immer in der Mitte stehet. Auch bezeichnet man einen Winkel durch einen Buchstaben, der zwischen seinen Schenkeln hinein geschrieben wird, z. B. $\angle\alpha$.

[Da man gewöhnt ist Entfernungen durch Linien zu bestimmen, und bey Entfernungen an Linien zu denken, so muss man sich durch Le Gendres Erklärung zu keinem falschen Begriff vom Winkel verführen lassen. Ein Winkel, oder bestimmter, ein *ebner Winkel*, wie man ihn zum Unterschiede von Flächenwinkeln und körperlichen Winkeln nennt, ist keine Ausdehnung, weder eine Linie, noch eine Fläche (wofür ihn wohl einige durch Missverstand genommen haben,) sondern *die gegenseitige Lage zweyer sich durchschneidender grader Linien*, oder wie man gewöhnlich sagt, die *Neigung* zweyer solcher Linien; wiewohl dieser letztere Ausdruck auf rechte, stumpfe und hineingehende Winkel nicht recht zu passen scheint.

α, Die *Grösse eines Winkels* hängt daher lediglich von der Grösse in der Neigung oder vielmehr in der Lage, der beyden Schenkel ab, worauf die Länge dieser Linien keinen Einfluss hat.

β, Die *Gleichheit* oder *Ungleichheit zweyer Winkel* kann man unmittelbar danach beurtheilen, ob sie einander decken oder nicht. Wenn man sich vorstellt der Scheitel und zwey der Schenkel beyder Winkel würden auf einander gelegt; so fallen die beyden andern Schenkel entweder auch auf einander, oder nicht. Im erstern Fall *decken sich beyde Winkel* und
* Gr. 9. *sind gleich.* * Im zweyten Fall decken sie einander nicht, und *sind* deshalb *ungleich.* Und zwar ist *der Winkel der grössere*, dessen Schenkel die Schenkel des andern einschliessen, wie z. B. ∠DEF grösser ist als ∠GEF. Der einschliessende Winkel DEF ist um den Winkel DEG grösser als der eingeschlossne GEF, und diesen beyden eingeschlossnen Winkeln zusammengenommen gleich.

γ, Ueberhaupt ist *jeder einschliessende Winkel* ACE, als Gan-
Fig. 4. zes, *allen von ihm eingeschlossnen um* seine Spitze C aneinander liegenden *Winkeln ACB*, BCD, *DCE* aus seinen Thei-
* Gr. 5. len *zusammengenommen gleich.* * d. U.

13.

Fig. 2. [Wenn eine grade Linie AB, von einer andern DE in einem Punkte z. B. in C durchschnitten wird, so bildet ein abgeschnittnes Stück der einen Linie, z. B. CE mit den entgegengesetzt liegenden Stücken CA,
* E. 2. CB der andern graden Linie * zwey Winkel ACE, ECB, welche man *Nebenwinkel* nennt.

Nebenwinkel sind also solche Winkel, deren Scheitel C und *einer* der Schenkel CE zusammenfallen, indess die beyden andern Schenkel AC, CB *in grader Linie* liegen. d. U.

14.

Steht eine grade Linie GH auf eine andre EF so auf, daſs die beyden Nebenwinkel, welche sie mit EF bildet gleich sind, so wird jeder dieser beyden gleichen Nebenwinkel HGE, HGF ein *rechter Winkel* genannt. Die Linie GH steht dann auf EF im Punkte G *senkrecht*; ist *ein Perpendikel* auf EF im Punkte G. Fig. 15.

Ein *rechter Winkel* ist also *einer* von zwey gleichen Nebenwinkeln, und eine *senkrechte Linie* eine grade Linie, welche auf eine andre unter rechten Winkeln aufsteht.

Winkel kleiner als ein rechter, z. B. BAC, nennt man *spitze*, Winkel gröſser als ein rechter, z. B. DEF, *stumpfe Winkel*. Fig. 3.

[Im ersten Lehrsatze wird dargethan werden, daſs alle rechte Winkel einander gleich sind. Wegen der Winkel welche gröſser als zwey rechte Winkel zusammengenommen sind, und die man mit unserm Verfasser *hineingehende Winkel* (angles rentrants) oder mit andern *erhabene Winkel* im Gegensatz der *hohlen Winkel* nennen kann, vergleiche man die Anm. zu Erkl. 16.]

[Alle bis hierher aufgestellten Erklärungen, (höchstens die letzte ausgenommen) *gehören zu den wahren Principien der Geometrie*, da sie Vorstellungsarten betreffen, welche unmittelbar aus der Raumbeschreibung geschöpft sind, und die daher der Geometer grade so, wie wir sie in diesen Erklärungen aussagen, bey jedem, der Geometrie treiben will, voraussetzt und fordert. * Die *folgenden Erklärungen* stellen dagegen Begriffe auf, deren *Gültigkeit erst zu beweisen ist*. Denn sie sind nicht wie jene unmittelbar aus der ursprünglichen Vorstellungsart des Ausgedehnten, * E. 2.

aus der Raumbeschreibung, geschöpft, die der Geometer postulirt, sondern verbinden Merkmale mit einander, von denen es die Frage ist, ob sie sich auch mit einander verbinden lassen, und ob sie nicht in dieser Verbindung einander, oder jener ursprünglichen Vorstellungsart widersprechen. Sie gehören zu den abgeleiteten Vorstellungen, deren Möglichkeit und Gültigkeit erst dann gegen Einsprüche gesichert ist, wenn man sie auf die ursprünglichen Vorstellungsarten zurückgeführt oder daraus abgeleitet, d. h. aus den wahren Principien bewiesen hat. Sie stehn daher hier in der That an ihrer unrechten Stelle, und würden schicklicher im Fortgang des Systems, da, wo man die Möglichkeit der Gegenstände, die sie erklären darthut, aufgestellt werden, wie dieses unser
E. 19. Verfasser selbst bemerkt. * Man hat sie daher hier für *blosse Wort-Erklärungen* zu nehmen, die insgesammt nichts anders aussagen, als: „gesetzt ein solcher Gegenstand als z. B. Parallellinien, Dreyecke u. s. w) sey möglich, so will man ihn mit dem angegebnen Namen bezeichnen." Dagegen gehören die *Kreisbeschreibung* und die darauf sich beziehenden *Erklärungen des zweyten Buchs* zu den ursprünglichen Vorstellungsarten des Ausgedehnten, die der Geometer von jedem fordert, also zu den wahren Principien der Geometrie, und sollten deshalb hier als an ihrem eigentlichen Platze stehn, von welchem sie unser Verfasser nicht ohne Nachtheil für das System fortgehoben hat.

d. U.]

15.

Wenn zwey grade Linien in einer Ebne so liegen, dass sie nie zusammenstossen, so weit man sie auch
Fig. 31 verlängert, so sind sie *gleichlaufend* oder *parallel.*

Diese Erklärung der Parallellinien stimmt mit der Euklids überein, gegen die van Swinden, wie uns dünkt mit Unrecht, den Zweifel erhebt, ob wohl darin die Begriffe vom Verlängern ohne Ende und vom Nie zusammentreffen, deutlich genug für ein Princip sind. Die Frage, welche von den mancherley

Erklärungen, auf die man die Sätze über parallele Linien zu gründen gesucht hat, den Vorzug verdiene, gehört, so wie die ganze Erklärung, nicht hierher, sondern zur Theorie der Parallellinien. Man findet einiges darüber in den Anmerkungen am Ende dieses Werks. d. U.

16.

[Jeder völlig begränzte Raum wird eine *Figur* genannt; doch bezeichnet man mit diesem Namen vorzugsweise begränzte Flächenräume, selbst solche, welche nur zum Theil, nicht ganz, begränzt sind.]

Eine Ebne, welche nach allen Seiten zu begränzt ist, bildet eine *ebne Figur*, und zwar, wenn sie nichts als grade Linien zu Gränzen hat, eine *gradelinige Figur*, die man auch vorzugsweise eine *vielseitige Figur*, oder ein *Vieleck* (*Polygon*) nennt, [wiewohl dieser Name manchmal ausschliesslich gradelinige Figuren von mehr als vier Seiten bezeichnet.]

Jede Gränzlinie macht eine *Seite*, alle zusammen den *Umfang der Figur* (die *Peripherie des Vielecks*), und der Flächenraum den sie rings um gränzen, *den Inhalt* oder den *Flächenraum der Figur* aus.

[Eine *Diagonale* ist eine grade Linie, die quer durch die Figur von einem Winkelpunkt zum andern geht. So z. B. stellt Fig. 5 eine ebne gradelinige Figur vor, AB, BC, CD u. f. sind ihre Seiten, die zusammengenommen ihren Umfang ausmachen, AC eine Diagonale, A, B, C, etc. die Winkelpunkte oder Ecken der Figur.]

Anmerkung. Um Verwirrung zu verhindern betrachtet man in der Geometrie nur *Vielecke*, welche lauter *hohle*, *heraus-*

gehende Winkel (angles saillants) und keine *erhabne* oder *hineingehende Winkel* (angles rentrants) enthalten, obgleich auch die letztern Winkel zur Bestimmung der Lage zweyer sich durchschneidender Linien geschickt sind, und in Figuren vorkom-
* F. 6. men können. Ein Vieleck mit lauter herausgehenden Winkeln
* F. 5, 7. ist gänzlich *convex*, nirgends *hohl*. Es kann von einer graden Linie nur in zwey, nicht in mehr Punkten, geschnitten werden, welches bey Vielecken mit hineingehenden Winkeln nicht der Fall ist. (Ueberdem fällt jede Verlängerung der Seiten eines *convexen Vielecks* ganz ausser der Figur, durchschneidet diese nirgends weiter, indess die Schenke eines hineingehenden Winkels, wenn sie über ihren Scheitelpunkt hinaus verlängert werden den Umfang der Figur nochmals durchschneiden. Beyde Eigenschaften kann man zu Erklärungen des convexen Vielecks nutzen. Viele Sätze gelten blos für die convexen Vielecke, würden also, schlösse man die Vielecke mit hineingehenden Winkeln nicht ganz aus, unrichtig seyn, wenigstens besondre Modificationen heischen, und dadurch zu sehr überladen werden.]

In den vier ersten Büchern dieser Elemente haben wir es allein mit ebnen Figuren, und überhaupt nur mit Ausdehnungen die in einerley Ebne gedacht werden, zu thun. [Sie bilden den ersten Haupttheil der Geometrie, *die Planimetrie*, deren Name darauf hindeutet.]

17.

Das dreyseitige Vieleck, (diejenige von allen Fi-
Gr. 6. f. 4 guren, welche die geringste Zahl von Seiten hat wird ein *Dreyeck*, das vierseitige ein *Vierek*, das fünfseitige ein *Fünfeck*, das sechsseitige ein *Sechseck* u. s. f. genannt, [indem in jeder gradelinigen Figur die Menge der Winkel (Ecken) mit der Zahl der Seiten übereinstimmt.]

Von

Von den Seiten dieser Vielecke, welche als Schenkel zu einem Winkel gehören, sagt man daſs sie den Winkel *einschlieſsen*, ihn *umſpannen*; von den Winkeln selbst, daſs sie an dieſen Seiten *anliegen*. Im Dreyeck, wo an jeder Seite zwey Winkel anliegen, sagt man vom dritten nicht anliegenden Winkel daſs er und die Seite *einander gegenüber ſtehn*.

So z. B. ſtehn im Dreyeck ABC die Seite AB und der Winkel C, ferner BC und A, und AC und B *einander gegenüber*. Die Seiten AB, AC *ſchlieſsen den Winkel* A *ein*, und A und B ſind die an der Seite AB *anliegenden Winkel*.] Fig. 8.

18.

Ein *Dreyeck* iſt *gleichſeitig*, wenn es lauter gleiche Seiten hat, *gleichſchenklig* (iſoſcele) wenn es zwey gleiche Seiten, *ungleichſeitig* (ſcalene) wenn es lauter ungleiche Seiten hat. Fig. 8. Fig. 25. Fig. 26.

Ein *rechtwinkliges Dreyeck* hat einen rechten Winkel. Die Seite deſſelben, welche dem rechten Winkel gegenüberſteht, nennt man die *Hypotenuſe*, [die beyden an dem rechten Winkel anliegenden Seiten, welche die Schenkel des rechten Winkels ausmachen, die *Katheten* des rechtwinkligen Dreyecks.] So z. B. iſt DEF ein bey E rechtwinkliges Dreyeck, DF deſſen Hypotenuſe, und ED, EF ſind deſſen Katheten. Fig. 30.

Ein Dreyeck worin ein ſtumpfer Winkel vorkömmt, iſt *ſtumpfwinklig*. Enthält das Dreyeck nichts als ſpitze Winkel, ſo iſt es *ſpitzwinklig*. Fig. 22. Fig. 20.

Man pflegt irgend eine Seite des Dreyecks als *Grundlinie*, und den ihr gegenüberſtehenden (nicht in ihr liegenden) Winkelpunkt, als *Spitze des Dreyecks* anzusehn. Welche! das ist gleichgültig. Nur nimmt man im gleichschenkligen Dreyeck mehrentheils die ungleiche Seite für die Grundlinie.

19.

Unter den *Vierecken* sind folgende zu bemerken:

Fig. 9. Das *Quadrat*, welches lauter gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat;

Fig. 11. Der *Rhombus* (losange, die *Raute*) dessen Seiten gleich, dessen Winkel aber keine rechte sind;

Fig. 10. Das *Rechteck*, dessen Winkel insgesammt rechte, dessen Seiten aber nicht gleich sind;

Das *Parallelogramm*, dessen gegenüberstehende Seiten parallel laufen [und das, wenn es weder glei-
Fig. 12. che Seiten noch rechte Winkel hat, ein *Rhomboides* genannt wird.]

Das *Trapezoid*, welches zwey gleichlaufende und
Fig. 13. zwey nicht parallele Seiten hat; und das *Trapezium*, mit welchem Namen man alle Vierecke mit ungleichen Seiten, wovon kein Paar parallell läuft, belegt; ein Sprachgebrauch von dem unser Verfasser zwar abweicht, indem er das Trapezoid ein Trapezium nennt, und für dieses kein Kunstwort aufstellt, den ich aber der Bequemlichkeit halber beybehalte.

Anmerkung. *Le Gendre* bemerkt hierbey, dass man in den Erklärungen des Quadrats und des Rechtecks statt vier *rechte* eigentlich vier *gleiche Winkel* setzen sollte. Denn, sagt er, dass die Winkel eines Vierecks insgesammt rechte seyn können, und dass alle rechte Winkel gleich sind, ist etwas, dass man nicht voraussetzen, sondern beweisen müsste. Diesen und ähnlichen Missstand würde man vermeiden, wenn man die Erklärungen, nicht, wie es gewöhnlich ist, [und wozu Euklid vielleicht nur durch die unbehülfliche Form der damaligen Bücher veranlaſst wurde,] an die Spitze jedes Buchs, sondern unter die andern Sätze, wo das, was sie voraussetzen, schon dargethan ist, stellte.

Auch schlägt unser Verfasser noch vor, die gar zu langen Kunstwörter *Parallelogramm*, und *Parallelepipedum*, die ihrer Etymologie nach ohnedem jede Figur mit parallelen gegenüberstehende Seiten oderSeitenflächen, ihre Zahl sey welche sie wolle' bezeichnen, mit anderen zu verwechseln, wozu er *Rhombus* und *Rhomboides* für schicklich hält. Aber dieser Vorschlag kann wohl nicht ernstlich gemeint seyn, denn zu was für einer Verwirrung würde das nicht führen, da diese letztern Kunstwörter schon eine ganz andre Bedeutung haben. d. U.

20.

α, *Ein Vieleck* ist *gleichseitig*, wenn es lauter gleiche Seiten, *gleichwinklig*, wenn es lauter gleiche Winkel hat.

β, *Zwey Vielecke* sind dagegen *untereinander gleichseitig* (équilatéraux entre eux), wenn die Seiten des einen, den Seiten des andern, in derselben Folge gleich sind; d. h. so, daſs wenn man in beyden Vielecken die Seiten von zwey die einander gleich sind an, der Ordnung nach zählt, in beyden auch die zweyten, die dritten, die vierten Seiten u. s. w. gleich sind. — Grade so sind *zwey Vielecke unter sich gleichwinklig*, wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern in derselben Folge gleich sind. [Diese abkürzenden Kunstwörter sind zwar bey uns ungewöhnlich, dem Geist unsrer Sprache aber nicht entgegen, daher ich glaubte sie beybehalten zu dürfen.]

γ, Bey zwey Vielecken von dieser Beschaffenheit werden nicht nur im ersten Fall die gleichen Seiten, sondern auch die von gleichen Seiten eingeschlossnen Winkel, und im zweyten Fall nicht nur die gleichen Winkel, sondern auch die an gleichen Winkeln in beyden anliegenden Seiten, *ähnlichliegende*, *gleichnamige* oder *homologe Stücke* genannt.

21.

[Wenn alle Punkte in einer Linie einer oder mehreren gegebnen Bedingungen entsprechen, (und zwar nur die Punkte in ihr, kein Punkt ausser ihr,) so nennt man diese Linie in so fern den *geometrischen Ort* für diese *Bedingungen*, oder für die *Aufgabe* in welcher diese Bedingunge vorkommenn; auch wohl den *geometrischen Ort des Punktes*, der den Bedingungen oder der Aufgabe entspricht. So z. B. ist die Kreislinie, ihrem
*II.E.1. Begriff gemäss, * der geometrische Ort eines Punkts,
Fig. 45. der von einem gegebnen Punkt C um die gegebne grade Linie CA absteht, oder der geometrische Ort für die Aufgabe, welche nach einem solchen Punkte frägt. Denn jeder Punkt in ihr ist der gesuchte Punkt, und kein Punkt ausser ihr thut der aufgestellten Bedingung genüge. Man sieht hieraus leicht in wie fern auch eine Fläche oder ein Körper ein geometrischer Ort seyn kann. Nemlich nur in so fern alle Punkte in ihnen, und kein Punkt ausser ihnen, gegebnen Bedingungen entsprechen.

Die *gräde Linie* und der Kreiſs werden ausſchlieſsungsweiſe *ebne Oerter* genannt.

Ueber dieſe ebnen Oerter hatte einer der vorzüglichſten Geometer des Alterthums *Apollonius* von Pergä ein beſondres Werk geſchrieben, wovon aber nur einzelne Sätze auf uns gekommen ſind. Aus dieſen hat ein Schottiſcher Mathematiker *Robert Simſon* (der mit unſerm *Thomas Simpſon* nicht zu verwechſeln iſt) die Schrift des Griechen wieder hergeſtellt. Die deutſche Ueberſetzung dieſer Wiederherſtellung durch Hrn. *Camerer* (Leipzig 1796.) iſt gemeint, ſo oft ich Apollonius ebne Oerter erwähne. Daſs ich aber dieſe Begriffe mit in die Elemente einwebe, wird man bey einer kleinen Ueberlegung nicht miſsbilligen, obgleich ich ſie in keinem der Lehrbücher, die mir vor Augen liegen, mit aufgenommen finde. d. U.

22.

Erklärung der abkürzenden arithmetiſchen Zeichen, die im folgenden gebraucht werden.

Das Zeichen der Gleichheit iſt = daher A = B bedeutet, daſs die Gröſse A der Gröſse B gleich iſt.

Durch das Zeichen $A < B$ zeigt man an, daſs A kleiner als B, durch $A > B$, daſs A gröſser als B iſt.

Das Additions- oder Summenzeichen iſt +

Das Subtractions- oder Differenzzeichen —. So z. B. bedeutet $A + B - C$ daſs man A und B zuſammennehmen, und von dieſer Summe C abziehn ſoll.

Ein bloſser Punkt . oder ein × iſt das Multiplications- oder Produktenzeichen. So z. B. bedeutet $A+B).(A-C)$ das Produkt aus der eingeklammerten Summe und Differenz, und $AB \times BC$ das Produkt aus den beyden Linien AB, BC. [Was dies aber ſagen will, und in wiefern dieſes letztre Zeichen den Inhalt des Rechtecks aus den beyden Linien AB, BC bedeutet, wird im dritten Buche auseinander gesetzt werden.] Zahlen als Multiplicatoren setzt man häufig vor andern Zeichen ohne Zwischenzeichen. So z. B. beteutet 3AB daß man die Linie AB dreimal nehmen soll, und $\frac{1}{2}$ AB oder $\frac{AB}{2}$, daß man die Hälfte dieser Linie setzen muß.

[Ein Produkt von lauter gleichen Faktoren, heißt eine *Potenz*; die Anzahl der gleichen Faktoren giebt den *Grad* der Potenz. Das Zeichen a^2 bedeutet die zweyte Potenz oder die Quadratzahl von a; a^3 die dritte Potenz, oder die Kubikzahl von a, u. f. Auf dieselbe Art bedeutet $\overline{AB}^2$ das Produkt aus zwey gleichen Linien, nemlich AB×AB oder die zweyte Potenz der Linie AB; $\overline{AB}^3$ das Produkt aus drey gleichen Linien AB×AB×AB oder die dritte Potenz von AB u. f. f.

Was dieses aber für einen Sinn hat, und in wiefern $\overline{AB}^2$ den Inhalt des Quadrats und $\overline{AB}^3$ den Inhalt des Kubus über die Linien AB bedeutet, das werden wir in der Folge sehn.

Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet eine Quadratwurzel; $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2, [d. h. die Zahl die mit sich selbst multiplicirt 2 zum Produkt giebt.] Eben so ist $\sqrt{A.B}$ die Quadratwurzel aus dem Produkte A.B oder die mittlere Proportionalzahl zwischen A und B [und $\sqrt[3]{A}$ die Kubikwurzel aus A, das heißt eine Größe wovon drey in einander multiplicirt, zum Produkt A geben.]

[Das Zeichen $\angle$, einem oder mehreren Buchstaben vorgesetzt, bedeutet einen Winkel; ein einzelnes R einen rechten Winkel.]

23.

[*Erinnerung an die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen.*

Der Uebersetzer schaltet diese Sätze welche Le Gendre als bekannt aus der Arithmetik voraussetzt, hier ein, um das Studium dieses Werks so viel, wie möglich, zu erleichtern, und wird in der Folge stets durch das Marginal V. auf sie verwiesen Sollte ein Leser, bey der Kürze, womit sie abgeleitet werden anstoßen, so verspare er diese Erinnerung bis zu den letzten Sätzen des zweyten Buchs, wo zuerst von Verhältnissen gehandelt wird, und wo man durch den Gebranch derselben und durch das, was dort steht, sich die Sätze geläufig machen, und sich in den Geist der Sache gehörig einweihen wird. Uebrigens werden überall in diesem Werke, wo von Verhältnissen und Proportionen die Rede ist, sogenannte geometrische Verhältnisse und Proportionen erstanden. Das *Zeichen dieser Verhältnisse* sind zwey senkrecht übereinanderstehende Punkte :, welche man zwischen die Zeichen des *Vorderglides* und des *Hintergliedes* eines Verhaltnisses setzt, z. B. 4 : 8.

1. Das *Verhältniſs zweyer Gröſsen* a zu b beruht auf die Vorstellung wie oft die erstere a (das Vorderglied), oder ein bestimmter Theil derselben, in der zweyten b (dem Hintergliede) enthalten ist.

Die Zahl, welche dieses angiebt, wird der *Exponent des Verhältnisses* genannt. Sie macht das Wesen des Verhältnisses aus; man erhält sie allemal, wenn man das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt; (so ist der Exponent des vorigen Verhältnisses $\frac{b}{a}$) und sie kann sowohl eine ganze Zahl, als ein Bruch, als auch eine Irrationalzahl seyn, d. h. eine Gröſse die sich durch die Einheit und deren Theile nicht genau ausdrücken läſst, in welchem Fall das Verhältniſs ein *irrationales Verhältniſs* genannt wird.

Bey 4 : 8 muſs man alſo das Verhältniſs der Zahl 4 zur Zahl 8 ſich vorſtellen, d. h. ſich denken, wie oft das Vorderglied 4, oder ein beſtimmter Theil deſſelben, im Hintergliede 8 enthalten iſt. Die Zahl welche dieſes ausſagt, 2, iſt der *Exponent* dieſes Verhältniſſes. Beym Verhältniſs 6 : 10 iſt der *Exponent* $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ und dieſes zeigt an, daſs der dritte Theil des Vorderglieds 5 mal geſetzt, das Hinterglied giebt. Beym Verhältniſs 2 : $\sqrt{3}$ iſt der Exponent $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und zeigt an, daſs die Hälfte des Vorderglieds ſo geſetzt, wie in $\sqrt{3}$ die Einheit geſetzt iſt, das Hinterglied giebt.

Grade ſo bedeutet AB : BC oder $\angle A : \angle B$ das *Verhältniſs der Linie AB zur Linie BC*, oder *des Winkels A zum Winkel B*, und dieſes Verhältniſs beruht auf die Vorſtellung der *Zahl*, welche angiebt, wie oft die Linie AB, oder der Winkel A, oder wie oft ein beſtimmter Theil derſelben, in der Linie BC oder dem Winkel B enthalten iſt, das heiſst auf die Vorſtellung des Exponenten.

α, Nur zwiſchen *gleichartigen Gröſsen* findet ein Verhältniſs ſtatt, alſo nur zwiſchen Zahl und Zahl, Linie und Linie, Winkel und Winkel u. ſ. f.

β, der Werth eines Verhältniſſes a : b wird nicht verändert, wenn beyde Glieder durch einerley Gröſse multiplicirt, oder beyde durch ſie dividirt werden. Denn der Exponent bleibt nach wie vor derſelbe, da $\frac{bm}{am} = \frac{b}{a}$ iſt.

2. Alle *Vergleichung der Verhältniſſe untereinander* beruht auf die Vergleichung ihrer Exponenten, indem dieſe das Weſen der Verhältniſſe ausmachen. Zwey Verhältniſſe a : b und c : d ſind gleich oder ungleich,

und das erſtere gröſser oder kleiner als das andre, je nachdem ihre Exponenten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{d}$ gleich, oder jener gröſser oder kleiner als dieſer ſind.

Gleichheit der Verhältniſſe wird *Proportionalität* genannt, und durch das Gleichheitszeichen =, welches man zwiſchen die gleichen Verhältniſſe ſetzt, bezeichnet. Gröſsen, deren Verhältniſſe gleich ſind, ſind *einander proportional*, bilden *Proportionalgröſsen*.

Iſt alſo $a:b = c:d = e:f$, ſo ſind die ſechs Gröſsen a bis f Proportionalgröſsen, und e, f ſind den Gröſsen c, d und a, b (oder nach Umſtänden auch die Hinterglieder b, d, f, den Vordergliedern a, c, e) proportional. *Dieſe ſind dann gleich oft in jenen enthalten*, indem die Exponenten dieſer gleichen Verhältniſſe $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$, gleich ſind, oder, ſo oft a in b enthalten iſt, iſt c in d und e in f enthalten, und ſo wie b aus a durch Multiplication entſteht, ſo entſteht d aus c und f aus e. Auf ſo verſchiedne Art läſst ſich dieſes eine Zeichen überſetzen.

(Eine unmittelbare Folge hieraus iſt, daſs wenn $a:b = a:c = a:d$, die Gröſsen b, c, d, gleich ſeyn müſſen, indem ſie als Hinterglieder gleicher Verhältniſſe dieſelbe Gröſse gleich oft in ſich enthalten *; und daſs eben ſo, falls $a:b = c:b = d:b$ iſt, die Gröſsen a, c, d, welche in derſelben Gröſse d gleich oft enthalten ſind, gleich ſeyn müſſen.)

Grade ſo bedeutet $AB:BC = \angle A : \angle B$, daſs die Linien AB, BC und die Winkel A, B, einerley Verhältniſs unter einander haben, oder proportional ſind, das heiſst, daſs der Winkel A oder ein beſtimmter Theil dieſes Winkels eben ſo oft im Winkel B enthalten iſt, als die Linie AB oder derſelbe Theil dieſer Linie in der Linie BC. Gewöhnlich wird ein ſolches Zeichen ſo in Worten überſetzt: „die Linie AB verhält ſich zur Linie BC, wie der Winkel A zum Winkel B."

Le Gendre bedient ſich um die Proportionalität oder die Gleichheit der Verhältniſſe zu bezeichnen des unter den Engländern gebräuchlichen Zeichens ::. Allein ich bin bey dem gewöhnlichen Gleichheitszeichen = geblieben, weil dieſes den wahren Begriff der Proportionalität, Gleichheit der Verhältniſſe, uns immer vor Augen hält, und dadurch die richtige Vorſtellung erleichtert.

3. Zwey gleiche Verhältniſſe werden ins beſondre eine *Proportion* genannt, wie zum Beyſpiel $a : b = c : d$. In jeder Proportion ſind alſo die Exponenten beyder Verhältniſſe gleich oder $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

α, Folglich iſt auch in jeder Proportion $\frac{b}{a} \cdot c = d$ *, welches die Regeln angiebt, wie man zu drey gegebnen Zahlen a, b, c, die *vierte Proportionalzahl* d finden kann. Sind in zwey Proportionen die drey erſten Proportionalgröſsen gleich, ſo muſs es auch die vierte ſeyn.

*Gr.2.γ

β, Ferner iſt in jeder Proportion $b \cdot c = a \cdot d$* oder *das Produkt der innern Glieder b, c, dem Produkt der äuſsern Glieder a, d gleich.* Auf dieſe Art läſst ſich alſo aus jeder Proportion *eine Gleichung* zwiſchen den proportionalen Gröſsen *ableiten.*

*Gr.2.γ

γ, Sind umgekehrt zwey Produkte, deren jedes aus zwey Faktoren beſteht, gleich, $b \cdot c = a \cdot d$, ſo bilden die vier Faktoren eine richtige Proportion, $a : b = c : d$, wozu das eine Produkt die äuſsern, das andre die innern Glieder hergiebt. Denn aus der Gleichung folgt daſs $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *, daſs folglich beyder Verhältniſſe Exponent gleich, alſo die Proportion richtig iſt.

*Gr.2.γ

δ, Iſt $a > b$ und $c < d$, ſo kann nicht $a : b = c : d$ ſeyn. Denn dann iſt $1 > \frac{b}{a}$ und $1 < \frac{d}{c}$ *, beyde Verhältniſſe $a : b$ und $c : d$ haben alſo ungleiche Exponenten. Führt mithin irgend ein Satz zur Behauptung des Gegentheils, ſo iſt er ungereimt. *Gr. z. §

ε, Iſt $a : b = c : d$ ſo muſs, wenn $a = b$ geſetzt wird, auch $c = d$ ſeyn. Die beyden erſten und die beyden letzten Gröſsen ſtehn dann beyde im Verhältniſs der Gleichheit.

4. Auf die Eigenſchaft der Proportionen, daſs das Produkt der innern Glieder dem Produkt der äuſsern Glieder gleich iſt, beruht die leichteſte Methode die Richtigkeit einer Proportion zu prüfen, und ſich von der Gültigkeit der *Ableitung einer Proportion* von einer oder mehreren richtigen Proportionen zu überzeugen.

α, Aus jeder Proportion laſſen ſich durch bloſse Verſetzungen, oder auch durch homologe Addition und Subtraction der Glieder, *andre Proportionen ableiten*, von denen ich hier nur einige die am häufigſten vorkommen anführe.

Iſt $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$

ſo iſt auch $a : c = b : d$ indem dann $cb = ad$;

$b : a = d : c$ indem $ad = bc$;

etc.

ſo daſs es alſo erlaubt iſt in jeder Proportion unbeſchadet der Proportionalität *die mittlern Glieder mit einander zu vertauſchen*, die Verhältniſſe umzukehren etc.

β, Ferner iſt dann (weil $bc = ad$ iſt)

$a + b : b = c + d : d$ indem $bc + bd = ad + bd$
$a - b : b = c - d : d$ indem $bc - bd = ad - bd$
$a : a + b = c : c + d$ indem $ac + bc = ac + ad$
$a : a - b = c : c - d$ indem $ac - bc = ac - ad$
$a : b = a + c : b + d$ indem $ab + bc = ab + ad$
$a : b = a - c : b - d$ indem $ab - bc = ab - ad$
$a : b = c - a : d - b$ indem $bc - ab = ad - ab$
etc.

γ, Hat man *mehrere gleiche Verhältniſſe*

* 2. $a : b = c : d = e : f$ etc.* mithin $\begin{cases} bc = ad \\ be = af \end{cases}$

ſo iſt *das Verhältniſs der Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder* ebenfalls *jedem dieſer Verhältniſſe einzeln genommen gleich*, z. B.

$a + c + e : b + d + f = a : b$

indem $ab + cb + eb = ab + ad + af$ iſt.

δ, Sind *mehrere richtige Proportionen gegeben*,

$a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
$e : f = g : h$ mithin $fg = eh$
$f : k = k : g$ mithin $kk = fg$

ſo folgt *durch Zuſammenſetzung dieſer Proportionen* (d. h. indem man die Produkte der erſten, zweyten, dritten, vierten Glieder, wie ſie unter einander ſtehn, nimmt, und dabey die Faktoren fortläſst, die zugleich im erſten und zweyten, oder zugleich im dritten und vierten Produkte vorkommen), aufs neue eine richtige Proportion $ae : bk =$
*Gr. 2. δ $ck : dh$ indem dann $bc . fg . kk = ad . eh . fg$ * alſo
*Gr. 2 α $bk . ck = ae . dh$ iſt *.

Auch folgt umgekehrt aus der *Trennung zweyer Proportionen* (indem man die ersten, zweyten, dritten, vierten Glieder in einander dividirt) aufs neue eine richtige Proportion. So folgt aus den beyden ersten der gegebnen die richtige Proportion $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ indem dann $\frac{bc}{fg} = \frac{ad}{eh}$ ist * *Gr. 2. γ

ε, Eine Proportion bleibt also auch richtig, wenn man *alle Glieder* derselben zu *einerley Potenzen* erhebt, oder aus den Gliedern *Wurzeln von gleichen Graden zieht.* Ist

$a : b = c : d$ mithin $bc = ad$, so ist auch

$a^n : b^n = c^n : d^n$ da $b^n . c^n = a^n . d^n$ * und *Gr. 2. γ

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ da $\sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{d}$.

ζ, Sind die Vorderglieder einer Proportion, den Vordergliedern einer andern Proportion gleich, so sind *die Hinterglieder proportional*:

Ist $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
und $a : e = c : f$ mithin $ec = af$
so ist $b : e = d : f$ indem $ed = bf$
weil $ec . ad = bc . af$ * *Gr. 2. γ
auch $a : b \mp e = c : d \mp f$ indem $bc \mp ec = ad \mp af$.

Grade so sind die Vorderglieder proportional, wenn die Hinterglieder untereinander gleich sind.

Sind dagegen die äussern oder die mittlern Glieder untereinander gleich so sind die nichtgleichen Glieder *verkehrt proportional*:

ist $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
und $a : e = f : d$ mithin $ef = ad$
so ist $b : e = f : c$ indem $bc = ef$ * *Gr. 1.

4, Endlich sind gleiche Vielfache der Vorderglieder und irgend andre der Hinterglieder einer richtigen Proportion, wiederum proportional; oder ist $a:b = c:d$ mithin $bc = ad$ so ist auch
$am:bn = cm:dn$ indem $bn \cdot cm = am \cdot dn$

5. In einer *stetigen Proportion* sind die mittlern Glieder einander gleich $a:b = b:c$. Das letzte Glied wird die *dritte*, das zweye die *mittlere Proportionalzahl* ge-
* β nannt. Da $b^2 = ac$*, so ist die mittlere Proportional-
G. 2. δ zahl zwischen a und c, dass heisst $b = \sqrt{ac}$

Bey drey gleichen stetigen Verhältnissen $a:b = b:c = c:d$ sind zwischen den äussern Gliedern a und d *zwey mittlere Proportionalgrössen*; bey vieren drey u. s. f. Von zwey mittleren Proportionalgrössen ist die erste $b = \sqrt[3]{a^2 d}$. Denn da $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ so ist $\frac{b^3}{a^3} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{a}$.

6. *Verhältnisse werden zusammengesetzt*, wenn man sich die Produkte ihrer Vorderglieder und ihrer Hinterglieder im Verhältnisse denkt. Die Zeichen $A:B = (a:b) + (c:d) + (e:f)$ bedeuten das Verhältniss A zu B sey zusammengesetzt aus den drey eingeklammerten durch + verbundnen Verhälnissen, folglich $A:B = ace:bdf$.

Ist umgekehrt ein Verhältniss $A:B$ dem Verhältnisse zweyer Produkte $ace:bdf$ von gleich viel Faktoren gleich, so läst jenes Verhältniss sich aus dem Verhältniss der einzelnen Faktoren zusammen setzen.

Ein Verhältniss $A:B$, welches aus *zwey gleichen* Verhältnissen $(a:b)$ zusammengesetzt ist, ist *noch ein-*

mal ſo hoch als dieſes Verhältniſs, welches man ſo bezeichnet $A:B = 2\,(a:b)$, da denn $A:B = aa:bb$.

Eben ſo ſagt man das Verhältniſs $A:B$ ſey *dreymal*, *viermal*... *ſo hoch* als das Verhältniſs $a:b$, wenn es aus drey, vier ... ſolchen gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt iſt. Dann iſt $A:B = 3\,(a:b) = a^3:b^3$ oder $A:B = 4\,(a:b) = a^4:b^4$ etc.

7. Wenn ſich von drey Gröſsen a, b, c, die erſte zur dritten, wie der Unterſchied der beyden erſten zum Unterſchied der beyden letzten verhält, das heiſst $a:c = b-a:c-b$, ſo ſagt man, daſs dieſe Gröſsen *harmoniſch-proportional* ſind. Dieſe Benennung ſtammt von den Griechen her, und hat ihren Grund darin, daſs die Längen drey gleich dicker und gleich geſpannter Seiten, welche in der gröſsten Harmonie, (der Oktave, Quinte und Quarte) tönen ſollen, ſich wie die Zahlen 3, 4, 6 verhalten müſſen. Dieſe Zahlen ſind weder in arithmetiſcher, noch in geometriſcher Proportion, ſondern haben die hier erklärte Abhängigkeit, $3:6 = 4-3:6-4$; daher man umgekehrt dieſes Verhalten das harmoniſche genannt hat.

Von drey harmoniſch proportionalen Gröſsen muſs die mittlere b, gröſser als die eine der äuſsern und kleiner als die andre ſeyn.

Da ſie ſo von einander abhängen, daſs $c.(b-a) = a(c-b)$ iſt, und dieſe Abhängigkeit, auch zwiſchen den Produkten drey ſolcher Gröſsen in derſelben Zahl d, (oder zwiſchen ihren Quotienten durch d ſtatt findet; ſo ſind auch alle ſolche Producte oder Quotienten harmonisch proportionaler Grösen, harmonisch proportional.

Ist B das Mittel zwischen A und C (also B — A = C — B) so sind die Produkte A . B, A . C, B . C harmonisch-proportional. Und nimmt man zwischen zwey Zahlen m, n das arithmetische Mittel a, und die mittlere harmonisch-proportionale Zahl h, so bilden diese vier Zahlen eine richtige Proportion, oder es ist m : a = h : n.

Diese wenigen Sätze reichen völlig hin, um das, was in diesem Werke auf die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen gebaut wird, ohne Anstos zu verstehn. Die ganze Materie ist arithmetisch und unser Verfasser verweist nicht mit Unrecht wegen ihrer auf die Lehrbücher der Arithmetik. Bequem ist es indess die Quintessenz jener Lehren hier beysammen zu haben, und diese Einschaltung wird dem Leser bey der Beschäftigung mit dem dritten Buche, von grossem Nutzen seyn. d. U.

II. Grundsätze (Axiome)

1.

Zwey Grössen die einer dritten gleich sind, sind untereinander selbst gleich. Auch sind *zwey Verhältnisse* untereinander gleich, wenn beyde einem dritten Verhältnisse gleich sind, indem ihre Gleichheit von
*V. 1. der Gleichheit der Exponenten abhängt. *

2.

2.

α, Wenn zu gleichen Grössen gleiche *hinzugefügt* werden, so sind die Summen gleich. Ist z. B. $A = B + C$ und $D = B - C$, so ist $A + D = 2 B$.

β, Wenn von gleichen Grössen gleiche *hinweggenommen* werden, so bleiben die Reste gleich. So z. B ist im vorigen Fall $A - D = 2 C$.

γ, Gleiche Grössen mit gleichen *multiplicirt*, oder durch gleiche *dividirt* bleiben gleich. Ist z. B. $A = B + C$, so bleibt auch $A . M = B . M + C . M$

δ, Also sind auch *Potenzen* von gleichem Grade aus gleichen Grössen, gleich; und eben so *Wurzeln* von gleichen Graden aus gleichen Grössen. Ist z. B. $A = B$, so ist auch $A^2 = B^2$ und $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

ε, Wenn $A > B$ ist, so ist auch $A + C > B + C$ und $A - C > B - C$, auch $A . M > B . M$ und $\frac{A}{M} > \frac{B}{M}$.

3.

Zwey Grössen, welche einerley dritte gleich oft enthalten, oder in einer dritten gleich oft enthalten sind, sind gleich

4.

Das Ganze ist grösser als sein Theil.

5.

Das Ganze ist der Summe aller seiner zusammengehörigen Theile gleich.

[Dieses sind insgesammt arithmetische Grundsätze, deren Zahl sich noch beträchtlich vermehren liesse. Von den folgenden eigentlichen geometrischen finden sich bey Le Gendre nur der sechste und neunte, die, wie er behauptet, hinreichen, das folgende System zu begründen. Die übrigen, so wie die unmittelbaren Folgerungen aus dem fruchtbaren sechsten Grundsatze, habe ich, weil sie für das System unentbehrlich sind, hinzugefügt.] d. U

6.

Von einem Punkt läßt sich zu einem andern nur eine einzige grade Linie ziehn.

[Daraus fliessen unmittelbar folgende Sätze, die bey unserm Verfasser völlig fehlen:

1) *Durch zwey Punkte wird die Lage einer graden Linie völlig bestimmt*, und eine grade Linie in der zwey Punkte bekannt sind, ist *ihrer Lage nach* gegeben. Sind ihre Endpunkte bekannt, so ist sie auch *der Größe nach* gegeben.

2. Zwey grade Linien, welche zwey Punkte gemein haben, fallen in einander, haben alle ihre Punkte mit einander gemein, und bilden nur eine einzige grade Linie. Daß dieses in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung geschehen müsse, beweist unser Verfasser im dritten Lehrsatz. — Sind die beyden gemeinschaftlichen Punkte ihre Endpunkte, so *decken* sich beyde grade Linien völlig. Daraus folgt:

3. Daß *zwey gleiche grade Linien sich decken*, d. h. wenn man sie so aufeinander legt, daß zwey ihrer Endpunkte zusammen fallen, so fallen auch die beyden andern Endpunkte aufeinander.

4. Zwey grade Linien die ſich ſchneiden, können auſser dem einzigen Punkte, worin ſie zuſammentreffen, (ihrem Durchſchnittspunkte,) nichts weiter mit einander gemein haben.

5. *Zwey grade Linien können keinen Raum einſchlieſsen.* Denn ſollten ſie einen Raum einſchlieſsen, ſo müſsten ſie ſich ſelbſt begränzen, alſo zwey Punkte gemein haben. Dann aber fallen ſie Folg. 2 gemäſs zuſammen, ohne einen Raum einzuſchlieſsen. Alſo iſt kein gradelinigtes *Zweyeck* möglich, wohl aber ein Dreyeck, und die übrigen Vielecke.

6. *Zwey grade Linien, können ſich nicht berühren.* Denn geſetzt zwey grade Linien wie z. B. AB, DC könnten ſich berühren, ſo müſsten beyde Stücke der einen Linie, die durch den Berührungspunkt C abgeſchnitten werden, zu einerley Seite der graden Linie AB liegen. Dann müſten ſie aber nothwendig zuſammen fallen, weil ſonſt zwiſchen je zwey Punkten ſolcher graden Linie zwey verſchiedne grade Linien DCG, DG, vorhanden wären, gegen unſern Grundſatz. Folglich können zwey grade Linien ſich nicht berühren. Fig. 17.

Zwey grade Linien, welche zuſammentreffen, müſſen alſo verlängert einander ſchneiden. d. U.

7.

[α, Es iſt möglich jede grade Linie, welche der Gröſse nach gegeben iſt, *in zwey gleiche Theile zu theilen*, und es läſst ſich in einer ſolchen Linie allemal ein Punkt denken, welcher *in ihrer Mitte liegt*, durch welchen ſie halbirt wird.

β, Es ist möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine andre grade Linie auf ihr *senkrecht* zu ziehn. *

* E. 12.

γ, Auch ist es möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine zweyte grade Linie zu ziehn, welche mit der erstern *einen gegebnen Winkel* bildet.]

Wie das, was diese Grundsätze als möglich aussagen, zu bewerkstelligen sey, lehrt Hr. Le Gendre in den Aufgaben, die dem zweyten Buche angehängt sind. *Dass* es geschehen könne, setzt er gleich bey den ersten Lehrsätzen voraus, daher diese Grundsätze bey seiner Anordnung des Systems unentbehrlich sind. In der That kann man sie als Grundsätze vertheidigen, indem die Möglichkeit der Halbirung einer graden Linie von bestimmter Grösse, die Möglichkeit senkrechter Linien und rechter Winkel, und die Möglichkeit der Nachbildung eines Winkels unmittelbar darauf beruhen, dass die grade Linie und der Winkel *stetige Grössen* sind, folglich keine absoluten, keine kleinsten Theile haben, und daher Theile von jeder Grösse und jedem Verhältniss darin denkbar seyn müssen. Die beyden Theile, worin eine Linie durch einen Punkt in ihr getheilt wird, können also gegen einander jedes Verhältniss, folglich auch das der Gleichheit haben; eben so zwey Nebenwinkel, und so auch zwey Winkel an verschiedenen Scheitelpunkten; und nichts anders sagen diese Grundsätze aus. d. U.

8.

[Wenn eine Ebne durch eine grade Linie in zwey Stücke getheilt wird, die zu entgegengesetzten Seiten jener Linie liegen, und man zieht durch zwey Punkte in den entgegengesetzt liegenden Stücken eine stetig zusammenhängende Linie, so trift diese Linie mit der erstern in irgend einem Punkte zusammen, und durchschneidet sie in diesem Punkte. * *E. 11.

Dieser Satz, der gewöhnlich nicht unter den Principien aufgeführt wird, ist in Verbindung mit der zehnten und eilften Erklärung so evident, wie irgend einer der andern Grundsätze, und es stützen sich am Ende auf ihn und auf einen analogen Grundsatz beym Kreise fast alle unsere Urtheile über das Durchschneiden der Linien. d. U.

9.

Zwey Ausdehnungen, es mögen Linien, Flächen oder Körper seyn, sind gleich [und ähnlich, folglich innerlich einerley] wenn sie *sich decken*, das heisst, wenn sie, indem man die eine auf die andre legt, [indem man ihre Ortsverschiedenheit aufhebt, und eine ganz im Ort der anderen denkt] in ihrer Ausdehnung, [und deren Begränzung] zusammenfallen.

[Umgekehrt müssen zwey Ausdehnungen *einander decken*, *congruiren*, wenn sie innerlich einerley, d. h. gleich und ähnlich sind, indem sie sich dann blos in ihrem Ort unterscheiden.]

Flächen und Körper, welche sich decken, haben nicht bloss gleiche Ausdehnung, oder gleichen *Inhalt* sondern auch alle Gränzen (Seiten sowohl als Seitenflächen) und alle Winkel der einen, sind den Gränzen und Winkeln der andern nicht nur in einerley Folge * sondern auch nach einerley Richtung hin gleich (worauf die Symmetrie und Aehnlichkeit, folglich die innere Einerleyheit, die Congruenz solcher Figuren beruht.) Le Gendre giebt diesen Flächen und Körpern den Namen *figures* und *solides égaux*, nennt dagegen die, welche Gleichheit ohne Aehnlichkeit haben, die sich also zwar in der Ausdehnung oder dem Inhalte nach gleich sind, sich aber nicht decken, *figures* und *solides equivalentes* und scheint auf diese Unterscheidung und den so be- *E. 20.

ſtimmten Sprachgebrauch einen beſondern Werth zu legen. Allein da Gleichheit (*égalité*) doch eigentlich nur Einerleyheit der Gröſse bedeutet, ſo ſcheint das erſte Kunſtwort, welches Figuren bezeichnen ſoll, die auch einerley Beſchaffenheit oder Aehnlichkeit haben, nicht recht ſchicklich gewählt zu ſeyn. Ich verdeutſche *figures égaux*, durch *ſich deckende Figuren* oder *congruirende Figuren*, dagegen *Figures equivalentes* durch *gleiche Figuren*, oder, wo ein beſondres Gewicht darauf gelegt wird, durch, *dem Inhalt nach gleiche Figuren.* Gleich geltende Figuren, würde ein etwas fremdartiger, auch kein ſo paſſender Ausdruck ſeyn; beſſer *gleichhaltige Figuren*, ein Ausdruck den ich zum Bürgerrecht in unſrer Sprache empfehlen möchte. d. U.

β, Bey Körpern und krummen Flächen die gleich ſind, ſagt unſer Verfaſſer, giebt es noch eine dritte Art von Verſchiedenheit, die man nicht überſehn darf. Sie können einerley Gränzen und Winkel in einerley Folge haben, ohne daſs ſie ſich deshalb decken, [wenn nemlich die gleichen Stücke *nicht auch nach einerley Richtung hin* auf einander folgen, wie das z. B. bey der rechten und der linken Hand der Fall iſt, die, wären ſie auch im Einzelnen völlig gleich, ſo daſs Finger mit Finger congruirte, ſich doch beyde nicht decken können, man lege ſie, wie man wolle, oder bey zwey übrigens gleichen Schneken, deren eine rechts die andre links gewunden iſt. Daſſelbe kann bey ſchiefen Prismen, Pyramiden, körperlichen Winkeln, ſphäriſchen Dreyecken u. ſ. ſtatt finden. Eine ſolche Verſchiedenheit in der Zuſammenſetzung aus gleichen Stücken hat zwar auch bey ebnen Figuren ſtatt, wie die Dreyecke ABC, ABD zeigen, in welchen die Winkel C = D, CAB = DBA, CBA = DAB und die Seiten CA = DB, CB = DA ſind. Allein man braucht nur die eine dieſer Figuren im Gedanken umzukehren, ſo deckt ſie die erſtere, daher bey ebnen Figuren durch dieſe Verſchiedenheit in der Zuſammenſetzung keine weſentliche Verſchiedenheit bewirkt wird, und man von ihr abſtrahirt.] Aber bey *krummen Flächen* und *Körpern*, beruht darauf eine weſentliche Verſchiedenheit,

Fig. 15.

welche man, fast in allen Elementen der Geometrie übersehn hat, obschon mehrere Beweise, die sich auf das Decken, von gewissen Körpern oder krummen Flächen gründen, dadurch, dafs man diesen Fall übersah, mangelhaft und in so fern fehlerhaft werden. Dahin gehören unter andern die Sätze über das Decken sphärischer Dreyecke, welche mehrere glaubten lediglich unter den Bedingungen und grade auf die Art, wie bey den ebnen Dreyecken beweisen zu können. Ja, um noch ein auffallenderes Beyspiel zu erwähnen *Robert Simson*, der in seiner Ausgabe Euklids den Beweis des 28sten Satzes im 11ten Buche unzuläſsig findet, fällt selbst in den Fehler, dafs er seinen Beweifs auf eine Congruenz stützt, die nicht allgemein statt findet.

γ. Ich habe daher, fährt unser Verfasser fort, geglaubt für diese dritte eigenthümliche Art von Gleichheit in Flächen und körperlichen Räumen ein neues Kunstwort bilden zu müssen, nehmlich *Gleichheit durch Symmetrie* (égalité par symmetrie), und nenne hinfüro Figuren denen diese Art von Gleichheit zukömmt, *symmetrische Figuren* (figures symmétriques).

Auf diesen Unterschied zwischen *gleiche Figuren* die es blofs *dem Inhalt nach* sind, *symmetrische Figuren*, und *congruirende* oder *sich deckende Figuren*, mufs man aufmerksam seyn, da durch diese Kunstworte Begriffe bezeichnet werden, die wesentlich verschieden sind.

10.

[Gleiche Winkel decken einander; d. h. wenn man die Spitze und einen der Schenkel des einen Winkels, auf die Spitze und einen der Schenkel des andern Winkels legt, und die beyden anderen Schenkel in der Ebne auf einerley Seite des erstern sich denkt, so fallen auch diese Schenkel zusammen.

Dafs umgekehrt Winkel, die einander decken, gleich sind, ist schon oben bemerkt worden. * *E. 12.

[III. Forderungen (Poſtulate)]

Man ſetzt die Möglichkeit folgender drey Dinge voraus, oder fordert vielmehr, daſs jedermann, der ſich mit der Geometrie beſchäftigen will, folgende urſprüngliche Vorſtellungsarten müſſe eingehn können.

1.

Von jedem gegebnen Punkte aus, eine grade Linie zu ziehn, die durch irgend einen zweyten gegebnen Punkt geht, und zwar ſowohl bis an dieſen Punkt, als über ihn hinaus.

2.

Jede grade Linie ſo weit man will zu verlängern, nach einer oder nach beyden entgegengeſetzten Seiten eines Punktes in ihr, und ſie ſich endlich gröſser als jede gegebne Linie vorzuſtellen.

Wem fällt hierbey nicht ein, daſs der Geometer etwas ähnliches auch für das Verkleinern der graden Linie vorausſetzt, und daſs er alles dieſes nicht bloſs bey graden Linien, ſondern bey Linien überhaupt auch etwas Analoges bey Flächen und bey körperlichen Räumen fordert. Schon hieraus kann man ſich überzeugen, wie mangelhaft das iſt, was Euklid und die mehrſten Geometer als Forderungen ihrer Wiſſenſchaft aufführen, und wie es mit dieſen Forderungen und mit der ganzen Grundlage der Geometrie wohl eine andre Bewandtniſs haben müſſe, als man das gewöhnlich vorſtellt. Vielleicht hat grade dieſes unſern Verfaſſer beſtimmt, die Forderungen gänzlich zu übergehn. Doch iſt es wohl auf jeden Fall beſſer, die wichtigſten mangelhaft, wie es hier geſchehn iſt, als ſie gar nicht aufzuſtellen.

3.

Um jeden gegebnen Punkt, mit jeder gegebnen graden Linie, als Halbmesser, einen Kreis zu beschreiben.

Diese Fordrung scheint zwar erst zum zweyten Buch zu gehören, an dessen Spitze Le Gendre die Erklärungen, welche den Kreis betreffen, aufstellt, und wohin ich die verweisen muss, die mit dem Namen Kreis und Halbmesser noch keinen deutlichen Begriff verbinden. Allein man kann in der That die Construction des Kreises bey den Sätzen des ersten Buches nicht entbehren, ohne in logische Kreise zu gerathen, da das, was wir hier als unmittelbare Folgerungen dieses Postulats aufführen, zum Beweise vieler jener Sätze gebraucht wird. Auch stellen Euklid, Simpson und van Swinden, die so gut wie unser Verfasser die Sätze über den Kreis in einem besondern Buche vortragen, die Construction des Kreises mit an die Spitze der Geometrie.

Diese dritte Forderung begründet zugleich die Möglichkeit folgender drey Constructionen, welche weiter nichts voraussetzen, als die Beschreibung des Kreises, und die ersten Begriffe über das Schneiden der Kreislinien, welche B. II, Erkl. 11. unabhängig von allen Lehrsätzen des ersten Buchs aufgestellt werden, indem sich die Erklärungen des zweyten Buchs unmittelbar an die des ersten anschliessen.

α, Auf einer gegebnen graden Linie AB, (und, wenn es nöthig ist, auf deren Verlängerung), von dem Punkte A ein Stück zu nehmen, welches einer gegebnen graden Linie CD gleich ist. Zu dem Ende beschreibe man mit CD als Halbmesser um den Punkt A einen Kreis. Dieser trifft entweder mit der Linie AB selbst, oder mit ihrer Verlängerung in irgend einem Punkte E zusammen,* und schneidet denn in beyden Fällen auf ihr AE = CD ab.*

Fig. 14.

*II. E. 11.

*II. E. 2.

β, Aus einem gegebnen Punkte A eine grade Linie von gegebner Länge CD so zu ziehn, daſs sie oder ihre Verlängerung durch einen zweyten gegebnen
*For. 1. Punkt B geht. Zu dem Ende ziehe AB *, und schneide (nach α) aus A davon ein Stück gleich CD ab.

γ, Dreyecke, gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige zu beschreiben, wie das B. II. Erkl. 11. Zus. gelehrt wird.

Eben so giebt die Beschreibung des Kreises Mittel an die Hand, vermöge der Eigenschaften der senkrechten Linien, der Dreyecke u. s. f., die im ersten Buch dargethan werden, *Perpendikel auf gegebne Linien durch gegebne Punkte zu ziehn*, *grade Linien* und *Winkel zu halbiren*, *gleiche Winkel zu bilden* u. d. m. Diese Constructionen müssen billig bey den Sätzen gelehrt werden, auf welche sie sich gründen, und vor denen, deren Beweis die Möglichkeit solcher Constructionen voraussetzt; so thut das Euklid. Unser Verfasser, Simpson und van Swieden, reiſsen sie dagegen aus dem System hinaus, und stellen sie, die letztern Geometer am Ende der Planimetrie, unser Verfasser am Ende einzelner Bücher, beysammen. Ihr Zweck scheint zu seyn, durch die bey einander stehenden Aufgaben den Erfindungsgeist derer, die das Werk studiren, anzuregen; und in der That möchte dieser Vortheil wohl die Unbequemlichkeit aufwiegen, die daraus in dem System entsteht, und die ich durch das Hinweisen auf die Probleme im Lauf des Systems zu vermindern hoffe. d. U.

[Auch das wird von dem Leser noch gefordert,
*E. 17. daſs er sich bey den *planimetrischen Büchern* * *alle Constructionen in einerley Ebne vollführt denkt*, wenn das gleich der Kürze halber nicht ausdrücklich bey jedem Satze wieder erinnert wird. Er darf also bey

keinem Satze dieſer Bücher in der Vorſtellung aus der Ebne heraustreten. Alle Punkte die man denkt, alle Linien die gezogen, alle Kreiſe die beſchrieben werden, muſs man ſo denken und ziehn, daſs alles in einerley Ebne bleibt, und das wird ſelten bey einem Satze ausdrücklich geſagt, auch wenn er nur unter dieſer Bedingung wahr iſt.

der Ueberſetzer.

DIE GRADE LINIE, DAS DREYECK UND DAS VIERECK.

LEHRSATZ I.

Alle rechte Winkel ſind einander gleich.

Die grade Linie DC ſtehe ſenkrecht auf AB, und GH ſenkrecht auf EF, (ſo daſs die Winkel ACD, DCB, eben ſo EGH, HGF gleiche Nebenwinkel ſind*) ſo behaupte ich, muſs der Winkel ACD dem Winkel EGH gleich ſeyn. Fig. 16. * E. 14.

Man mache CA, CB, GE, GF einander gleich*; ſo iſt auch AB gleich EF, und dieſe beyden Linien decken einander, wenn man EF ſo auf AB legt, daſs E auf A und F auf B fällt. * Dann müſſen auch die beyden Punkte G, C, welche in der Mitte dieſer Linien liegen, zuſammenfallen. Geſetzt nun, die in die- *Fo.3.α. *Gr.6.f. I.

ſen Punkten ſenkrecht aufſtehenden Linien GH, CD decken ſich einander nicht, ſo würde GH auf eine von der CD verſchiednen graden Linie z. B. auf CK fallen. Da nach der Vorausſetzung der Winkel EGH = HGF iſt, ſo müſste dann auch ACK = KCB ſeyn. Nun aber iſt der Winkel ACK gröſser als ACD, der Winkel KCB
E. 12. β kleiner als DCB*, und der Vorausſetzung nach ACD gleich DCB: folglich muſs der Winkel ACK, welcher gröſser als ACD, mithin auch als DCB iſt, noch vielmehr gröſser als der Winkel KCB ſeyn. Es iſt alſo unmöglich daſs dieſe beyden Winkel ACK und KCB gleich ſeyn können, folglich unmöglich daſs das Perpendikel GH auf CK, d. h. auf irgend eine von CD verſchiedene grade Linie falle; alſo nothwendig daſs es auf das Perpendikel CD liege, da denn der Winkel ACD ſich mit EGH und der Winkel DCB mit HGF
E. 12. β deckt. Alſo ſind nothwendig alle rechte Winkel ein-
Gr. 10. ander gleich.

[Zuſatz I. Weil alle rechte Winkel gleich ſind, ſo haben ſie eine völlig beſtimmte, unveränderliche Gröſse. Deshalb machen ſie das natürliche und beſtimmte *Maaſs aller Winkelgröſsen* aus, und der Geometer bezieht dieſe insgeſammt auf den rechten Winkel, und drückt ſie in Theilen deſſelben aus.

Zuſatz II. *Durch jeden Punkt einer graden Linie iſt nur eine einzige auf ihr ſenkrechte grade Linie möglich.* Denn geſetzt durch den Punkt C der graden Linie AB, wären auf ihr zwey verſchiedne ſenkrechte Linien CD, CK möglich, ſo müſsten die Winkel ACD, ACK als rechte, * dem Lehrſatz zu Folge einander gleich, folglich der Theil dem Ganzen gleich ſeyn, welches ungereimt iſt. * Daher iſt es unmöglich daſs durch irgend einen Punkt auf einer graden Linie mehr als eine grade Linie ſenkrecht ſtehe.] * E. 14. * Gr. 4.

Anmerkung. Euklid nimmt den Lehrſatz als Grundſatz an. Wir haben ihn hier bewieſen, weil er ſich aus dem achten Grundſatz ſtreng beweiſen läſst, und man die Grundſätze nicht ohne Noth vervielfältigen muſs. [Daſs er bewieſen werden könne und müſſe, bemerkt ſchon *Proklus* in ſeinem Commentar über das erſte Buch Euklids. Den zweyten Zuſatz hat unſer Verfaſſer ganz überſehn, obgleich er ihn häufig braucht.]

LEHRSATZ 2.

*Jede grade Linie CD, welche mit einer andern AB zuſammentrifft, bildet mit dieſer Linie zwey Nebenwinkel ACD, BCD, * deren Summe zwey rechten Winkeln gleich iſt.* Fig. 17. *E. II. 13.

Sind die beyden Nebenwinkel gleich, ſo ſind ſie rechte Winkel, alſo der Lehrſatz wahr. Sind ſie ungleich, ſo ſtehe CG auf AB im Punkte C ſenkrecht. * Durch dieſes Perpendikel wird der gröſsere der beyden Nebenwinkel ACD in zwey Theile ACG, GCD getheilt, ſo daſs die Summe der beyden Nebenwinkel ACD und DCB, den drey Winkeln ACG, GCD, DCB zuſammengenommen gleich iſt. * Der Erſte dieſer Winkel iſt ein rechter *, und die beyden andern zuſammengenommen bilden den rechten Winkel BCG: folglich iſt die Summe der beyden Nebenwinkel ACD, DCB zwey rechten Winkeln gleich. * Gr. 7. *E. 12. γ. * E. 14.

Folgerung 1. Ist *einer* von zwey Nebenwinkeln ein *rechter* Winkel, so ist es auch der andre. — Ein *stumpfer* Winkel ACD hat dagegen einen *spitzen*; ein *spitzer* BCD einen *stumpfen* Nebenwinkel.

Fig. 18. *Folgerung* 2. *Wenn die Linie DE senkrecht auf AB steht, so steht umgekehrt auch AB senkrecht auf DE.* Denn ist DE ein Perpendikel auf AB, so ist ACD ein rechter Winkel; folglich auch der Nebenwinkel ACE

*Folg. 1. dieses Winkels ein rechter *; folglich ACD gleich ACE, folglich AC senkrecht auf DE.

Folgerung 3. *Die Summe aller Winkel, die um einen Punkt einer* graden Linie, an einerley Seite dieser

Fig. 17. graden Linie, von noch so viel graden Linien gebildet werden, (welche sich in einerley Ebne befinden) und insgesammt in diesem Punkte C schneiden, (z. B. der Winkel ACG, GCD DCB) *ist zwey rechten* Winkeln

*E. 12. 7. gleich. *]

LEHRSATZ 3.

Fig. 17. *Zwey grade Linien, welche zwey Punkte A, F mit einander gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen, und bilden nur eine einzige grade Linie.*

Dass sie zwischen den beyden gemeinschaftlichen Punkten A, F zusammenfallen, erhellet aus Grundsatz 6. Folg. 1. Fielen sie in ihrer Verlängerung über diese Punkte hinaus nicht auch zusammen, so würde es irgendwo einen Punkt C geben, wo sie sich von einander trennten, so dass die eine Linie CB, die andre CD würde. Nun sey CG eine in C auf BC senkrecht stehende grade Linie *; ſo iſt ſowohl GCB als GCD ein rechter Winkel, indem ſowohl ACB als ACD eine grade Linie iſt, folglich GCD = GCD *, d. i. das Ganze dem Theile gleich, welches unmöglich iſt. Folglich iſt es unmöglich daſs die beyden graden Linien, welche zwey Punkte A, F gemein haben, ſich in ihrer Verlängerung irgendwo trennen können. Sie bilden alſo nur eine einzige grade Linie. * Gr. 7. * 1.

LEHRSATZ 4.

Wenn eine grade Linie CD auf den Durchſchittspunkt zweyer andrer graden Linien AC, CB ſo aufſteht, daſs ſie mit ihnen zwey Winkel bildet, deren Summe zwey rechte Winkel beträgt, ſo liegen AC, CB in einer graden Linie.

Denn geſetzt ſie lägen nicht in einer graden Linie, ſo ſey CE die gradelinigte Verlängerung von AC. * Dann wäre die Summe der beyden Nebenwinkel ACD, DCE zwey rechten Winkeln gleich; folglich, da nach der Vorausſetzung auch die Summe von ACD, DCB zwey rechten Winkeln gleich iſt, ACD + DCB = ACD + DCE *, folglich DCB = DCE *, folglich der Theil dem Ganzen gleich, welches unmöglich iſt *. Alſo iſt CB ſelbſt die Verlängerung von AC, und liegt mit AC in grader Linie. * Fo. 2. * Gr. 1. * Gr. 2 β * Gr. 4.

LEHRSATZ 5.

Wenn zwey grade Linien AB, DE einander ſchneiden, ſo ſind die Winkel, welche am Durchſchnittspunkt einander gegenüberſtehen, und die man Scheitelwinkel nennt, einander gleich. Fig. 2.

Denn weil erstens DE eine grade Linie ist, so sind die beyden Winkel ACD, ACE zusammengenommen zwey rechten gleich. Weil zweytens AB eine grade Linie ist, sind die Winkel ACE, BCE zusammengenommen zwey rechten gleich. Folglich ist ACD + ACE = ACE + BCE *, folglich ACD = BCE. *

* Gr. 1.
* Gr. 2.

Grade so beweist man die Gleichheit der beyden andern Scheitelwinkel ACE, DCB.

Zusatz I. Die vier Winkel, welche zwey grade sich durchschneidende Linien um ihren Durchschnittspunkt bilden, sind zusammengenommen vier rechten Winkeln gleich. Denn die Summe der beyden Nebenwinkel ACE, BCE beträgt zwey rechte Winkel, und eben so viel die Summe der beyden andern Nebenwinkel ACD, BCD.

Fig. 4.

Zusatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel in einer Ebne befindliche grade Linien CA, CB, CD etc. sämmtlich in einem Punkte C zusammen treffen, so beträgt die Summe aller Winkel, welche je zwey zunächstliegende Schenkel bilden, (ACB, BCD, DCE, ECF, FCG, GCA) vier rechte Winkel. Denn wenn man durch den Punkt C zwey grade Linien zöge, so entstünden um C vier Winkel, welche vier rechten Winkel, und dabey allen jenen Winkeln zusammengenommen gleich wären *.

* E. 11. γ

Fig. 2.

Zusatz III. Wenn von einem Punkte C vier grade Linien ausgehn, und je zwey der einander gegenüberstehenden Winkel, sind gleich, so liegen die Schenkel CA, CB, und CD, CE in grader Linie.

Denn

Denn da alle vier Winkel zusammengenommen vier rechten, und je zwey aneinander liegende Winkel den beyden andern, mithin zwey rechten Winkeln gleich sind, so sind sie Nebenwinkel*, und zwey ihrer Schenkel liegen in grader Linie. * 4.

LEHRSATZ 6.

Zwey Dreyecke decken sich, wenn ein Winkel und die beyden ihn einschliessenden Seiten in beyden Dreyecken gleich sind.

Es sey der Winkel A dem Winkel D, die Seite AB der DE und die Seite AC der DF gleich; so behaupte ich, dass das Dreyeck DEF sich mit dem Dreyeck ABC deckt. Fig. 19.

Denn zwey solche Dreyecke lassen sich so über einander legen, dass sie völlig zusammenfallen. Und zwar erst die Seite DE auf die ihr gleiche AB, so dass D auf A und E auf B fällt. * Dann müssen, weil D und A gleiche Winkel sind, und gleiche Winkel einander decken, auch die Seiten DF und AC*, und weil überdem DF gleich AC ist, auch die Punkte F und C auf einander fallen. Folglich müssen auch die dritten Seiten zusammen fallen*, also beyde Dreyecke einander decken. *Gr. 6. f. 2. *Gr. 10. *Gr. 6.

Folgerung 1. Folglich sind in solchen Dreyecken auch die Winkel B, E, die Winkel C, F, und die Seiten BC, EF (d. h. die Winkel welche gleichen Seiten, und die Seiten welche gleichen Winkeln gegenüber stehn) so wie die Flächenräume beyder Dreyecke, einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, nemlich eines Winkels und der beyden einschliessenden Seiten bestimmt.

Folgerung 2. Zwey *rechtwinklige Dreyecke* de-
.E.17. cken sich, wenn die Katheten in beyden gleich sind.

Folgerung 3. Durch zwey Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel wird jedes Dreyeck characterisirt und völlig bestimmt. Wie aus zwey gegebnen Linien und dem Winkel den sie einschliessen sollen, sich ein Dreyeck wirklich construiren läfst, lehrt Aufg. 8. am Ende des zweyten Buchs.

Anmerkung. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und einer der Winkel, welche sie *nicht* einschliessen, gleich sind, so läfst sich daraus nur bey rechtwinkligen Dreyecken allgemein auf ihre Congruenz schliessen *; bey schiefwinkligen lediglich
*19. unter den Bedingungen welche Lehrsatz 20. aussagt.

LEHRSATZ 7.

Zwey Dreyecke decken sich, wenn eine Seite und die beyden Winkel, welche an ihr liegen, in beyden Dreyecken gleich sind.

Es sey die Seite BC der Seite EF, der Winkel B dem Winkel E, und der Winkel C dem Winkel F gleich, so behaupte ich, dafs das Dreyeck DEF sich mit dem Dreyeck ABC deckt.

Um die Deckung zu bewerkstelligen, lege man EF auf die ihr gleiche Seite BC, so dafs die Endpunkte
*Gr. 6. E auf B und F auf C fallen *. Weil der Winkel E dem
f. 2. Winkel B gleich ist, und gleiche Winkel sich decken, so fällt dann auch die Seite ED auf BA, und folglich

der Punkt D auf irgend einen Punkt in der Linie BA. Eben so, weil der Winkel F dem Winkel C gleich ist, fällt FD auf CA, und der Punkt D auf irgend einen Punkt der Linie CA. Da folglich D sowohl in der Linie BA, als in der Linie CA liegt, so muss es auf den Durchschnittspunkt A dieser beyden Linien liegen, als den einzigen Punkt, den diese Linien mit einander gemein haben *. Folglich fallen alle drey Winkelpunkte, und also auch die Seiten des einen Dreyecks mit denen des andern zusammen, und also decken sich beyde Dreyecke. * Gr. 6 f. 3.

Folgerung. Folglich sind in solchen Dreyecken auch die Winkel A, D und die Seiten AB, DE und AC, DF (d. i. die Winkel die den gleichen Seiten, und die Seiten die den gleichen Winkeln gegenüberstehn) so wie die Flächenräume einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, einer Seite und zweyer anliegender Winkel bestimmt.

[Anmerkung. Auch wenn zwey Winkel und eine Seite, die nicht zwischen ihnen liegt, in zwey Dreyecken gleich sind, so decken sich diese Dreyecke. Doch ist das ein Satz der sich erst weiterhin * darthun läſst. Hierher gehört Aufg. 9.] * 18.

LEHRSATZ 8.

In einem Dreyecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beyden andern Seiten.

Denn jede Seite, z. B. BC, ist als grade Linie der kürzeste Weg zwischen den beyden Winkelpunkten B, C, also nothwendig kleiner als die Summe der gebrochnen Linien BA + AC. * E. 5.

Folgerung. Daraus folgt daſs im Dreyecke jede Seite AC gröſser als der Unterſchied zweyer Seiten
Gr.2.γ BC — BA iſt. Wegen beyder Sätze ſehe man B. II. Erkl. 11. Zuſ.

LEHRSATZ 9.

Fig. 20. *Nimmt man innerhalb eines Dreyecks ABC irgend einen Punkt O, und zieht von demſelben nach den Endpunkten einer der Seiten z. B. der BC, grade Linien OB, OC, ſo iſt die Summe dieſer beyden Linien kleiner als die Summe der beyden andern Seiten des Dreyecks, d. h. als AB + AC.*

Man verlängere die Linie BO bis wo ſie die Seite AC im Punkte D trift; ſo iſt im Dreyecke ODC die
, 8. f. Seite OC < OD + DC, folglich wenn man beyderſeits BO hinzufügr BO + OC < BO + OD + DC d. i. BO + OC < BD + DC.

Nun aber iſt auch im Dreyecke ABD die Seite BD < BA + AD, folglich wenn man beyderſeits DC hinzufügt, BD + DC < BA + AC. Folglich iſt noch vielmehr BO + OC < BA + AC.

Anmerkung. Dagegen iſt der Winkel O den die beyden Linien im Dreyecke umſchlieſsen, gröſser als der Winkel A an der Spitze des Dreyecks. Der Beweis dieſes Satzes beruht darauf, daſs der äuſsere Winkel am Dreyecke gröſser iſt, als jeder der gegenüberſtehenden innern Winkel. Folglich O > D > A. Dieſe unmittelbare Folge aus Lehrſatz 30 beweiſt Euklid beſonders, ehe er an den gegenwärtigen Satz kömmt. Bey unſerm Verfaſſer müſte er ein Zuſatz zu Lehrſatz 30. werden.

LEHRSATZ 10.

Wenn zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC
Fig. 21 *zweyen Seiten DE, DF eines andern Dreyecks DEF*

gleich ſind, und der Winkel BAC den die erſtern einſchlieſſen, iſt gröſser als der Winkel EDF, den die andern einſchlieſſen, ſo muſs die dritte Seite BC, im erſten Dreyeck, gröſser ſeyn als die dritte Seite EF im andern Dreyeck, [*und iſt umgekehrt BC > EF, ſo muſs auch der Winkel BAC > EDF ſeyn.*]

Man denke ſich die Linie AG durch A ſo gezogen, daſs der Winkel CAG dem Winkel D gleich ſey *, * Gr. 7.
mache AG gleich DE * und ziehe GC, ſo decken ſich *Fo.3.α
die Dreyecke GAC und EDF, weil in ihnen der Conſtruction gemäſs zwey Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel gleich ſind *. * 6.
Folglich ſind die dritten Seiten GC, EF einander gleich. Nun aber ſind in Abſicht der Lage des Punktes G drey Fälle möglich, indem dieſer Punkt entweder auſserhalb des Dreyecks ABC, oder auf die Linie BC, oder innerhalb des Dreyecks liegen kann.

Fall 1. Wenn G auſserhalb des Dreyecks ABC liegt. Als dritte Seite im Dreyeck iſt GC < GI + IC *; eben ſo AB < IA + IB; folglich auch GC * 8.
+ AB < GI + IC + IA + IB, d. h. < GA + BC. Nun aber iſt der Conſtruction gemäſs AB = GA. Alſo GC < BC *, und da GC gleich EF iſt, EF < BC. *G. 2.γ

Fall 2. Wenn G auf BC liegt. Dann iſt GC ein Fig. 22.
Theil der BC, folglich die der GC gleiche EF, < BC.

Fall 3. Wenn G innerhalb des Dreyecks ABC Fig. 23.
liegt. Dann iſt nach dem vorigen Lehrſatz GA + GC < BA + BC, folglich, da GA = BA gemacht iſt, GC < BC, alſo auch die der GC gleiche EF < BC.

Der Satz gilt alſo für jeden möglichen Fall, d. i. allgemein.

Wollte man den *umgekehrten Satz* leugnen, ſo müſte man behaupten, daſs, wenn BC > EF iſt, der Winkel BAC kleiner oder gleich D ſeyn könnte. Im erſten Fall müſte, nach dem eben bewieſenen, BC < EF; im zweyten Fall, dem folgenden Lehrſatz gemäſs, BC = EF ſeyn, welches beydes der Vorausſetzung widerſpricht. Alſo muſs der Winkel BAC gröſser als D ſeyn.

Anmerkung. In Simpſons Elementen folgt auf dieſen Satz ein ähnlicher Lehrſatz, deſſen Beweis die Theorie der Parallellinien vorausſetzt, und den Le Gendre übergeht, der aber doch gekannt zu werden verdient. Denn obgleich er auch bey Euklid fehlt, ſo iſt er doch, wie Simpſon bemerkt, zur geometriſchen Beſtimmung gröſter und kleinſter Werthe, von groſsem Nutzen. Dieſer Satz lautet wie folgt: *Wenn in zwey Dreyecken*
Fig 24. *ein Winkel ſammt der gegenüberſtehenden Seite gleich, ein zweyter Winkel aber in beyden ungleich iſt, ſo ſteht dem, unter dieſen Winkeln, welcher dem rechten am nächſten kömmt, eine gröſsere*
* Cf. II. 7. 24. 2. *Seite gegenüber* *.

Wenn z. B. zwey Dreyecke (man nehme in unſrer Figur die beyden ſpitzwinkligen ABC und DEF, oder die beyden ſtumpfwinkligen ABC' und DEF', oder ein ſpitzwinkliges und ein ſtumpfwinkliges,) wenn in dieſen Dreyecken der Winkel A = D, die gegenüberſtehende Seite BC = EF iſt, und dabey der Winkel C einem rechten Winkel näher kömmt, als der Winkel F; ſo muſs die Seite AB > DE ſeyn.

Ich theile hier nur Simpſons Vorbereitung zum Beweiſe mit, da ſie für den geübtern den Beweis zu führen hinreicht, der Beweis ſelbſt aber hier nicht an ſeinem Ort ſtehen würde. Aus den Winkelpunkten B, E fälle man auf die gegenüberſtehenden Seiten Perpendikel, nehme auf die Verlängerung dieſer Perpendikel Punkte I und K welche von den Seiten eben ſo weit als die Punkte B, E abstehn, und ziehe IC, KF, so wird mittelst Lehrsatz 6 und 10 bewiesen, dass IB > KE, folglich das Perpendikel BG im erstern Dreyeck grösser als das im zweyten EH ist. Vom grössern schneide man ein Stück BM, dem kleinern gleich, ab, und ziehe durch den Endpunkt dieses Stücks eine Parallellinie mit AC, so schneidet diese von der Seite AB ein Stück BN ab, welches gleich DE ist, woraus erhellet, dass DE kleiner als AB ist.

Haben also zwey rechtwinklige Dreyecke gleiche Hypotenusen, so steht dem Winkel, welcher in beyden der grössere ist, auch eine grössere Seite gegenüber.

LEHRSATZ II.

Zwey Dreyecke die untereinander gleichseitig sind, sind auch untereinander gleichwinklig, und decken sich.* Fig. 19. * E. 20.

Es sey AB = DE, AC = DF, BC = EF, so behaupte ich, dass auch die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel gleich sind, A = D, B = E, C = F, und dass sich beyde Dreyecke EDF, ABC einander decken.

Denn gesetzt der Winkel A sey dem Winkel D nicht gleich, so muss er entweder grösser oder kleiner als der Winkel D seyn. Da die Seiten welche diese Winkel einschliessen der Voraussetzung nach in beyden Dreyecken gleich sind; so müste, wäre A > D, dem vorigen Lehrsatz gemäss, auch die dritte Seite BC > EF, wäre dagegen A < D, auch BC < EF seyn, welches der Bedingung dass BC = EF ist, widerspricht. Also kann der Winkel A weder grösser noch kleiner als D seyn, muss folglich

dem Winkel D gleich ſeyn. — Eben ſo kann man die Gleichheit der beyden andern Winkel beweiſen, die indeſs noch kürzer daraus folgt, daſs, weil dann zwey Seiten mit dem eingeſchloſsnen Winkel A, D in beyden Dreyecken gleich ſind, dieſe Dreyecke einander
* 6. decken *, folglich die den gleichen Seiten gegenüberſtehenden Winkel B, E und C, F ſo wie die Flächenräume beyder Dreyecke gleich ſeyn müſſen. Und dieſe Gleicheit folgt wiederum aus der Gleichheit dreyer Stücke, nemlich der drey Seiten in beyden Dreyecken.

[Aus drey gegebnen Linien ein Dreyeck zu bilden, lehrt Buch II. Erklärung 11. Zuſatz.]

LEHRSATZ 12.

Fig. 25. *In jedem gleichſchenkligen Dreyeck ſind die Win-*
* E. 17. *kel an der Grundlinie *, welche den gleichen Seiten gegenüberſtehn, gleich.*

Wenn AB = AC iſt, ſo behaupte ich muſs B = C ſeyn.

Es ſey B der Punkt, welcher auf der Grundlinie in der Mitte zwiſchen den beyden Endpunkten B und C
* Gr. 7. liegt. * Ziehe AD, ſo entſtehn dadurch zwey Dreyecke ABD, ACD, welche untereinander gleichſeitig ſind, indem AD beyden gemein, ferner nach der Vorausſetzung AB = AC, und der Conſtruction gemäſs AB = DC iſt. Folglich ſind die der gemeinſchaftlichen Seite
* 11. AD gegenüberſtehenden Winkel einander gleich *, B = C.

Folgerung. Das *gleichſeitige Dreyeck* iſt für jede Seite als Grundlinie gleichſchenklig, und hat deshalb lauter gleiche Winkel, iſt gleichwinklig. Fig. 8.

Zuſatz. Daraus daſs die beyden Dreyecke ABD, ACD ſich decken, folgt auch noch die Gleichheit der übrigen Winkel BAD = DAC und BDA = ADC. Letztere ſind, da BC eine grade Linie iſt, Nebenwinkel, und folglich, als gleiche Nebenwinkel, *rechte Winkel**: folglich, *theilt in jedem gleichſchenkligen Dreyeck eine von der Spitze nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie gezogne grade Linie den Winkel an der Spitze in zwey gleiche Theile, und ſteht zugleich auf der Grundlinie ſenkrecht.* Fig. 25. * E. 14.

[Eben ſo theilt eine grade Linie welche den Winkel an der Spitze im gleichſchenkligen Dreyeck halbirt, das Dreyeck in zwey ſich deckende Dreyecke*: folglich ſteht auch dieſe Linie ſenkrecht auf der Grundlinie und halbirt ſie. * 6.

Daſs endlich auch das aus der Spitze des gleichſchenkligen Dreyecks auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt, erhellt aus Lehrſatz 18. Folg. 2.

Stets ſind alſo dieſe drey Eigenſchaften in derſelben Linie im gleichſchenkligen Dreyeck verbunden.

Findet folglich eine derſelben in einem Dreyecke ABC ohne die andre ſtatt, *ſo ſind die beyden Schenkel des Winkels ungleich* durch deſſen Spitze die halbirende Linie oder das Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite gezogen iſt.]

[Anmerkung. Hierher gehören die fünf erſten Aufgaben am Ende des zweyten Buchs, und Aufg. 8 bis 11. über die Conſtruction der Dreyecke.]

LEHRSATZ 13.

Hat umgekehrt ein Dreyeck zwey gleiche Winkel, so sind auch die Seiten welche den gleichen Winkeln gegenüberstehen gleich, und das Dreyeck ist gleichschenklig.

Fig. 26. Es sey ABC = ACB, so behaupte ich muſs AC = AB seyn.

Denn wären diese beyden Seiten nicht gleich; so müſste eine derselben, z. B. AB, die gröſsere seyn: folglich lieſse sich auf ihr ein Stück BD = AC nehmen. Zieht man dann DC, so erhält man ein Dreyeck BDC, welches sich mit dem Dreyeck BAC decken müſste, weil in beyden die Seite BC gemeinschaftlich, ferner der Annahme gemäſs AD = AC, und nach der Voraus-

* 6. setzung der Winkel B = ACB ist *: folglich wäre der Theil dem Ganzen gleich, welches ungereimt ist. Also können die Seiten AC, AB nicht ungleich seyn, daher das Dreyeck ABC gleichschenklig seyn muſs.

Folgerung. Ein Dreyeck welches lauter gleiche Winkel hat, ist auch gleichseitig.

Ein Dreyeck dessen Seiten alle ungleich sind, hat lauter ungleiche Winkel.

LEHRSATZ 14.

Fig. 27. *Von zwey Seiten eines Dreyecks ist stets die die gröſsere, welche einem gröſsern Winkel gegenübersteht. — Umgekehrt ist von zwey Winkeln eines Dreyecks stets der der gröſsere, welcher einer gröſsern Seite gegenüber steht,*

1. Es sey der Winkel $C > B$, so behaupte ich, daſs die dem Winkel C gegenüberstehende Seite $AB > AC$ ist, welche dem Winkel B gegenübersteht.

Denn man denke sich durch den Winkelpunkt des gröſsern Winkels eine grade Linie CD so gezogen, daſs der Winkel $BCD = B$ sey *, so ist daſs Dreyeck BDC * Gr. 7.
gleichschenklig und $BD = DC$ *. Da nun $AC <$ * 13.
$AD + DC$ *, so ist auch $AC < AD + BD$, d. h. * 8.
$< AB$, folglich AB gröſser als AC.

2. Es sey die Seite $AB > AC$, so behaupte ich daſs der Winkel C, welcher der Seite AB gegenübersteht, gröſser als der Winkel B ist, welcher der Seite AC gegenübersteht.

Denn wäre C nicht gröſser als B, so müſste jener Winkel entweder kleiner als B, oder gleich B seyn. Wäre $C < B$ so müſste, wie eben bewiesen worden, $AB < AC$ gegen die Voraussetzung, seyn. Wäre $C = B$ so müſste $AB = AC$ gleichfalls gegen die Vor- * 12.
aussetzung seyn. Also ist nothwendig $C > B$.

LEHRSATZ 15.

Von einem Punkte A auſserhalb einer graden Linie DE, läſst sich nach dieser Linie nur eine einzige senkrechte Linie ziehn. Fig. 28.

Gesetzt man könnte ihrer zwey AB und AC ziehn; so verlängere man die eine AB, nehme auf dieser Verlängerung $BF = AB$ und ziehe FC.

Dann deckten sich die beyden bey B rechtwinkligen Dreyecke ABC und FBC, weil die eine Kathete CB, beyden Dreyecken gemein ist, und die zweyten

Katheten AB, BF der Conſtruction gemäſs gleich
*6.Folg. ſind *: folglich wäre der Winkel BCF gleich dem Winkel BCA, welcher der Annahme nach ein rechter iſt. Alſo müſste auch der Winkel BCF ein rechter ſeyn: folglich, weil die Summe der beyden aneinander liegenden Winkel BCA + BCF zwey rechte Winkel be-
* 4. trüge, müſsten CA, CF in einer graden Linie liegen*, folglich wären zwiſchen den beyden Punkten A, F zwey verſchiedne grade Linien ABF, ACF möglich, welches Grundſatz 6 widerſpricht. Alſo ſind zwey verſchiedne ſenkrechte Linien von einem Punkte auſserhalb einer graden Linie, auf dieſe Linie unmöglich.

[*Folgerung.* Alſo iſt kein Dreyeck mit zwey rechten Winkeln möglich.]

[Anmerkung. Daſs auf eine grade Linie durch einen Punkt in ihr nur ein einziges Perpendikel möglich iſt, haben wir ſchon Lehrſatz 1. Zuſatz 2. bewieſen. Wie dieſe Perpendikel zu conſtruiren ſind, lehrt Aufg. 2, 3.]

LEHRSATZ 16.

Fig. 28. *Man denke ſich von einem Punkte A nach einer graden Linie DE die ſenkrechte Linie AB, und mehrere ſchiefaufſtehende grade Linien AE, AC, AD etc. gezogen, ſo iſt:*

1) *die ſenkrechte AB unter allen dieſen Linien die kürzeſte.*

2) *Unter den ſchiefſtehenden Linien ſind je zwey, z. B. AC, AE, welche auf entgegengeſetzten Seiten der ſenkrechten Linie AB gleich weit von B (d. h. ſo daſs BC = BE iſt) aufſtehn, gleich.*

3) *Von allen andern schiefstehenden Linien (z. B. AC, AD oder AC, AE) ist stets die die grössere, welche weiter von der senkrechten aufsteht.*

Man verlängere die senkrechte Linie AB um BF = AB, und ziehe FC, FD.

1. Da nach der Construction die Winkel ABC, CBF rechte, folglich gleich, und auch die Seiten AB, BF gleich sind, so decken sich die beyden über die gemeinschaftliche Seite BC beschriebnen Dreyecke ABC und FBC *. Folglich sind die dritten Seiten AC, CF einander gleich. Nun aber ist die grade Linie ABF kürzer als die gebrochne Linie ACF *, folglich auch AB die Hälfte der ABF kürzer als AC die Hälfte der ACF. Also ist die senkrechte Linie kürzer als jede schiefaufstehende. * 6. * E. 5.

2. Wenn BE = BC ist, so decken sich die beyden über AB beschrieben bey B rechtwinkligen Dreyecke ABE, ABC *: folglich sind die dritten Seiten AC, AE, und folglich je zwey schiefstehende Linien, welche gleich weit von B aufstehn, gleich. — Diese Linien müssen aber zu entgegengesetzten Seiten des Perpendikels AB aufstehn, weil sie sonst zwey Punkte A und B gemein hätten, folglich zusammenfielen, und nur Eine, nicht zwey verschiedne grade Linien ausmachten *. *6. Folg. *Gr. 6. F. 1.

3. Im Dreyeck ADF ist die Summe der beyden Seiten AD und DF grösser als die Summe der beyden Linien CA und CF, die von einem Punkte innerhalb des Dreyecks nach den Endpunkten der dritten Seite gezogen sind *. Also ist auch AD, die Hälfte von AD + * 9.

DF grösser als AC, die Hälfte von AC + CF: folglich sind die schiefstehenden Linien länger, die weiter vom Perpendikel ab aufstehn.

Folgerung 1. Die *senkrechte Linie* ist das *wahre Maass des Abstands eines Punkts von einer graden Linie*, weil sie nur auf eine einzige Art vorhanden (2), und zugleich die kürzeste unter allen möglichen Linien ist, die sich vom Punkte zur graden Linie ziehn lassen. [Daher werden wir hinfüro den *Abstand eines Punkts von einer graden Linie*, und umgekehrt den *Abstand einer graden Linie von einem Punkte* stets durch das Perpendikel, welches vom Punkte auf die Linie gefällt wird, bestimmen. Wenn wir von der Grösse *eines solchen Abstands* reden, muss man darunter die Grösse dieses Perpendikels zwischen Punkt und Linie verstehn.]

Fig. 36. [Der *Abstand zweyer Linien AB, CD von einander* hängt vom Abstande der Punkte in der einen, von der andern Linie, ab. Folglich muss dieser Abstand durch die Grösse der Perpendikel BA, FE, DC, die man von den Punkten in der einen BD, auf die andere AC zieht, bestimmt werden. Sind diese Perpendikel insgesammt gleich, so sind die beyden Linien *gleich weit abstehend* (lineae aequidistantes), wo nicht, so sind sie *ungleich weit abstehend*.]

Folgerung 2. *Von einem Punkte lassen sich nach einer und derselben graden Linie nicht drey gleiche grade Linien ziehn.* Denn sonst müste es auf einerley Seite des Perpendikels zwey gleiche (nicht zusammenfallende) schief aufstehende grade Linien geben, welches nach 2 unmöglich ist.

[Zusatz I. Aus der Deckung der beyden Dreyecke ABC, ABE in (2) folgt die Gleichheit der Winkel C = E und der Winkel CAB = BAE; so wie umgekehrt aus der Gleicheit dieser Winkel und der Seiten AC = AE, oder der Seiten BC = BE die Deckung der beyden Dreyecke. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

α, Die schiefen Linien AC, AE welche gleich weit von *der senkrechten Linie AB abstehn* (d. h. so dass CB = BE ist) sind sowohl gegen die Linie DE, als auch gegen die senkrechte AB beyde unter gleichen Winkeln geneigt.

β, Zwey schiefe Linien AC, AE, die unter gleichen Winkeln C = E auf die grade Linie DE aufstehn, sind gleich; und überdem gleich weit vom Perpendikel AB entfernt, d. h. so, dass sowohl BC = CE, als auch der Winkel CAB = BAE ist, fallen folglich, wenn sie auf einerley Seite des Perpendikels liegen zusammen (2).

γ, Zwey schief-aufstehende Linien AC, AE die gleiche Winkel mit dem Perpendikel AB machen, sind gleich, und stehn von demselben gleich weit ab.]

[Zusatz. II. Jede der schiefstehenden Linien AE, AC, AD etc. steht auf DE unter ungleichen Nebenwinkeln *, einem spitzen und einem stumpfen auf. *E. 13.
Und zwar *liegt der spitze Winkel mit dem Perpendikel stets auf einerley, der stumpfe Winkel hingegen mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schiefstehenden Linie.* Denn jede schiefstehende Linie z. B. AC bildet

mit dem Perpendikel AB und dem zwischen beyden liegenden Stück der graden Linie DE ein rechtwinkliges Dreyeck, worin der Winkel der schiefstehenden Linie vorkömmt, der mit dem Perpendikel auf einerley Seite der schiefstehenden Linie liegt. Nun ist das Perpendikel AB stets kleiner als AC (1), folglich auch der Winkel C kleiner als der rechte Winkel B *, folglich jener Winkel ein spitzer, dagegen sein Nebenwinkel ACD, der mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schiefstehenden Linie AC liegt, ein stumpfer.]

[*Folgerung* 1. Wenn zweyer schiefstehender Linien AC, AD spitze Winkel (oder auch ihre stumpfe Winkel) beyde nach einerley Seite jener Linien zu liegen, so liegen diese Linien selbst beyde auf einerley Seite des Perpendikels AB. Wenn dagegen, wie bey AC, AE die spitzen (oder auch die stumpfen Winkel auf entgegengesetzten Seiten jener Linien, (folglich gegeneinander gekehrt) liegen, so liegen diese Linien beyde auf entgegengesetzter Seite des Perpendikels AB.]

[*Folgerung* 2. Folglich fällt das Perpendikel, welches aus der Spitze eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Grundlinie gefällt wird, wenn beyde Winkel an der Grundlinie spitz sind, *innerhalb*, wenn einer dieser Winkel spitz der andre stumpf ist, *außerhalb* des Dreyecks. — Ist keiner der Winel an der Grundlinie ein rechter, so fällt das Perpendikel in die eine

Kathete

Kathete des rechtwinkligen Dreyecks, weil aus einem Punkt auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist. d. U.

LEHRSATZ 17.

Es sey EF eine auf der graden Linie AB, in deren Mitte C, aufstehendes Perpendikel, so ist 1) jeder Punkt in diesem Perpendikel von den beyden Endpunkten der graden Linie AB gleich weit entfernt; 2) jeder Punkt ausserhalb des Perpendikels hingegen von diesen Endpunkten ungleich weit entfernt. Fig. 29.

1. Da der Voraussetzung gemäss AC = CB ist, so stehn zwey aus irgend einem Punkte D des Perpendikels nach A und B gezogene grade Linien DA, DB, vom Perpendikel gleich weit ab, sind also gleich.** 16. 2. Und folglich steht jeder Punkt im Perpendikel von den beyden Endpunkten A, B gleich weit ab.

2. Es sey I ein Punkt ausserhalb des Perpendikels. Zieht man IA, IB, so muss eine dieser beyden Linien z. B IA das Perpendikel in irgend einem Punkte D durchschneiden. Man ziehe DB. Nun ist IB < ID + DB *, und, da D ein Punkt im Perpendikel ist, * 8. nach (1) DB = DA; folglich IB < ID + DA d. i. < IA, folglich jeder Punkt, ausserhalb des Perpendikels von den Endpunkten A, B ungleich weit entfernt.

Folgerung 1. Umgekehrt muss jeder Punkt, welcher von zwey Punkten A, B gleich weit absteht, in dem Perpendikel auf AB liegen, welches in der Mitte zwischen diesen Punkten aufsteht. Denn ausserhalb dieses Perpendikels kann ein solcher Punkt nach (2) nicht liegen. *Eine grade Linie, welche durch zwey von A und B gleich weit abstehende Punkte D, F gezogen ist, muss also dieses Perpendikel seyn.*

Folgerung 2. *Das Perpendikel durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks muss die Grundlinie, und folglich auch den Winkel an der Spitze halbiren.* Denn die Spitze ist von den beyden Endpunkten gleichweit entfernt, und durch jeden Punkt ist nur ein Perpen-
* 15. dikel auf eine grade Linie möglich *.

Fig. 28. *Folgerung* 3. Wenn man von zwey gegebnen Punkten C, E noch so viel Paare sich durchschneidender Linien CA, EA so zieht, dass je zwey, welche sich schneiden, gleich sind, (mithin im Verhältniss der Gleichheit stehn) so müssen die Durchschnittspunkte dieser Linien insgesammt in einem Perpendikel auf CE, das in der Mitte zwischen C und E aufsteht, liegen. Dieses Perpendikel ist daher der *geometrische Ort* des Durchschnittspunkts oder der Spitzen gleichschenkliger Dreyecke, welche über dieselbe Grundlinie be-
* E. 21. schrieben werden *.

[LEHRSATZ 18.]

Fig. 24. *Zwey Dreyecke DEF, NBL decken sich, wenn in ihnen zwey Winkel und irgend eine Seite gleich sind.*

Liegen die gleichen Winkel beyde an der gleichen Seite an, so ist dieser Satz kein andrer, als der schon bewiesene 7te Lehrsatz. Wo nicht, so sey die Seite NB = DE, der Winkel N = D und der Winkel L = F.

Aus der Spitze des dritten Winkels B, E, sey auf die gegenüberstehende Seite NL, DF, das Perpendikel BM, EH gefällt. Weil DE = NB ist, decken sich diese beyde Linien, so dass die Endpunkte E, B und D, N zusammenfallen. Weil ferner die Winkel D, N gleich sind, so fällt auch die Seite DF auf NL *. *Gr.10.
Nun ist von Einem Punkte (den zusammenfallenden E, B) nach Einer graden Linie (den zusammenfallenden DF, NL) nur ein einziges Perpendikel möglich *; * 15.
folglich müssen auch die Perpendikel EH, BM einander decken. In dieser Lage gehn die dritten Seiten EF, BC beyde durch denselben Punkt (E, B), und stehn auf dieselbe grade Linie DF, NL, zu einerley Seite des Perpendikels EH, BM, und zwar der Voraussetzung nach unter gleichen Winkeln L = F auf. Folglich müssen sie zusammenfallen *, also die beyden Dreyecke einander decken. *16.Z.1. β.

Folgerung 1. Aus der Gleichheit zweyer Winkel und einer Seite in zwey Dreyecken, folgt also die Gleichheit des Flächenraums beyder Dreyecke, der dritten Winkel B, E und der beyden andern, den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten, NL = DF und BL = EF.

Folgerung 2. Zwey rechtwinklige Dreyecke decken einander, wenn in ihnen ausser dem rechten noch ein andrer Winkel, und irgend eine der Seiten gleich sind.

Anmerkung. Dieser Satz fehlt bey Le Gendre. Bey *Euklid* ist er der 26ste Satz des ersten Buchs, wird dort aber anders bewiesen als hier, wo ich den Beweis gewählt habe, den man in *Kästners* Geometrie findet. d. U.

LEHRSATZ 19.

Zwey rechtwinklige Dreyecke decken ſich, wenn die Hypotenuſe und eine der Katheten in beyden gleich iſt.

Fig. 30. Es ſey die Hypotenuſe AC = DF und die Kathete AB = DE, ſo wird die Deckung der beyden rechtwinkligen Dreyecke ABC, DEF dargethan ſeyn, wenn bewieſen wird, daſs die beyden andern Katheten BC, EF gleich ſeyn müſſen. Geſetzt ſie könnten ungleich, und BC gröſser als EF ſeyn, ſo nehme man auf BC ein Stück BG = EF und ziehe AG. Dann hätten die beyden rechtwinkligen Dreyecke ABG, DEF gleiche Katheten, AB = DE und BG = EF; ſie müſten ſich alſo decken *, und auch ihre dritten Seiten AG, DF gleich ſeyn. Es iſt aber nach der Vorausſetzung DF = AC. Alſo wäre AG = AC, und wir hätten hier zwey gleiche, durch den Punkt A gezogne, auf BC ſchiefaufſtehende grade Linien, in ungleichem Abſtand vom Perpendikel, welches unmöglich iſt *. Alſo iſt es unmöglich daſs BC und EF ungleich wären, alſo nothwendig, daſs beyde Dreyecke ſich decken *.

* 6. f. 2. * 16. 3. * 11.

[Anmerkung. Auch hieraus folgt, daſs das Perpendikel aus der Spitze des gleichſchenkligen Dreyecks auf die Grundlinie, die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt.]

[LEHRSATZ 20.]

Zwey ſchiefwinklige Dreyecke decken ſich, wenn in ihnen zwey Seiten und einer der Winkel, welcher dieſen Seiten gegenüberſteht, gleich ſind, und dabey *die zweyten gegenüberstehenden Winkel beyde spitz, oder beyde stumpf sind.*

Es sey NB = DE, BL = EF und der Winkel N = D, so werden die beyden Dreyecke NBL, DEF sich unter der Bedingung decken, daſs die beyden andern, den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel, beyde spitz, oder beyde stumpf sind, welche Fälle die Figur beyde darstellt. Fig. 24.

Man ziehe aus der Spitze der von den gleichen Seiten eingeschloſsnen Winkel B, E auf die gegenüberstehende Grundlinie oder deren Verlängerung die senkrechten Linien BM, EH *, so decken sich die rechtwinkligen Dreyecke NMB, DHE weil in ihnen einer der spitzen Winkel N, D und eine Seite NB, DE gleich sind *. Also fallen die Seiten NM, DH, die Punkte B, E, und zugleich die Perpendikel BM, EH zusammen. Folglich sind dann BL, EF zwey von Einem Punkte eines Perpendikels, nach Einer graden Linie, (den zusammenfallenden NL, DF) gezogne schiefaufstehende Linien. Da nun der Voraussetzung gemäſs, erstens die Winkel L, F, welche den zusammenfallenden Linien NB, DE gegenüberstehn und daher auf einerley Seite der schiefaufstehenden Linie BL, EF liegen, entweder beyde spitz, oder beyde stumpf sind, so müssen diese schiefstehenden Linien BL, EF sich auf einerley Seite des Perpendikels befinden *, und und da sie zweytens der Voraussetzung nach gleich sind, so müssen sie zusammenfallen *. — Folglich fallen alle drey Seiten der Dreyecke NBL, DEF zusammen, und beyde Dreyecke decken sich.

*Aufg. 3

*18. f. 2.

*16. Z. 2.

*16. 2.

Anmerkung. Diesen Satz der bey *Euklid* und *Le Gendre* fehlt, habe ich aus *Simpson* entlehnt, den Beweis aber selbst geführt, da Simpson die Hauptsache, dass BC, EF auf einerley Seite des Perpendikels fallen müssen, nicht darthut, wozu ihm Sätze, wie die beym 16ten Lehrsatz nachgetragnen, fehlten. Dass dieser Satz übrigens allein unter der beygefügten Bedingung gilt, erhellt aus dem Beweise. Denn nur unter dieser Bedingung ist es nothwendig dass die schiefstehenden Linien BL, EF, beyde auf einerley Seite des Perpendikels liegen und sich decken. Ohnedem könnten sie wie BL, E'F auf entgegengesetzten Seiten des Perpendikels liegen, und dann würden sie ihrer Gleichheit ungeachtet nicht zusammenfallen. Die Deckung bliebe also ohne jene Bedingung zweifelhaft. — Wie, wenn zwey Linien als Seiten eines Dreyecks, und ein ihnen gegenüberstehender Winkel gegeben sind, das Dreyeck zu finden ist, lehrt Aufg. 10.

d. U.

LEHRSATZ 21.

Fig. 31. *Zwey grade Linien AC, BD, welche auf einer* * E. 14. *dritten AB senkrecht stehn*, sind parallel, d. h. tref-* * E. 15. *fen nie zusammen, so weit man sie auch verlängert*.*

Denn gesetzt sie träfen in irgend einem Punkte O * E. 10. oberhalb oder unterhalb der Linie AB zusammen *; so hätte man einen Punkt O, von welchem zwey verschiedne Perpendikel OA, OB noch derselben graden * 15. Linie AB giengen, welches unmöglich ist *.

[Hieraus erhellt die Möglichkeit parallaler Linien. — Die 15te Erklärung gehörte also hierher.]

LEHRSATZ 22.

Fig. 32. *Wenn auf der graden Linie AB, eine andere BD senkrecht und eine zweyte AC schief aufsteht, so dass*

der spitze Winkel BAC nach der Seite jenes Perpendikels zu liegt, so müssen BD, AC genugsam verlängert [an der Seite der AB, auf welcher der spitze Winkel liegt] zusammen treffen.

Aus verschiednen Punkten F, C, P, der schiefstehenden Linie AC seyen auf AB die Linien FG, CM, PN senkrecht gezogen.

Diese Perpendikel fallen insgesammt auf die Seite der AC, auf welcher der spitze Winkel liegt *, d. i. der Voraussetzung nach insgesammt nach der Seite des Perpendikels BD. Die Punkte G, M, N in welchen sie auf die AB aufstehn, können nicht mit dem Punkte A zusammenfallen, weil BAC kein rechter Winkel ist. Eben so wenig können sie in der entgegengesetzten Verlängerung AL der Linie AB liegen. Denn sonst müsste das im Punkte A auf AB errichtete Perpendikel AE von diesen Perpendikeln durchschnitten werden, (wie z. B. von FH in K)*, und dann wären von dem Durchschnittspunkte (K) zwey verschiedne Perpendikel auf AL vorhanden (KA, KH) welches unmöglich ist*: folglich müssen die Punkte G, M, N in der Linie AB von A nach B zu liegen.

*16. Z. 2.
* Gr. 8.
* 15

Grade aus denselben Gründen muss, wenn AC grösser als AF ist, auch der Punkt M von G nach B zu in der Linie AB liegen. Sollte er mit G zusammenfallen, so stünden in G auf AB zwey verschiedne grade Linien GF, GC senkrecht, welches unmöglich ist*. Sollte er in die entgegengesetzte Seite der AB fallen, so würde das Perpendikel aus C das Perpendikel FG durchschneiden, und aus einem Punkte ausserhalb der

*1. Z. 2.

AB auf ihr zwey verſchiedne Perpendikel vorhanden ſeyn, welches eben ſo wenig möglich iſt. Folglich muſs der Punkt M von G nach B zu fallen, ſo daſs AM gröſser als AG iſt.

Wenn man alſo auf AC ſtets in gröſsern Entfernungen Punkte nimmt, und aus ihnen ſenkrechte Linien auf AB zieht, ſo fällt der Punkt wo ſie auf AB aufſtehn, immer weiter und weiter von A ab. In dieſem Wachsthum der Entfernungen AG, AM, AN Gränzen annehmen zu wollen, würde ungereimt ſeyn. Denn geſetzt man wollte behaupten irgend eine der ſenkrechten Linien z. B. CM ſey die letzte, folglich die, deren Fuſspunkt M am weiteſten von A abſtünde, ſo lieſse ſich allemal, auf die Art, wie es hier geſchehn iſt, darthun, daſs wenn man die AB verlängert *, ein aus irgend einem Punkte P der Verlängerung auf AB gefälltes Perpendikel PN in einer Entfernung AN, die gröſser als AM iſt, aufſtehn müſste; ein Reſultat, welches der Annahme, daſs CM die letzte am weiteſten von A entfernte ſenkrechte Linie ſey, widerſpricht.

* Fg. 2.

Folglich ſtehn auf AB in jeder beliebigen, noch ſo groſsen Entfernung von Punkte A Perpendikel, die aus einem Punkte der AC gefällt ſind, auf: folglich auch in der Entfernung AB, und hier muſs das Perpendikel mit der ſenkrechten Linie BD zuſammenfallen, da in einem Punkte B einer graden Linie nur ein einziges Perpendikel auf dieſe Linie möglich iſt *: folglich müſſen die Linen AC, BD genugſam verlängert, in irgend einem Punkte zuſammentreffen, und zwar

* I. Z. 2.

an der Seite der AB, auf welcher der spitze Winkel BAC liegt.

[Anmerkung. Dieses ist der Fundamentalsatz in der *Lehre von den Parallellinien*, dessen Beweis, wie ihn Le Gendre führt, ich auf das Vortheilhafteste darzustellen, und, (wie man aus den Citaten sehn kann) durch Einschaltung früherer von Le Gendre übergangener Sätze in das System, ich noch besser zu begründen gesucht habe. Aus diesem Satze folgt der 24ste Lehrsatz, dessen Beweis, wie es scheint, *Euklid* für unmöglich hielt, und den in der That noch niemand, so viele Wege man auch eingeschlagen hat, elementarisch und völlig bindend dargethan hat. *Hr. Le Gendre* würde sich daher ein bleibendes Verdienst um die Geometrie erworben haben, wenn der hier mitgetheilte Beweis biedend und ohne Lücke wäre, und sich dagegen nichts anders einwenden liesse, als was Le Gendre selbst in einer Anmerkung erinnert, daſs die Idee des Unendlichen dabey mit ins Spiel komme (welches, wenn es nur auf gehörige geometrische Art geschieht, nicht tadelnswürdig seyn könnte). Ich glaube aber an Hr. *Le Gendres* Beweis zweyerley aussetzen zu müssen.

Erstens wird im indirecten Beweise im Ersten Absatz unbewiesen behauptet, daſs die als senkrecht angenommene FH das Perpendikel AE durchschneiden müsse; eine Lücke die jedoch leicht auszufüllen ist, wenn man nur die von unserm Verfasser übergangnen Sätze vom Schneiden der Linien den Principien der Geometrie zufügt, wie ich das zu thun versucht, und deshalb auf Grundsatz 8 verwiesen habe.

Zweytens, und das ist die Hauptsache, thut dieser Beweis zwar überzeugend dar, daſs, falls es in der Verlängerung einer graden Linie keine Gränzen giebt, (und daſs es die nicht gebe liegt in Forderung 2.) es auch *kein letztes Perpendikel* aus Punkten der AC auf AB *geben könne*. Allein daraus folgt keineswegs, wie im dritten Absatz stillschweigend angenommen wird, daſs es *in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte* A *keine Gränze* geben könne. Denn es wäre vielleicht doch denkbar, daſs bey gleich weit entfernten Punkten auf der AC, die Perpendikel auf AB immer weniger von einander abstünden, und ihre Entfernungen vielleicht in einer geometrischen oder andern unendlichen Reihe die eine endliche Summe hat, abnehmen könnten, da denn für gewisse Entfernungen der BD, die AC sich ihr assymptotisch nähern würde, ohne sie je zu erreichen. In diesem Fall *wäre zwar eine Gränze* in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte A auf der Linie AB *vorhanden*, über die heraus für jede Entfernung von A kein Perpendikel aus einem Punkte in der AC die AB mehr duchschnitte, allein dem ungeachtet gäbe es kein *letztes Perpendikel*, weil es bey allen Annäherungen ohne Ende keinen letzten Zustand giebt. Es scheint daher etwas übereilt zu seyn, wenn *Hr. Le Gendre* im vierten Absatz aus dem was dargethan ist (d. h. daraus dass es kein letztes Perpendikel giebt) unmittelbar folgert, dass in jeder noch so grosen Entfernung von A ein Perpendikel aufstehe; eine Folgerung die nur dann gültig wäre, wenn er dargethan hätte, dass es in der Entfernung der Durchschnittspunkte der Perpendikel auf der Linie AB, vom Punkte A an gerechnet, *keine Gränze* giebt. So lange er uns dieses nicht beweist (und das möchte auf dem Wege, den er einschlägt, kaum möglich seyn) können wir seinen Beweis nicht als bindend erkennen, sondern müssen ihn, so viel Scharfsinn er übrigens verräth, den nicht ganz geglückten Versuchen die Schwierigkeit in der Theorie der Parallellinien zu heben, beyzählen. Unserm Leser wird er wenigstens dazu dienen, dass er einsieht, worauf die Schwierigkeit bey diesem Satze beruht, welches mehreren, die sich mit dieser Theorie beschäftigt haben, nicht scheint recht deutlich gewesen zu seyn. — Ueber die Versuche die Theorie der Parallellinien auf einem andern Wege zu begründen, sehe man die erste unter den Bemerkungen, welche diesen Elementen angehängt sind.

d. U.

LEHRSATZ 23.

*Fig. 32. *25. An. *Wenn zwey grade Linien AC, BD mit einer dritten AB zwey **innere Winkel*** *CAB, ABD*

bilden, deren Summe zwey rechten Winkeln gleich ist, so sind sie parallel.

Aus dem Punkt G in der Mitte zwischen A und B sey senkrecht auf AC die grade Linie EGF gezogen *. *Au. 1. 3. Der Voraussetzung nach sind GBD + GAE zwey rechten Winkeln gleich. Nun sind auch, als Nebenwinkel, GBD + GBF zwey rechten Winkeln, also der Summe jener beyden Winkel gleich*. Folglich GAE * Gr. 1. = GBF.* Ueberdem sind als Scheitelwinkel AGE, * Gr. 2. BGF, und der Construction gemäss die Seiten GA, GB gleich. Folglich decken sich die beyden Dreyecke AEG, BFG *, und auch die Winkel GFB, GEA * 6. sind gleich. Nun ist GEA der Construction gemäss ein rechter Winkel, also auch GFB. Folglich stehn die beyden Linien AC, BD auf *einer* dritten senkrecht, sind also parallel*. * 21.

[*Folgerung.* Sollen also zwey grade Linien zusammentreffen, so müssen sie mit jeder dritten, welche sie durchschneiden, zwey innere Winkel bilden, die zusammen genommen grösser oder kleiner als zwey rechte sind.]

LEHRSATZ 24.

Wenn zwey grade Linien AI, BD, mit einer dritten AB zwey innere Winkel BAI, ABD bilden, deren Summe kleiner als zwey rechte Winkel ist, so treffen sie genugsam verlängert zusammen, und zwar an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte sind, liegen.]

Man ziehe durch A die grade Linie AC, [unter einem Winkel, welcher dem Nebenwinkel von ABD

*Aufg. 4 gleich ist *] so dass die beyden innern Winkel CAB, ABD zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich werden, und nehme dann dieselbe Construction als beym vorigen Satze vor. — Da dann AE das Perpendikel und AK eine schiefstehende Linie auf EG ist, die beyde durch denselben Punkt A gehn, so ist der Winkel AKE, welcher mit dem Perpendikel auf einer-
*16 Z. 2. ley Seite der schiefstehenden AK liegt, spitz *, folg-
* 5. lich auch sein Scheitelwinkel FKI *. Daher müssen KI, FD genugsam verlängert oberhalb EF zusammentref-
* 22. fen *. [Nun aber können sie nicht in dem Stück BF zusammentreffen; weil sonst die Winkel BAI, ABD, gegen die Voraussetzung nicht auf einerley Seite der AB liegen würden. Folglich müssen sie in dem Stück BD, also oberhalb AB zusammentreffen, d. i. an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte sind, liegen.]

Zusatz I. Dasselbe findet auch statt, wenn zwey Linien AM, BD mit der dritten AB zwey innere Winkel BAM, ABD bilden, deren Summe *grösser als zwey rechte Winkel ist*. Denn da die Summe der Nebenwinkel BAM, BAN und ABD, ABF vier rechten Winkeln
*5. Z. 1. gleich ist *, und der Voraussetzung nach BAM + ABD grösser als zwey rechte Winkel ist; so muss die Summe der beyden andern Winkel BAN + ABF kleiner als zwey rechte Winkel seyn, also AN dem vorigen Beweise zu folge mit BF zusammentreffen, [jetzt aber unterhalb AB, da in diesem Fall die innern Winkel, die kleiner als zwey rechte sind, unterhalb AB liegen.]

Zusatz II. *Durch jeden Punkt A ist mit einer graden Linie BD nur eine einzige Parallellinie AC möglich.* Denn jede von AC verschiedne grade Linie AI oder AM, bildet mit AB einen kleinern oder einen grösern Winkel als AC, folglich zwey innere Winkel, deren Summe kleiner oder gröser als zwey rechte ist, durchschneidet also BD.

[Anmerkung. Die Bestimmung zu welcher Seite der AB, die beyden graden Linien zusammentreffen, fehlte bey unserm Verfasser mit Unrecht, da sie von vielem Gebrauch ist. — Der Lehrsatz selbst ist *Euklids* eilfer Grundsatz, über den man einige Bemerkungen am Ende dieses Werks findet, wo auch unser Verfasser eine überraschende analytische Methode angiebt, wie sich die Hauptsätze der Geometrie unabhängig von der Theorie der Parallellinien darthun lassen.]

LEHRSATZ 25.

Wenn zwey Parallellinien AB, CD von einer graden Linie EF geschnitten werden, so ist die Summe der beyden innern Winkel AGO, GOC zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 34.

Denn gesetzt sie sey kleiner oder gröser als zwey rechte Winkel, so müsten, dem vorigen Lehrsatz zu folge, beyde Linien zusammentreffen, wären also nicht parallel.

Folgerung 1. Wenn AGO ein rechter Winkel ist, so muss es auch der zweyte innere Winkel GOC seyn. Folglich *steht jede grade Linie, die auf einer von zwey Parallellinien senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht.*

Folgerung 2. Da AGO + GOC zwey rechten Winkeln gleich ist, überdem auch die Summe der Nebenwinkel GOD + GOC zwey rechte Winkel beträgt, so ist AGO gleich GOD, also auch gleich dem Scheitelwinkel des letztern COF. Also sind sowohl die vier spitzen Winkel EGB, AGO, GOD, COF einander gleich, als auch die vier stumpfen Winkel EGA, BGO, GOC, DOF; und jeder der spitzen macht mit jedem der stumpfen Winkel zusammengenommen zwey rechte Winkel aus. — Umgekehrt ist, wenn AGO gleich GOD oder COF ist, auch AGO + GOC gleich GOD + GOC d. h. zwey rechten Winkeln gleich.

Anmerkung. Diese Winkel liegen um zwey verschiedne Durchschnittspunkte G, O. Ein Winkel an einem Durchschnittspunkt in Verbindung mit einem Winkel am andern Durchschnittspunkt betrachtet, geben Paare von Winkeln, denen man eigne Namen gegeben hat. Die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche zu einerley Seite der durchschneidenden Linie liegen, nennt man vorzugsweise *innere Winkel* (angles internes) z. B. AGO, GOC auch BGO, GOD; die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie liegen, *Wechselswinkel* (angles alternes oder alternes internes) z. B. AGO, GOD auch BGO, GOC; endlich ein Paar Winkel auf einerley Seite der durchschneidenden Linie, wovon einer zwischen, der andere ausserhalb der beyden Parallellinien liegt, *äussere Winkel* (angles internes - externes), dergleichen EOD, EGB, auch EGA, EOC; FGB, FOD, und FGA, FOC sind. (Die Winkel ausserhalb beyder Parallellinien, auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie, z. B. EGB, COF nennt *Le Gendre* alternes - externes; im Deutschen würden wir sie am schicklichsten *äussere Wechselswinkel* nennen.) — In diese Benennungen übertragen, sagt unser Lehrsatz und die vorhergehenden folgendes aus,

1. *Wenn zwey Parallellinien von einer dritten graden Linie durchſchnitten werden, ſo ſind* α) die *innern Winkel zuſammen genommen zwey rechten Winkeln gleich;* β) *die Wechſelswinkel und* γ) *auch die äuſsern Winkel untereinander gleich.*

2. Wenn *umgekehrt* zwey grade Linien ſo von einer dritten durchſchnitten werden, daſs die Summe der Innern Winkel zwey rechte beträgt, oder daſs die Wechſelswinkel, oder daſs die Aeuſsern-Winkel gleich ſind; ſo ſind die Linien parallel *. Eins * 23.
dieſer Merkmale zieht ſtets die beyden andern nach ſich, wie aus Folgerung 2 erhellt.

[3. Werden dagegen zwey grade Linien von einer dritten ſo durchſchnitten, daſs die innern Winkel *nicht* zwey rechten, und Fig. 33.
die Wechſelswinkel, ſo wie die äuſsern Winkel, *nicht* untereinander gleich ſind, *ſo treffen dieſe Linien zuſammen*, und zwar an der Seite der durchſchneidenden Linie, an welcher die innern Winkel IAB + ABD < 2 R ſind *; folglich an der Seite, wo * 24.
der kleinere der Wechſelswinkel liegt IAB < ABF oder ABD < BAL, oder an der Seite an welcher der kleinere von zwey äuſsern Winkeln zwiſchen den Parallellinien liegt.]

[4. Auf die Sätze unter 2 beruht die *Conſtruction der Parallellinien*, in Aufgabe 6, und daher auch die *Möglichkeit des Parallelogramms* *, welches entſteht, wenn man von zwey Punkten * E. 19.
einer Parallellinie nach der andern gleichlaufende Linien zieht, Fig. 34.
folglich Parallelen zwiſchen Parallelen bildet.]

LEHRSATZ 26.

Zwey grade Linien AB, CD, welche mit einer Fig. 35.
dritten EF parallel ſind, ſind untereinander ſelbſt parallel.

Es ſey RP ein Perpendikel auf EF. Weil nun AB mit EF parallel iſt, ſo ſteht RP auch auf AB ſenkrecht *. *25. f 1.
Weil zweytens CD mit EF parallel iſt, ſo ſteht RP auch auf CD ſenkrecht. Alſo ſtehn AB, CD beyde

auf einer graden Linie RP ſenkrecht; folglich ſind ſie
* 21. untereinander parallel *.

LEHRSATZ 27.

Fig. 36. *Zwey Parallellinien ſtehn überall gleich weit von einander ab, d. h. Perpendikel, die von Punkten in der einen auf die andre gefällt werden, ſind überall gleich.*

Es mögen BA, DC zwey Perpendikel ſeyn, welche aus Punkten in der einen Parallellinie BD auf die andre Parallellinie AC gefällt ſind. Ferner ſey F ein Punkt in der Mitte von BD, und FE das Perpendikel aus dieſem Punkt auf AC. Alle drey Perpendikel ſtehn auf beyden Parallellinien zugleich
*25. f. 1. ſenkrecht *, daher die Winkel um A, E, C, D, F, B insgeſammt rechte ſind. Dieſes vorausgeſetzt behaupte ich, daſs das Viereck AEFB ſich mit dem Viereck CEFD deckt. Beyden iſt die Seite FE gemein. Da ferner die Winkel bey beyden rechte ſind, folglich einander decken, und der Conſtruction gemäſs BF = FD iſt, ſo fällt der Punkt B auf D, und da die Winkel bey B und D beyde rechte, alſo ebenfalls gleich ſind, fällt auch BA auf DC. Ueberdem fällt, weil bey E rechte Winkel ſind, EA auf EC, folglich auch A auf C, als Durchſchnittspunkte zweyer zuſammenfallender Linien. Alſo decken ſich die beyden Vierecke, und die Perpendikel AB, CD ſind gleich. [Da dieſer Beweis für alle Perpendikel gilt, ſo ſtehn folglich zwey Parallellinien durchgängig gleich weit von einander
*16. f. 1. ab *, ſind lineae aequidiſtantes; eine Eigenſchaft, woraus mehrere die Definition und die ganze Theorie

Theorie der Parallellinien zu gründen gesucht haben, wozu diese Eigenschaft jedoch erst vermöge des folgenden Lehrsatzes tüchtig wird. Siehe Bemerkung 1. am Ende dieses Bandes.]

Zusatz. Grade auf dieselbe Art wird *der umgekehrte Satz* bewiesen, dass eine Linie, welche von einer graden Linie in allen ihren Punkten gleich weit absteht, auch eine grade Linie, und zwar eine Parallellinie mit der erstern seyn muss. Daraus folgt dass eine Linie die mit einer gegebnen Linie parallel läuft, der *geometrische Ort* aller Punkte ist, welche von der gegebnen graden Linie gleich weit abstehn, oder der geometrische Ort für die Aufgabe einen Punkt anzugeben, der von einer gegebnen graden Linie um eine gegebne Linie absteht. Alle Punkte in der Parallellinie und keiner ausser ihr, thun dieser Aufgabe genüge*. * E. 21.

[LEHRSATZ 28.]

Fig. 37.

Zwey grade Linien in einer Ebne, welche nicht parallel sind, stehn überall ungleich weit von einander ab, und zwar wird ihr Abstand nach der Seite zu, wo sie einander durchschneiden, immer kleiner, nach der entgegengesetzten immer grösser.

Es mögen AC, BH, zwey grade Linien seyn, welche nach der Seite von C und H hin zusammentreffen Von zwey Punkten B und H der einen, fälle man auf die andere die Perpendikel BA und HC, so muss HC < BA seyn.

Denn man errichte auf der Mitte von AC eine dritte senkrechte Linie EG; so muſs, weil beyde Linien sich nach C und H zu, durchschneiden sollen,
* 23. f. dieser Voraussetzung gemäſs EGH + GEC < 2 R*, folglich EGH < R *alſo ſpitz ſeyn.* Nun aber läſst das Viereck GECH sich wie im vorigen Beweise so auf das Viereck GEAB legen, daſs GE, EC, CH, auf GE, EA, AB, fallen. Gesetzt nun erstens CH sey gleich AB, so würden beyde Vierecke völlig einander decken, also EGH ein rechter Winkel seyn, welches der Voraussetzung widerspricht. Gesetzt zweytens CH sey gröſser als AB, so würde, indem CH auf AB liegt, der Punkt H in der Verlängerung von AB, über B hinaus fallen; folglich müſsten die Schenkel EG, GH
E.12. β den Winkel EGB einschlieſsen, also EGH > EGB, d. i. der spitze Winkel gröſser als der stumpfe seyn, welches ungereimt wäre. Also muſs nothwendig HC kleiner als BA seyn, also der Abstand zweyer solcher Linien nach der Seite des Durchschnittspunktes hin immer kleiner, nach der entgegengesetzten stets gröſser werden.

Die beyden Linien also *nähern ſich einander* immer mehr auf der Seite des Perpendikels, auf welcher der Durchschnittspunkt liegt, oder *convergiren* nach dem Durchschnittspunkte zu, *entfernen ſich* dagegen *von einander immer weiter* oder *divergiren* auf der entgegengesetzten Seite des Perpendikels. Und zwar nimmt hier ihr Abstand ohne Gränzen zu, und kann deshalb gröſser als jede angebliche Gröſse werden.

d. U.

LEHRSATZ 29.

Zwey Winkel BAC, DEF sind gleich, wenn ihre Schenkel nach einerley Seite zu untereinander parallel laufen, d. h. so, dass je zwey der parallelen auf einerley Seite der andern Schenkel liegen. Fig. 38.

Man verlängere, falls es nöthig ist, den Schenkel DE des einen Winkels, bis er einen Schenkel des andern Winkels in einem Punkte G durchschneidet. Dann werden die beyden Parallellinien EF, AC von einer graden Linie DG durchschnitten, folglich sind, als äussere Winkel, DEF, DGC gleich *. Ueberdem * 25. A. sind auch DGC, BAC, als äussere Winkel an den Parallellinien GD, AB gleich; folglich auch die Winkel DEF, BAC.

Anmerkung. Daraus, dass die Schenkel zweyer Winkel untereinander parallel sind, lässt sich auf die Gleichheit beyder Winkel nur unter der Bedingung schliessen, dass die parallelen Schenkel EF, AC nach einerley Seite der andern parallelen Schenkels ED, AB, und diese nach einerley Seite von jenen zu liegen [qu'ils soyent dirigés dans le même sens; ein Wort dem im Deutschen keins entspricht.] Auch sind die Winkel gleich, wenn die parallelen Schenkel *beyde* auf entgegengesetzten Seiten der andern liegen. Zwey Winkel wie DE'H, BAC, in welchen zwey der parallelen Schenkel E'D, AB diese Lage haben, die beyden andern E'H, AC aber auf entgegengesetzten Seiten der andern Schenkel liegen, sind nicht gleich, sondern ergänzen einander zu zwey rechten Winkeln.

LEHRSATZ 30.

Wenn man die Seite CA eines Dreyecks verlängert, so ist der von der Verlängerung AD und der Fig. 39.

andern nicht verlängerten Seite AB eingeſchloſsne äuſsere Winkel am Dreyeck BAD der Summe der beyden innern ihm entgegenſtehenden Winkel B und C gleich.

Ziehe durch den Winkelpunkt A parallel mit der
*Aufg.6 gegenüberſtehenden Seite BC die Linie AE *. An der die Parallelen durchſchneidenden graden Linie AB ſind die Wechſelswinkel B, BAE, an der andern ſie durchſchneidenden graden Linie CD die äuſseren Winkel C, EAD gleich. Folglich iſt B + C gleich BAE + EAD d. h. gleich dem äuſsern Winkel BAD.

[*Folgerung.* Der äuſsere Winkel iſt alſo gröſser als jeder der beyden Innern die ihm gegenüberſtehn.]

LEHRSATZ 31.

Die drey Winkel eines Dreyecks ſind zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.

Denn da nach dem vorigen Lehrſatz B + C = BAD iſt, ſo wird wenn man beyderſeits den dritten Winkel A hinzufügt, A + B + C = A + BAD = zwey rech-
* 2. ten Winkeln. *

Folgerung 1. *Wenn zwey Winkel eines Dreyecks, oder ihre Summe gegeben wird, ſo iſt auch der dritte Winkel* (als der Unterſchied zwiſchen zwey rechten Winkeln und dieſer Summe) *bekannt.* Ihn zu finden lehrt Aufgabe 7.

Sind folglich *in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich, ſo ſind es auch die dritten Winkel*, und beyde Dreyecke gleichwinklig.

Folgerung 2. *Kein Dreyeck kann mehr als Einen rechten oder Einen ſtumpfen Winkel haben.* Denn hätte es deren zwey, so müsten die drey Winkel zusammengenommen gröser als zwey rechte seyn.

In jedem rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreyeck sind zwey Winkel spitz. Im *rechtwinkligen* beträgt die Summe der spitzen Winkel einen rechten Winkel, und im *rechtwinkligen gleichschenkligen Dreyeck* ist jeder der spitzen Winkel einem halben rechten gleich *. Die Winkel an der Grundlinie eines *gleichschenkligen Dreyecks* sind allemal spitz. * 12.

Folgerung 3. *Im gleichseitigen Dreyeck beträgt jeder Winkel zwey Drittel eines rechten* *. * 12. f.

[*Folgerung* 4. Nimmt man folglich auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels GCB ein beliebiges Stück CG und beschreibt darüber ein gleichseitiges Dreyeck *, so wird dadurch der rechte Winkel in zwey Stücke geschnitten, welche $\frac{2}{3}$ R und $\frac{1}{3}$ R betragen und halbirt man den Winkel im gleichseitigen Dreyeck GCD *, so wird *der rechte Winkel in drey gleiche Theile getheilt.*] Fig. 17. *II. E. 11. Z. *Aufg. 5

LEHRSATZ 32.

Die Summe aller innern Winkel eines gradelinigten Vielecks beträgt so vielmal zwey rechte Winkel, als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat.

Es sey Fig. 5. ein Vieleck von beliebig viel Seiten. Zieht man die Diagonale AC so, dass sie ein Dreyeck ABC abschneidet, so bleibt ein Vieleck ACDEFG übrig, welches eine Seite weniger als das erste Vieleck hat, und dessen Winkel zusammengenommen, vermehrt um die Summe der Winkel des Dreyecks ABC,

d. h. um zwey rechte Winkel der Summe der Winkel des ersten Vielecks gleich sind. — Folglich ist die Summe aller Winkel eines *Vierecks* der Summe der Winkel eines Dreyecks und zwey rechten Winkeln, d. h. vier rechten Winkeln gleich; die Summe aller Winkel eines *Fünfecks*, der eines Vierecks und zwey rechten Winkeln, d. h. sechs rechten Winkeln, und so ferner, indem die Summe aller Winkel für jede hinzukommende Seite um zwey rechte Winkel gröfser wird. Da nun unser Satz vom Dreyeck, Viereck, Fünfeck gilt, so gilt er auch vom Sechseck u. s. w. Folglich beträgt *in jedem Viereck* die Summe aller Winkel so vielmal zwey rechte Winkel, als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat. [Gesetzt also es habe n Seiten, so ist die Summe aller Winkel dieses n Ecks gleich $(n-2) \times 2R$.]

Folgerung 1. In einem *gleichwinkligen Vieleck* erhält man die Gröfse jedes Winkels, wenn man die Summe aller, durch die Zahl der Winkel dividirt. Daher ist *jeder Winkel im gleichwinkligen Viereck* ein rechter, im *gleichwinkligen Fünfeck* $\frac{6}{5}$ R; im *gleichwinkligen Sechseck* $\frac{8}{6}$ R oder $\frac{4}{3}$ R u. s. f; [überhaupt im gleichwinkligen n Eck, $\frac{(n-2) \times 2R}{n}$.]

Will man also lauter gleichwinklige Figuren von einer gleichen Anzahl von Seiten so um einen Punkt in einer Ebne zusammen legen, dafs sie ringsumher aneinander schliefsen, und keine Lücke lassen, so läfst sich das nur mit 6 gleichwinkligen Dreyecken, oder mit 4 gleichwinkligen Vierecken, oder mit 3 Sechsecken, und mit keiner andern gleichwinkligen Figur bewerkstelligen.]

[*Folgerung* 2. Verlängert man eine Seite des Vielecks, so entsteht ein äusserer Winkel, der als Nebenwinkel des innern, diesen zu zwey rechten Winkeln ergänzt. Verlängert man daher an jedem der Winkelpunkte eines n Ecks eine der Seiten, so sind *die n äussern Winkel des Vielecks*, die dadurch entstehn, *zusammengenommen gleich* dem, was der Summe aller innern Winkel des Vielecks an n rechten Winkeln fehlt, mithin allemal *gleich zwey rechten Winkeln.*

Doch gilt dieses nicht bey *Vielecken mit erhabnen Winkeln**, wiewohl für diese die Aussage des Lehrsatzes wahr bleibt. Bey ihnen nimmt für jeden erhabnen Winkel die Summe der äussern Winkel mit zwey rechten Winkeln zu.] * E. 16.

[Anmerkung. Der hier geführte Beweis des Lehrsatzes ist unserm Verfasser eigen. Zieht man aus einem willkührlich *im* Vieleck angenommenen Punkte C nach den Eckpunkten grade Linien, so entstehn so viel Dreyecke als die Figur Seiten hat, im n Eck also n Dreyecke, deren Winkel zusammengenommen n × 2 R betragen. Die Summe dieser Winkel übertrifft die Summe aller Winkel des n Ecks um die Winkel welche am Punkte C liegen, d. h. um vier Rechte *, oder 2 × 2 R, daher alle Winkel des n Ecks zusammengenommen (n — 2) × 2 R betragen. Das ist der gewöhnliche Weg diesen Satz zu beweisen.] Fig. 7. *5. Z 2.

[LEHRSATZ 33.]

Wenn man auf den Schenkeln eines Winkels A zwey Perpendikel BD, CE, errichtet, so durchschneiden sich diese unter einen Winkel G, welcher dem Winkel A gleich ist. Fig. 40.

Daſs beyde Perpendikel ſich in irgend einem Punkte G durchſchneiden müſſen, folgt daraus, weil ſie ſonſt parallel ſeyn, alſo beyde ſowohl auf dem einen als dem andern Schenkel des Winkels A ſenkrecht ſtehn
*25. f. 1. müſten *, da denn dieſe Schenkel ſelbſt, gegen die Vorausſetzung, parallel wären. Hierbey giebt es nun *zwey Fälle*, je nachdem der Durchſchnittspunkt G auſserhalb der beyden Schenkel des Winkels A, oder zwiſchen ihnen fällt.

Liegt G *auſserhalb* der beyden Schenkel, ſo entſtehn zwey Dreyecke GFB, ACF, worin B und C als rechte Winkel, und überdem die Scheitelwinkel bey F gleich ſind. Folglich ſind auch ihre dritten Winkel A und G gleich, welches zu erweiſen war.

Liegt der Durchſchnittspunkt g der Perpendikel Bg, cg *zwiſchen* den Schenkeln des Winkels A, ſo entſteht ein Viereck ABgc, worin die Winkel bey B und c rechte ſind. Da nun die Summe aller vier Winkel des Vierecks nach dem vorigen Lehrſatz vier rechte beträgt, ſo iſt $A + Bgc = 2$ R. Es ſind aber auch als Nebenwinkel $Bge + Bgc = 2$ R, folglich iſt $A = Bge$, welches zu erweiſen war.

Anmerkung. Im *erſten Fall* iſt alſo *der Winkel den die beyden Perpendikel BG, CG ſelbſt einſchlieſsen*, dem Winkel A gleich. Im *zweyten* iſt es hingegen *der Nebenwinkel des Winkels Bgc*, den die beyden Perpendikel ſelbſt einſchlieſsen, oder der Winkel den eins der Perpendikel und die Verlängerung des andern umſpannt. Auf dieſe Beſtimmung muſs man bey der Anwendung dieſes Satzes, den ich in keinem Syſtem der Geometrie finde, ſorgfältig ſehn.

d. U.

LEHRSATZ 34.

Jedes Parallelogramm wird 1) durch eine Diagonale in zwey sich deckende Dreyecke getheilt; und 2) sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel Fig. 41 *desselben einander gleich.*

Es sey ABCD ein Parallelogramm *, und AC eine *25.A.5. Diagonale desselben. Diese bildet mit den beyden Paaren gegenüberstehender paralleler Seiten gleiche Wechselswinkel DAC = BCA und DCA = BAC *, folglich * 25. zwey Dreyecke ADC, ABC, die, da sie über die gemeinschaftliche Linie AC beschrieben sind, einander decken *. * 7.

Deshalb sind zweytens die sich deckenden Seiten AD, BC, und AB, DC welche im Parallelogramm einander gegenüberstehn, gleich; ferner die gegenüberstehenden Winkel B = D und endlich auch, als Summen der gleichen Winkel DAC + BAC und BCA + DCA, die gegenüberstehenden Winkel A = C.

[*Folgerung* 1. Folglich *sind* überhaupt *Parallelen zwischen Parallelen* (nicht blos rechtwinklige *) *einander gleich.* * 27. Wenn z. B AB, CD, und zugleich EF, Fig. 34. HI, parallel sind, so ist GH = OI und GO = HI.

Daraus folgt dass der *geometrische Ort* des Endpunkts G einer gegebnen graden Linie OG, welche auf einer zweyten CD unter einer gegebnen Lage, z. B. parallel mit HI aufsteht, eine Parallellinie AB mit der erstern ist. (Apoll. eb. Oert. I. 20) Steht sie auf einem Kreise unter einer gegebnen Lage auf, so ist ihr

Ort ein Kreis, wie aus dem folgenden Buche erhellen wird

Fig. 37. *Folgerung. 2. Werden umgekehrt Parallelen von zwey andern Linien so durchschnitten daſs der Abschnitt auf der einen kleiner als auf der andern iſt, ſo convergiren die durchſchneidenden Linien* nach der Seite des kleinern Abſchnitts zu einander, und treffen hier, gehörig verlängert, zuſammen.]

Fig. 41. [Zuſatz I. *Ein Parallelogramm wird alſo durch drey Stücke völlig beſtimmt*, nemlich durch *zwey* aneinander liegenden *Seiten*, AB, AD, denen die gegenüberſtehenden gleich ſeyn müſſen, und durch *einen Winkel* z. B. den von AB, AD, eingeſchloſsnen Winkel A. Denn der Winkel C, der dieſem gegenüberſteht, iſt ihm gleich, und die beyden Winkel, welche mit ihm an derſelben Seite anliegen, ergänzen ihn wegen des Parallelismus der gegenüberſtehenden Seiten zu zwey

* 25. rechten Winkeln *.

Hat folglich *ein Parallelogramm einen rechten Winkel, ſo ſind ſie alle recht und die Figur iſt ein Rechteck.*

Das Parallelogramm aus drey gegebnen Stücken wirklich zu beſchreiben, lehrt mit Hülfe des folgenden Satzes Aufg. 11, wo überdem die Möglichkeit der in Erkl. 19 erwähnten Arten der Parallelogramme dargethan wird.

Zuſatz II. Unter allen Parallelogrammen iſt das *Rechteck* das einzige das völlig beſtimmt iſt, wenn zwey Seiten gegeben werden; bey den übrigen kömmt es noch auf den Winkel an, unter welchem dieſe Seiten gegen einander geneigt ſind. Hierauf gründet ſich der Sprachgebrauch ABCD ein *Rechteck aus den beyden Linien AB, BC*, oder *ein Rechteck unter dieſen Linien* zu nennen, und es lediglich durch dieſe beyden Linien zu bezeichnen, z. B. durch ABBC oder ABC. So bedeutet alſo das Rechteck ABE ein Rechteck, welches aus den beyden Linien AB und BE beſchrieben iſt. Die Alten dehnten dieſen Sprachgebrauch ſelbſt ſo weit aus, daſs ſie ein ſolches Rechteck durch den Ausdruck: *das was zwiſchen den beyden Linien AB und BE eingeſchloſſen iſt*, bezeichneten. Fig. 43

Ein *Quadrat* wird durch eine Seite völlig beſtimmt, daher man die Quadrate durch ihre Seiten characteriſirt. So iſt Fig. 44. ein *Quadrat aus AB* beſchrieben, oder das *Quadrat der Linie AB*.

Zuſatz III. *Zwey Rechtecke aus gleichen Seiten decken ſich*, denn ſie ſind, nach dem was hier geſagt iſt, innerlich einerley, nur in ihrem Ort verſchieden, und müſſen deshalb congruiren *. *Sie haben* alſo auch ſtets einen *gleichen Flächenraum*. *Gr. 9.

Grade ſo *decken ſich zwey Quadrate welche über gleichen Seiten beſchrieben ſind.*

Die Sätze in dieſen Zuſätzen werden uns im dritten Buche von groſsem Nutzen ſeyn. d. U.]

LEHRSATZ 35.

Umgekehrt iſt jedes Viereck, worin die gegenüberſtehenden Seiten [oder die gegenüberſtehenden Winkel] einander gleich ſind, ein Parallelogramm. Fig. 41.

1. Ist im Viereck ABCD, AB = CD, und AD = BC; so theilt die Diagonale AC das Viereck in zwey Dreyecke, welche gleiche Seiten haben, folglich einander decken *, worin also die Winkel ACD, CAB und ACB, CAD, die gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich sind. Sind aber diese Winkel gleich, so müssen die einander gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel seyn. Folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

* 11.

[2. Sind im Viereck ABCD die Winkel A = C, und B = D, so sind auch A + B = C + D. Alle Winkel des Vierecks sind aber zusammengenommen vier rechten gleich *. Mithin müssen A + B, folglich auch A + D, zwey rechten Winkeln gleich seyn, und daher die Seiten AD, BC, und AB, DC, parallel laufen *. Also ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.]

* 32. * 25.

[*Folgerung.* Jedes Viereck mit vier rechten Winkeln ist also ein Parallelogramm, folglich nothwendig ein Rechteck *.

*.E. 19.

Auch ist jeder Rhombus und jedes Quadrat nothwendig ein Parallelogramm.]

[Anmerkung. Sind in einem Viereck zwey der gegenüberstehenden Winkel gleich, die beyden andern ungleich, so können nicht beyde Paar der gegenüberstehenden Seiten parallel laufen; das Viereck ist also ein Trapezium. Und doch wird es durch eine der Diagonalen halbirt. Dieses Merkmal reicht also bey einem Viereck nicht hin es zu einem Parallelogramm zu machen. Dazu wird das Merkmal erfordert, welches Lehrsatz 37 aussagt.]

LEHRSATZ 36.

Wenn zwey Seiten AB, CD eines Vierecks, welche einander gegenüberstehn, gleich und parallel sind; so sind auch die beyden andern Seiten AD, BC gleich und parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm.

Ziehe die Diagonale AC. Diese bildet mit den Parallelen AB, CD gleiche Wechselswinkel BAC, DCA*. * 25.
Da überdem der Voraussetzung nach die Seiten AB, DC gleich sind und den Dreyecken ABC, DAC die Diagonale AC gemeinschaftlich ist, so decken sich diese beyden Dreyecke.* Also sind auch die Seiten * 7.
AD, BC gleich, folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.*
* 34.

[Zusatz. *Dagegen ist ein Viereck kein Parallelogramm, wenn zwar zwey gegenüberstehende Seiten gleich, aber nicht zugleich parallel *, oder wenn sie parallel aber nicht gleich sind.* Denn gesetzt ein solches Viereck wäre ein Parallelogramm, so wären beyde Paar der gegenüberstehenden Seiten gleich und parallel *, gegen die Voraussetzung.] * 34.

LEHRSATZ 37.

Die beyden Diagonalen AC, BD eines Parallelogramms theilen einander wechselseitig in zwey gleiche Theile. Fig. 42

[*Umgekehrt ist jedes Viereck, dessen Diagonalen sich wechselseitig in gleiche Theile zerschneiden, ein Parallelogramm.*]

In den beyden Dreyecken ADO, CBO ſind die Seiten AD, BC, nicht nur gleich, ſondern auch parallel, folglich ebenfalls die Wechſelswinkel A, C und D, B gleich. Alſo decken ſich beyde Dreyecke, und die den gleichen Winkeln A, C und D, B gegenüberſtehenden Seiten ſind gleich BO = OD, AO
* 7. = OC *. Es halbiren ſich alſo beyde Diagonalen wechſelſeitig.

[Halbiren ſich umgekehrt die beyden Diagonalen eines Vierecks im Punkte O, ſo decken ſich die Dreyecke welche an ihrem Durchſchnittspunkt einander gegen-
* 6. über liegen *, alſo auch die gegenüberſtehenden Seiten, daher das Viereck ein Parallelogramm iſt.

Folgerung. Ein Punkt O welcher in der Mitte der einen Diagonale eines Parallelogramms liegt, muſs folglich auch in der andern Diagonale, und zwar in deren Mitte liegen. Man kann ihn den *Mittelpunkt* des Parallelogramms nennen. Jede grade Linien, welche durch ihn gezogen wird, theilt das Parallelogramm in zwey
* 6. ſich deckende Figuren, und zwar, wenn es keine Diagonale iſt, in zwey ſich deckende Vierecke, wie ſich ohne Schwierigkeit, aus den ſich deckenden Dreyecken, die dann gebildet werden, zeigt.]

[Zuſatz. Da im Parallelogramm je zwey Winkel von Seiten, die untereinander gleich ſind, eingeſchloſſen werden, ſo muſs im ſchiefwinkligen Parallelogramm die Diagonale BD, welche den kleinern Winkeln gegenüberſteht, kleiner als die Diagonale

AC seyn, welche den grössern Winkeln gegenübersteht *. Im *Rechteck* sind dagegen die beyden Diagonalen gleich *, folglich auch die Theile die sie auf einander abschneiden, daher das gleichseitige Rechteck, d. h. das *Quadrat* durch seine beyden Diagonalen in vier untereinander gleichseitige, folglich sich deckende, gleichschenklige Dreyecke getheilt wird.]

* 10.
* 6. f. 2.
Fig. 43.
Fig. 44.