Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Anhang. Aufgaben welche zu den beyden ersten Büchern gehören.

ANHANG.

Aufgaben welche zu den beyden ersten Büchern gehören.

[Bey jeder der folgenden Aufgaben wird zuerst die Construction angegeben, vermöge der das geforderte geleistet, und also die Aufgabe aufgelöst wird; und darauf bewiesen dass die Construction möglich ist, und dass man durch sie grade das findet, was man sucht. Beydes geschieht mehrentheils in besondern Absätzen, denen die Wörter *Auflösung*; *Beweis* vorzusetzen überflüssig gewesen wäre. Da diese Aufgaben in das System der Geometrie gehören, aus dem sie blos herausgehoben sind, so musten sie synthetisch vorgetragen werden, und es würde Zweckwidrig gewesen seyn, der Auflösung eine Analysis vorauszuschicken, obgleich dazu meist ein paar Worte hingereicht hätten. Le Gendre übergeht die einfachsten, unmittelbar in den Principien gegrüdeten Constructionen theils ganz, (wie z. B. das Bilden und Uebertragen gleicher grader Linien) *, theils trägt er sie zu spath vor (z. B. die Construction der Dreyecke aus drey gegebnen Linien); und macht überdem den Beweis der ersten Aufgaben von Sätzen abhängig, die es gar nicht nöthig gewesen ware, dabey mit ins Spiel zu bringen, und die uns in logische Kreise verwickeln würden, wenn wir nicht dieser Unbequemlichkeit durch die Anmerkung zur ersten Aufgabe abgeholfen hätten. Aus beydem entstehn wahre Mängel in seinem System, die wir hier so viel als möglich zu verwischen gesucht haben.

d. U.

* Fo. 3. α. β.

AUFGABE I.

Fig. 86. *Eine gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.*

Um jeden der beyden Endpunkte A und B der gegebenen Linie, beschreibe man mit *gleichen* Halbmessern, von willkührlicher Länge (nur müssen sie grösser als die Hälfte von AB seyn) zwey Kreisbogen,
*E.11 β. die sich in einem Punkte D schneiden *, und eben so, entweder mit demselben oder mit einem andern Halbmesser, um dieselben Endpunkte, zwey Kreisbogen, die sich in einem andern Punkte E schneiden. Zieht man durch beyde Durcschnittspunkte D, E eine grade
*Fo. 1. Linie *, so behaupte ich, wird diese die gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile AC, CB zerschneiden.

Denn die Punkte D und E liegen jeder in zwey Kreislinien, welche um die Mittelpunkte A, B beschrieben sind, stehn also beyde gleich weit von den
*E. 2. α. Endpunkten der gegebnen Linie AB ab *. Mithin müssen sie in einer graden Linie liegen, welche auf
*I, 17 f. 1 AB in ihrer Mitte senkrecht steht *. Da nun durch zwey Punkte nur eine einzige grade Linie möglich ist, so muss DE selbst dieses Perpendikel seyn, also die gegebne Linie AB durch DE im Punkte C halbirt werden.

Anmerkung. Die Construction, mittelst welcher Le Gendre diese Aufgabe auflöst, dient eigentlich unmittelbar und zunächst *über der gegebnen graden Linie AB zwey verschiedne gleichschenklige Dreyecke ABD, ABE zu bilden*, wie wir das schon
*E.11.Z. oben gelehrt haben *. Man könnte die Auflösung daher auch

so ausdrücken. Beschreibe über AB als Grundlinie zwey gleichschenklige Dreyecke, und verbinde ihre Spitzen durch die grade Linie DE, so muss diese die gegebne AB halbiren. Denn es entstehn alsdann zwey Dreyecke ADE, BDE, die sich decken, weil sie untereinander gleichseitig sind *. Mithin sind die Winkel bey * I. 11.
D gleich, daher auch die Dreyecke ACD, DCB sich decken, und CD senkrecht auf AB, in der Mitte zwischen den Endpunkten A und B aufsteht. Diese Linie halbirt also den Winkel D, und die Linie AB, und ist zugleich ein Perpendikel auf die Linie AB, welches durch die bestimmten Punkte C in der Linie, D ausserhalb der Linie AB geht. Und zwar ist das der Fall, die Dreyecke mögen beyde auf einer oder auf entgegengesetzter Seite der Linie AB liegen. Dieses Perpendikel thut also den Aufgaben 1, 2, 3 und 5 (β) zugleich genüge, daher diese Aufgaben in das System nach I. 12 gehören.

d. U.

AUFGABE 2.

Auf eine grade Linie, durch einen in ihr gegebnen Punkt A, eine grade Linie senkrecht zu ziehn;

oder an einem gegebnen Punkt A einer graden Fig. 87.
Linie BC einen rechten Winkel zu bilden.

Man nehme auf der gegebnen Linie zwey Punkte B und C, welche vom gegebnen Punkte A gleich weit entfernt sind *, und beschreibe um diese Punkte mit *Fo.3.α
gleichen Halbmessern, grösser als AB, zwey Kreisbogen, die sich in irgend einem Punkte D schneiden *; *E.11.β.
so ist, wenn man AD zieht, dieses die gesuchte senkrechte Linie, und DAB ein rechter Winkel.

Denn da der Punkt D gleich weit von B und von C absteht, so liegt er in einer graden Linie, welche

auf BC in der Mitte zwischen B und C, folglich im
*I.17 f.1 Punkte A senkrecht aufstehet *. Die Linie AD ist daher das gesuchte Perpendikel, und DAB der verlangte rechte Winkel.

[*Andere Auflösungen.* Man nehme ausserhalb der gegebnen Linie einen beliebigen Punkt C, und beschreibe mit CA als Halbmesser um C einen Kreis: so durchschneidet dieser die gegebne Linie in A und
*E.11.α. einem zweyten Punkte B *. Zieht man von B aus den Durchmesser BE, und dann EA, so ist EAB ein Win-
*23.Z.2. kel im Halbkreise, also ein rechter *, also EA das gesuchte Perpendikel.

Oder man beschreibe über einen beliebigen Theil AB, der gegebnen Linie, ein gleichschenkliges Dreyeck ACB, und nehme auf der Verlängerung von BC, CE = CB = CA. Zieht man EA, so ist EAB ein
*23.Z.2. f. 1. rechter Winkel * und EA das gesuchte Perpendikel.

Diese letztern Auflösungen sind besonders bequem, wenn das Perpendikel auf dem Endpunkt einer Linie, die sich nicht verlängern lässt, errichtet werden soll.

d. U.

AUFGABE 3.

Fig. 88. *Von einem ausserhalb einer graden Linie gegebnen Punkte A, ein Perpendikel auf diese Linie zu fällen.*

Aus A als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreisbogen, der die gegebne Linie in zwey Punkten B und D durchschneide, [welches allemal geschehen muss, wenn man auf der andern Seite der graden Li-

nie BD einen Punkt E nimmt *, und den Kreisbogen * Gr. 8.
mit AE als Halbmesser beschreibt *.] Sucht man dann * E. 11. α.
den Punkt C, der zwischen B und D in der Mitte liegt *, * A. 1.
und zieht AC, so ist dieses das gesuchte Perpendikel.

Denn da sowohl A als auch C gleich weit von den Punkten B, D entfernt sind, so steht AC senkrecht auf BD, und zwar in der Mitte zwischen B und D *. * I. 17. f. 1

[*Eine andere Auflösung.* Um irgend einen Punkt B in der gegebnen Linie, beschreibe man mit dem Halbmesser BA einen Kreis, der jene Linie in F durchschneide, und um F mit FA als Halbmesser gleichfalls einen Kreis. Die grade Linie AE durch die Durchschnittspunkte beyder Kreise gezogen, ist das gesuchte Perpendikel *. * 20.

Zusatz. Auf eine ähnliche Art läßt sich *ein Punkt* Fig. 89.
finden, der in der Verlängerung einer graden Linie AB liegt, die zu kurz ist, als daß man sie mittelst eines Lineals mit Sicherheit verlängern könnte. Man beschreibe um A und B mit gleichen Halbmessern Kreisbogen, die sich in C, D schneiden, und aus diesen Punkten mit einem hinlänglich großen Halbmesser Kreisbogen, die sich in einem Punkte E schneiden, so ist E der gesuchte Punkt. Denn da sich alsdann sowohl die Dreyecke ABC, ABD, als auch ∠BEC, BED decken, so sind die Winkel CBA, CBE beyde Hälften des Winkels CBD, mithin gleich. Es fallen daher BA, BE in eine grade Linie zusammen, und E liegt in der Verlängerung von BA.

d. U.

AUFGABE 4.

Fig. 90. 1. *An einem Punkte A der graden Linie AB einen Winkel zu bilden, welcher einem gegebnen Winkel K gleich ist.*

[2. *Durch einen Punkt R aufserhalb AB, nach dieser Linie eine grade Linie so zu ziehn, dass sie die AB unter einem gegebnen Winkel K durchschneide.*]

1. Beschreibe um den Scheitelpunkt K mit einem willkührlichen Halbmesser einen Kreisbogen, der die beyden Schenkel des Winkels in I und L durchschneide. Mit demselben Halbmesser beschreibe um A als Mittelpunkt einen Kreisbogen BO; und dann auch mit der Sehne IL, als Halbmesser, um B einen Kreisbogen, der jenen in irgend einem Punkte D durchschneiden

*E.11.β. muss *. Zieht man AD, so ist DAB der gesuchte Winkel, dem gegebnen Winkel K gleich.

Denn da die beyden Kreisbogen IL, BD zu gleichen Halbmessern und gleichen Sehnen gehören, so

* 7. sind sie gleich *, also auch die Winkel BAD, IKL *. [Dieses erhellt auch unabhängig von dem angeführten Satze des zweyten Buchs. Durch die Construction entstehn nemlich zwey gleichschenklige Dreyecke ABD, KIL, welche untereinander gleichseitig sind,

* I. 11. folglich sich decken *, daher der Winkel A dem gegebnen Winkel K gleich wird.]

[*Eine andere Auflösung.* Nimm auf dem einen Schenkel des gegebnen Winkels K einen Punkt M, und mache AP gleich KM, errichte in P und M Perpendikel

auf diese Linien*, nimm MN = PQ und ziehe AQ, *Aufg.2
so ist PAQ der gesuchte Winkel *.] *I.6. f.1.

[2. Um durch einen gegebnen Punkt R, ausserhalb der Linie AB, eine grade Linie nach AB unter einem gegebnen Winkel K zu ziehn, bilde man an einem beliebigen Punkt A dieser Linie, einen Winkel BAD = K und ziehe mit AD, durch den gegebnen Punkt R, parallel RS, so ist der Winkel RSA = DAB
= K * und RS die gesuchte Linie.] *I.25.A.

AUFGABE 5.

Einen gegebnen Kreisbogen oder einen gegebnen Fig. 91.
Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

1. Um den gegebnen *Kreisbogen* AB in zwey gleiche Theile zu theilen, beschreibe man mit gleichen Halbmessern um A und um B Kreisbogen, welche sich
in einem Punkte D durchschneiden *. Zieht man durch *E.11.β.
diesen Punkt und den Mittelpunkt C des Kreises, wozu der gegebne Bogen gehört, die grade Linie CD, so zerschneidet diese den Bogen in zwey gleiche Theile.

Denn da die Punkte C und D beyde gleich weit von den Endpunkten der Sehne AB entfernt sind, so steht die grade Linie CD auf der Sehne im ihrer Mitte
senkrecht *, und theilt also den Bogen AB in zwey *I.17. f.1
gleiche Theile *. * 9.

2. Soll ein gegebner *Winkel* ACB in zwey gleiche Theile getheilt werden, so beschreibe man um seinen Scheitelpunkt einen Kreisbogen AB und halbire ihn auf die eben gezeigte Art, so wird CD auch jenen

* 9. Winkel halbiren *. [Eine andre Auflösung ist in der Anmerkung zur ersten Aufgabe enthalten.]

Zusatz I. Um einen Kreisbogen oder einen Winkel in vier, in acht, in sechzehn gleiche Theile u. s. f. zu theilen, braucht man mit diesem Halbiren nur fortzufahren. [Ueber die Theilung eines Winkels oder eines Bogens in irgend eine andere Anzahl von gleichen Theilen, z. B. in 3 oder 5 gleiche Theile, siehe Lehrsatz 30. Anmerkung.]

[Zusatz II. Da uns nichts hindert dieses Halbiren, wenigstens im Gedanken, so weit fortzusetzen als man will, so kann man durch dasselbe allemal auf einen Theil kommen, welcher in einer gegebnen Linie A nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als eine jede gegebne Linie B ist; und eben so auf einen Bogentheil, welcher in einem gegebnen Kreisbogen nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als ein jeder gegebner Bogen ist.

d. U.

AUFGABE 6.

Fig. 92. *Durch einen Punkt A, der ausserhalb einer graden Linie BC gegeben ist, mit dieser graden Linie eine Parallellinie zu ziehn.*

Man beschreibe um A mit einem hinlänglich grossen Halbmesser einen Kreisbogen ED, welcher die gegebne Linie in E durchschneide. Mit demselben Halbmesser beschreibe man um E als Mittelpunkt den Kreisbogen

bogen AF, nehme ED gleich AF, und ziehe AD, so ist dieses die gesuchte Parallellinie.

Denn wenn man die grade Linie AE zieht, so sieht man, dass vermöge der Construction in der vorigen Aufgabe die Wechselswinkel AEF, EAD gleich, folglich die Linien BC, AD parallel sind *. *I.25.A.

[*Zweyte Auflösung.* Man ziehe durch den gegebnen Punkt A und irgend einen Punkt E der gegebnen Linie eine grade Linie EA, und bilde am Punkte A dieser Linie eine Winkel HAE, welcher dem äussern Winkel bey E, gleich ist *, so sind GH, BC, wegen der Gleichheit der äussern Winkel parallel *. Um auf die leichteste mechanische Art diese Gleichheit äusserer Winkel zu bewerkstelligen, dient das *deutsche Parallellineal* mit seinem materiellen unveränderlichen Winkel, den man längs der Linie AE verschiebt. * A. 4. *I.25.A.

Dritte Auflösung. Nimm in BC einen beliebigen Punkt F, und von diesem aus ein Stück FC gleich FA, beschreibe um C und A mit dieser Linie als Halbmesser Kreisbogen, die sich in einem Punkt D durchschneiden, und ziehe AD, so ist dieses die gesuchte Parallellinie. Denn in den sich deckenden gleichschenkligen Dreyecken AFC, ADC sind alle Winkel an der Grundlinie, mithin die Wechselswinkel für FC, AD gleich.

Vierte Auflösung. Beschreibe um einen willkührlichen Mittelpunkt eine Kreislinie, die durch den gegebnen Punkt A gehe und die gegebne Linie in den T. III. Fig. 85.

Punkten G und H schneide; nimm den Bogen HF gleich GA und ziehe die Sehne AF, so ist AF mit der gegebnen Linie GH parallel *.]

* 13.

AUFGABE 7.

Fig. 93. *Aus zwey gegebnen Winkeln A und B eines Dreyecks, den dritten Winkel zu finden.*

Man ziehe eine grade Linie DF in unbestimmter Länge, und bilde an einem Punkte E dieser Linie einen Winkel DEG = A und FEH = B *, so ist GEH der gesuchte Winkel, weil er mit den beyden übrigen zusammengenommen zwey rechte Winkel bildet *. [So findet man also geometrisch, d. i. durch Construction, die Ergänzung zweyer Winkel zu zwey rechten, mithin zu zwey gegebnen Winkeln des Dreyecks den dritten.]

* A. 4.

* I. 31.

AUFGABE 8.

Fig. 94. *Wenn zwey Seiten A, B eines Dreyecks und der von ihnen eingeschloßne Winkel C gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

An irgend einem Punkte D einer unbestimmt gezognen graden Linie DE, bilde man einen Winkel EDH, der dem gegebnen Winkel C gleich ist *. Auf dessen Schenkel nimm DG = A, DH = B * und ziehe GH, so ist DGH das gesuchte Dreyeck *.

* A. 4.

* Fo. 3. α

* I. 6.

AUFGABE 9.

Fig. 95. *Wenn eine Seite B und zwey Winkeln C und C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

Liegen die gegebnen Winkel nicht beyde an der gegebnen Seite an, so suche man nach Aufgabe 7. den zweyten anliegenden Winkel. Dann nehme man auf einer unbestimmt gezognen graden Linie ein Stück DE der gegebnen Seite gleich, und bilde an den Punkten D, E zwey Winkel, den anliegenden Winkeln gleich *, so ist, wenn ihre Schenkel sich in einem Punkte H durchschneiden, DEH das gesuchte Dreyeck. * A. 4.

[Die Schenkel durchschneiden sich aber nur dann, wenn die Summe der beyden gegebnen Winkel weniger als zwey rechte Winkel beträgt *; daher dieses die *Bedingung* der Möglichkeit der Aufgabe ist. Wäre die Summe gröser als zwey rechte Winkel, so durchschneidet sich die entgegengesetzt liegende Verlängerung der beyden Schenkel *, und dann entstünde ein Dreyeck, worin die beyden Nebenwinkel der gegebnen Winkel, an der gegebnen Seite anliegen.] *I. 23. 24 * I. 24.

Anmerkung. Hier folgt bey Le Gendre die Aufgabe, *aus drey gegebnen graden Linien A, B, C ein Dreyeck zu beschreiben*, von welcher wir an einer schiklichern Stelle * schon umständlich gehandelt haben. *E. 11. Z

AUFGABE 10.

Wenn zwey Seiten A und B und der der Seite B gegenüberstehende Winkel C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben. Fig. 96.

Man nehme auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels C, oder eines Winkels D welcher ihm gleich ist, DE = A, und beschreibe mit B als Halb-

messer um den Punkt E einen Kreisbogen. Wenn die-
ser den andern Schenkel in einem Punkte F schneidet,
so ist DEF das gesuchte Dreyeck.

Dieses Schneiden kann nur dann erfolgen, wenn
die Linie B grösser als der senkrechte Abstand des
*I. 16. 1. Punkts E von dem andern Schenkel DF ist *, welches
mithin die allgemeine *Bedingung* der Möglichkeit für
diese Aufgabe abgiebt, die ohnedem unmöglich wird.
Geschihet indess auch dieser Bedingung genüge, so
muss, im Fall C, folglich auch D, ein *rechter* oder ein
*I. 16. 3. *stumpfer Winkel* ist, überdem B > A seyn*, wie es
* I. 14. auch die Natur des Dreyecks mit sich bringt*; sonst
findet auch unter der erstern Bedingung kein Schnei-
den des Schenkels DF statt.

Fig. 97. Ist hingegen C, folglich auch D ein *spitzer Win-
kel*, so mag die Seite B, welche [diesem Winkel gegen-
übersteht, grösser oder kleiner als A seyn, immer wird,
wenn der erstern Bedingung genüge geschieht, der
Schenkel DF vom Kreisbogen, der mit B als Halb-
messer um den Punkt E beschrieben wird, durchschnit-
*I. 16. 2. ten, nur dass, *wenn die gegenüberstehende Seite B kleiner als*
u. Z. 2. *die anliegende A oder ED ist*, der um E beschriebene Kreis-
Fig. 98. bogen diesen Schenkel in *zwey* Punkten F und G, die
*I. 6. 2. zu einerley Seite des Scheitels D liegen *, durchschnei-
det, in welchem Fall wir *zwey Dreyecke* DEF, DEG
bekommen, welche beyde gleichmäsig der Aufgabe
genüge thun.

[Wenn also ein Dreyeck durch zwey Seiten und
einen der gegenüberstehenden Winkel bestimmt wird,
so ist diese Bestimmung im letzten Fall *zweydeutig*

Diese Zweydeutigkeit aber wird gehoben, wenn man zugleich anzeigt, ob das spitzwinklige oder das stumpfwinklige Dreyeck gemeint ist *.] * I. 20.

AUFGABE II.

Wenn ein Winkel C und zwey ihn einschliessende Seiten A und B eines Parallelogramms gegeben sind, das Parallelogramm zu beschreiben. Fig. 99.

Man nehme eine grade Linie DE gleich A, bilde am Punkte D einen Winkel EDF gleich dem gegebenen Winkel C, nehme auf dessen zweytem Schenkel das Stück DF gleich B, und beschreibe um den Punkt E mit dem Halbmesser DF = B, und um den Punkt F mit dem Halbmesser DE = A zwey Kreisbogen, die sich in einem Punkte G durchschneiden werden, weil die Summe ihrer Halbmesser grösser, und der Unterschied ihrer Halbmesser kleiner als der Abstand ihrer Mittelpunkte EF ist *. Zieht man dann FG, EG, so ist DEGF das gesuchte Parallelogramm. * I. 8. u. II. E. 11.

Denn vermöge der Construction sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, daher die vierseitige Figur ein Parallelogramm ist *; und zugleich ist es aus den gegebenen Stücken beschrieben. * I. 34.

Zusatz. Ist der gegebene Winkel spitz oder stumpf, so wird die Figur, wenn die gegebnen Seiten gleich sind, ein *Rohmbus* *, wenn sie ungleich sind, ein *Rhomboides*. Ist dagegen der gegebene Winkel ein rechter, so wird die Figur ein *Rechteck*, das, im Fall auch * I. E. 19.

die Seiten gleich sind, ein *Quadrat* wird; woraus also die Construction und die Möglichkeit dieser Arten von Vierecken erhellt.

AUFGABE 12.

Taf. III. F. 100. *Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises, oder eines gegebenen Kreisbogens zu finden.*

Man nehme in der Kreislinie oder im Kreisbogen willkührlich drey Punkte A, B, C, verbinde sie durch die graden Linien AB, BC, welche folglich Sehnen des gegebenen Kreises oder Bogens seyn müssen, halbire diese Sehnen, und errichte auf ihrer Mitte die
*A. 1. 2. Perpendikel DE, FG *, welche sich in einem Punkte O schneiden müssen. Dieser Punkt O ist der gesuchte
* 10. Mittelpunkt *,

Zusatz I. Mittelst derselben Construction läst sich

1) *ein Kreis bilden, der durch drey gegebene Punkte A, B, C, oder durch zwey gegebene Punkte A, B geht,* [welches letztere eine unbestimmte Aufgabe ist, die unendlich viel Auflösungen zuläſst, indem jeder Punkt im Perpendikel DE der Mittelpunkt eines solchen Kreises, der durch die Punkte A und B geht, seyn
*I. 17. f. 3 kann *]

2) *Wenn ein Kreisbogen gegeben ist, der ganze Kreis, wozu er gehört, vollenden;* und

3) *ein Kreis einem gegebenen Dreyeck ABC umschreiben*, d. h. so bilden, daſs die Kreislinie durch die drey

Winkelpunkte des gegebenen Dreyecks geht *. [Iſt in * E. 9.
dieſer letztern Aufgabe das gegebne Dreyeck bey B
rechtwinklig, ſo iſt ABC ein Halbkreis *, und folglich *23.Z.2.
liegt dann der Mittelpunkt O des umſchriebenen Krei-
ſes *in der Hypotenuſe* AC. Iſt das Dreyeck bey B *ſtumpf-
winklig*, ſo ſteht es in einem Kreisabſchnitt, der klei-
ner als der Halbkreis iſt *, und ſo fällt alsdann der *23.Z.3.
Mittelpunkt O *auſserhalb des Dreyecks*. Hat endlich
das Dreyeck lauter ſpitze Winkel, ſo ſteht jeder die- F. 107.
ſer Winkel in einem Kreisabſchnitt, der gröſser als der
Halbkreis iſt *, und der folglich den Mittelpunkt um- *23.Z.3.
ſchlieſst. Der Mittelpunkt liegt dann alſo in dem
Theil, der allen drey Kreisabſchnitten gemein iſt,
d.i. *im Dreyeck* ABC.]

[Zuſatz II. Liegen die drey gegebnen Punkte F. 101.
A, B, C, durch die ein Kreis gehn ſoll, ſo, daſs die
Perpendikel DE, FG ſich in einer zu weiten Entfernung
ſchneiden, als daſs man den Halbmeſſer bequem faſſen
könnte, ſo kann man durch folgende *Methoden noch
mehrere Punkte in der Kreislinie, welche durch A, B,
und C geht, einzeln finden*. Verbinde die drey gegebe-
nen Punkte durch grade Linien, ziehe durch einen
derſelben C, unter beliebigen Winkeln mit CB, grade
Linien CD, CE etc., und unter denſelben Winkeln
mit AB, nach derſelben Seite zu, grade Linien durch
den Punkt A *, ſo liegen die Durchſchnittspunkte D, * A. 4.
E etc. in der Kreislinie durch A, B, C. Denn die
Winkel B, D, E ſind insgeſammt gleich, und ſie um-
ſpannen alle die Sehne AC, daher ihre Spitzen in dem
Kreisbogen durch A, B, C liegen *. — Oder man * 26.

ziehe durch C, unter Winkeln gleich BAC, dem kleinsten der beyden die an AB anliegen, mehrere grade Linien, CG, CH u. s., und schneide mit CB als Halbmesser, von A, G etc. aus, Punkte G, H etc. unter spitzen Winkeln ab, so liegen diese Punkte in der Kreislinie, die durch A, B, C geht. Denn da die Winkel BAC, ACG, GCH etc. in dem gesuchten Kreise gleiche Winkel am Umfange sind; so umfassen
* 7. sie gleiche Sehnen CB, AG, GH *, und da überdem die Sehnen CG, CH näher nach dem Mittelpunkte zu
* 8. liegen, müssen sie zunehmen *, folglich AGC, GHC
* I. 14. kleine stumpfe Winkel seyn *, daher G, H etc. nothwendig in der Kreislinie durch A, B, C liegen.]

[AUFGABE 13.]

Um einen gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene grade Linie oder einen gegebenen Kreis berührt.

F. 102. 1. Fälle vom Mittelpunkt C ein Perpendikel auf die gegebene Linie HI, so berührt der Kreis, welcher mit diesem Perpendikel beschrieben ist, die gegebe-
* 12. ne Linie *.

Taf. II. Fig. 49. 2. Ziehe durch beyde Mittelpunkte eine grade Linie AB, so durchschneidet diese den gegebenen Kreis in zwey Punkten I, H und Kreise mit AI oder AH
* 16. als Halbmesser beschrieben, berühren den erstern *.

F. 102. Zusatz I. *Ist blos der Mittelpunkt C des Kreises gegeben, der die Linie AB berührt, und man sucht dessen*

Halbmesser und den Berührungspunkt, so ziehe man nach einem beliebigen Punkt A in der gegebenen Linie die grade Linie CA, halbire sie in O, und beschreibe mit OA um O einen Bogen. Wo dieser die AB durchschneidet, da ist der gesuchte Berührungspunkt B, und zieht man CB, so ist dieses der gesuchte Halbmesser. Denn ABC ist als Winkel im Halbkreis ein rechter *, *23.Z.2.
mithin BA ein Perpendikel auf dem Halbmesser CB in dessen Endpunkte, also eine Tangente *. * 12.

Zusatz II. *Sucht man einen Kreis der die grade Linie AD im Punkte D berühret, und zugleich durch einen gegebenen Punkt E geht*, so ziehe man DE, halbire diese Linie im Punkte F, und errichte auf ihr in diesem Punkte, so auch auf AD im Punkte D, Perpendikel. Wo beyde Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises *. * 10.

Grade so findet man den Mittelpunkt eines Kreises, der durch einen gegebenen Punkt geht, und einen andern Kreis in einem gegebnen Punkte berührt.

Zusatz III. *Um einen Kreis zu finden der zwey gegebene Kreise berührt*, beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser um den Mittelpunkt A des einen Kreises einen Kreisbogen, und um den Mittelpunkt B des zweyten der gegebnen Kreise ebenfalls einen Bogen, mit einem Halbmesser, der vom erstern um den Unterschied der Halbmesser der beyden gegebnen Kreise verschieden ist. Wo beyde Bogen sich schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten berührenden Kreises. Denn die graden Linien welche von Taf. II. Fig. 48.

diesem Durchschnittspunkte, die eine durch A, die andre durch B bis an die Kreislinien gezogen werden, sind alsdann gleich lang, und ein Kreis mit diesen Linien als Halbmesser um den gefundnen Durchschnittspunkt beschrieben, berührt sowohl den einen als den andern Kreis, weil die Punkte, worin er mit ihnen zusammen trifft, in der graden Linie durch die Mittel-
*16.f.2. punkte liegen *.

Soll der Mittelpunkt des berührenden Kreises mit den Mittelpunkten A, B, der beyden andern in grader Linie liegen, so ziehe man durch die Mittelpunkte A,B der gegebnen Kreise eine grade Linie, welche die Kreise in den Punkten D, I, F, H schneide. In je zwey dieser Punkte aus verschiedenen Kreislinien kann die Berührung geschehn. Den Abstand dieser beyden Punkte halbire man, so erhält man den Mittelpunkt des dritten Kreises, der die gegebnen in diesen Punkten
* 16. berührt *.

Soll der dritte Kreis den Kreis um A in einem andern gegebnen Punkte berühren, so ziehe durch diesen Punkt einen Durchmesser, und beschreibe um B, mit einem Halbmesser der vom Halbmesser des Kreises um A, um den Unterschied der Halbmesser der beyden gegebnen Kreise verschieden ist, einen Kreisbogen; so ist der Durchschnitt dieses Bogens mit jenem Durchmesser der Mittelpunkt des gesuchten berührenden Kreises.

AUFGABE 14.

T. III. F. 102. *Durch einen gegebnen Punkt A eine Tangente an einen gegebnen Kreis zu ziehn.*

1. Liegt der gegebne Punkt A' *auf der Kreislinie*, so ziehe den Halbmesser CA', und errichte auf ihn in seinem Endpunkte die senkrechte Linie IH, so ist IH die gesuchte Tangente *. * 12.

2. Liegt der gegebne Punkt A *ausserhalb des Kreises*, so ziehe nach ihm aus dem Mittelpunkte eine grade Linie CA, theile diese in zwey gleiche Theile im Punkte O, und beschreibe um diesen mit dem Halbmesser OC einen Kreis, der, weil er durch den Mittelpunkt und einen Punkt ausserhalb des um C beschriebnen Kreises geht, diesen durchschneiden muss *, *.E.12.β
und zwar in zwey Punkten B, D, welche zu entgegengesetzten Seiten der Linie CA liegen, und von dem Durchschnittspunkte E derselben mit der Kreislinie, so auch vom Punkte A, gleichweit abstehn *. Zieht man * 19.
AB, AD, so ist jede beyder Linien die gesuchte Tangente. — Denn zieht man die Halbmesser CB, CD, so sind die Winkel ABC, ADC, Winkel im Halbkreise, also rechte; folglich stehn AB, AD auf den Halbmessern CB, CD in ihren Endpunkten senkrecht, sind also Tangenten am gegebnen Kreise *. *15. f.4.

Zusatz. *Um an einem Kreise mit einer gegebnen Sehne parallel eine Tangente zu ziehn*, fälle man vom Mittelpunkte auf die Sehne ein Perpendikel, und ziehe an dem Punkte, wo dieses den Kreis durchschneidet eine Tangente, so läuft diese mit der gegebnen Sehne parallel *. * I. 21.

[AUFGABE 15.]

In einem gegebnen Kreise eine Sehne einzutragen, welche einer gegebnen Linie MN (kleiner als der F. 103.

Durchmesser) gleich ist, und 1) durch einen gegebnen Punkt P geht, oder 2) einer gegebnen graden Linie Q parallel läuft.

Man beschreibe aus einem beliebigen Punkte A in der Kreislinie, mit der gegebnen Linie MN als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den erstern Kreis in B durchschneide, und ziehe AB, so ist AB eine Sehne des gegebnen Kreises, von der verlangten Grösse MN. Zieht man auf die Mitte dieser Sehne, aus dem Mittelpunkte, die grade Linie CD, und beschreibt mit ihr als Halbmesser um C einen Kreis, so berührt dieser die grade Linie AB, welche auf dem Halbmesser in
*9f.1;12. dessen Endpunkte senkrech steht *.

1. An diesem Kreise ziehe man vom gegebnen
* A. 14. Punkte P aus eine Tangente PE *, so ist das Stück dieser berührenden Linie, welches innerhalb des erstern Kreises liegt, d. h. FG, die verlangte Sehne.

2. Vom Mittelpunkte fälle man auf die gegebne Linie Q ein Perpendikel, und ziehe durch den Punkt H, wo dieses den zweyten Kreis berührt, an diesem
* A. 14. Kreise eine Tangente *, so ist das Stück IK dieser Tangente, welches innerhalb jenes Kreises liegt, die verlangte Sehne.

Denn als Tangenten an dem innern Kreise, stehn beyde Sehnen FG, IK auf den Halbmessern CE, CH
* 12. senkrecht *, sind also beyde vom Mittelpunkte um den Halbmesser CD, folglich eben so weit als die Sehne AB entfernt, mithin dieser Sehne, und der gegebnen Li-
* 9. nie MN, gleich *. Die erstere geht aber durch den

Punkt P, die letztere ist zugleich mit Q auf CH senkrecht, also mit Q parallel *. *I. 21.

Sowohl für die erste als für die andre Aufgabe, giebt es in jedem Kreise zwey Sehnen, auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, welche ihr genüge thun.

Zusatz. Mittelst dieser Auflösung ist man auch im Stande folgendes zu bewerkstelligen: 1. *Von einem gegebnen Punkte P ausserhalb eines Kreises, nach dem Kreise zwey grade Linien so zu ziehn, dass sie zwischen sich Bogen EF, GH abschneiden, welche zusammengenommen den Bogen zwischen den Schenkeln eines andern Winkels, dessen Spitze O ausser dem Kreise liegt, gleich sind.* F. 104.

Man ziehe nemlich nach dem eben gelehrten Verfahren, vom Punkte P aus die graden Linien PE, PF so, dass die Sehnen FH, EG, welche die Kreislinie auf ihnen abschneidet, den Sehnen AC, BD auf den Schenkeln des Winkels O gleich sind. Es gehören alsdann zu jenen und zu diesen Sehnen gleiche Bogen, deren Unterschiede, d. h. die Bogen AB + CD, und EF + GH auch gleich seyn müssen.

2. *Von einem gegebnen Punkte O in der Verlängerung einer Sehne AC an, eine grade Linie so zu ziehn, dass die Bogen zwischen ihm und dieser Sehne, einem gegebnen Bogen AE gleich sind.* Ziehe zwischen den gegebnen Punkten C und E die Sehne CE, und eine zweyte Sehne BD so, dass sie verlängert durch den gegebnen Punkt O gehe, und der erstern CE gleich sey *; so ist dieses die gesuchte grade Linie. Denn *14. (2)
wegen Gleichheit der Sehnen sind die Bogen CA + AE,

und DC + CA + AB gleich, mithin die Bogen AE
*Gr. 2. β = DC + BA *.

Anmerkung. Aufgabe und Zusatz entlehne ich, doch mit verkürzten Beweisen aus Gregor von St. Vincenz.

d. U.

AUFGABE 16.

F. 105. *Ueber eine gegebne grade Linie AB einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebnen Winkel C fasst, (d. h wo jeder in diesem Kreisabschnitt*
* E. 7. *eingeschriebne Winkel, dem Winkel C gleich ist *.)*

Man verlängere die gegebne Linie AB, und bilde am Punkte B und der Verlängerung BD, einen Winkel DBE, dem gegebnen Winkel C gleich. Auf dem Schenkel BE errichte man im Punkte B ein Perpendikel, so auch auf der gegebenen Linie AB in deren Mitte, und beschreibe aus dem Durchschnittspunkt O beyder Perpendikel als Mittelpunkt, mit OB als Halbmesser einen Kreis, so erhält man den gesuchten Kreisabschnitt AMB.

Denn BE ist, als ein Perpendikel auf dem Halbmesser OB in dessen Endpunkt B, eine Tangente des
* 12. Kreises im Punkte B *, und wird im Berührungpunkte von der Sehne AB durchschnitten. Folglich hat der Winkel ABF, mithin auch dessen Scheitelwinkel DBE,
* 25. zu seinem Maasse den halben Bogen BKA *, und ist jedem Winkel im Kreisabschnitte AMB, der zur ent-
* 25. f. gegengesetzten Seite der Sehne liegt, gleich. Nun ist aber DBE der Construction gemäss dem gegebnen Winkel C gleich; also der Kreisabschnitt AMD der Gesuch-

te, indem er über der Linie AB steht, und den Winkel C fasst.

[Anmerkung. Wäre der gegebne Winkel C ein *rechter*, so fiele das Perpendikel BO mit der Sehne AB zusammen, und es gäbe keinen Durchschnittspunkt O. Dann aber wissen wir ohnedem dass der gesuchte Kreisabschnitt, der über AB beschriebene Halbkreis ist. Mehrere Aufgaben, welche diese begründet, erwähnt Lehrsatz 26. Folg. Um in einem gegebnen Kreise einen Abschnitt zu bilden welcher einen gegebnen Winkel fasst, verfährt man grade auf dieselbe Art.]

[*Eine andere Auflösung.* Errichte auf dem einen Schenkel CG des gegebnen Winkels C, im Scheitelpunkte, ein Perpendikel CI, und ziehe an den Endpunkten A, B der gegebnen Linie, unter dem Winkel ICH, zwey Linien AO, BO, und zwar, wenn der gegebne Winkel stumpf ist, unterhalb, wenn er spitz ist, oberhalb der Linie AB. Ein Kreisbogen, um ihren Durchschnittspunkt O beschrieben, bildet den verlangten Kreisabschnitt AMB.

Denn der Winkel O am Mittelpunkte ist nach der Construction gleich 2R — 2ICH *. Folglich ist im zweyten Fall jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB halb so gross *, d. h. gleich R — ICH, und also dem gegebnen Winkel C gleich. Im ersten Fall ist jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB der halben Ergänzung dieses Winkels zu vier rechten, d. h. R + ICH, also auch dem gegebnen Winkel C gleich.] * I. 31. * 23.

[Zusatz. *Es sind drey Punkte A, B, C gegeben, die so liegen, dass der Mittelpunkt des Kreises der durch sie geht, zu weit abliegt, als dass man ihn nach Aufgabe 12* F. 106.

darstellen könnte; aus einem derselben A, eine grade Linie zu ziehn, welche nach dem Mittelpunkte dieses Kreises zu läuft.

Verbinde die drey Punkte durch grade Linien, und ziehe durch A die grade Linie AD, unter einem Winkel BAD, welcher dem Winkel an dem gegenüber liegenden Punkte C gleich ist; so ist ein Perpendikel auf AB im Punkte A, die gesuchte Linie. — Denn der Winkel C ist in dem erwähnten Kreise ein Winkel am Umfange, der den halben Bogen AB zum Maaß hat. Dieser ist folglich auch das Maaß des Winkels BAD, mithin muss, da BA eine Sehne ist, AD eine Tangen-
* 24. Z. te des Kreises im Punkte A seyn *, also das Perpendikel AM nach dem Mittelpunkte des Kreises
* 12. laufen *.]

[AUFGABE 17.]

Ein Dreyeck, welches mit einem gegebnen Dreyeck
F. 107. *PQR gleichwinklig ist, 1) in einen gegebenen Kreis einzuschreiben, und 2) um einen gegebenen Kreis zu umschreiben.*

1. Nach dem Punkte A der Kreislinie, welcher einer der Winkelpunkte des einzuschreibenden Dreyecks werden soll, ziehe den Halbmesser OA, und trage den Winkel Q zweymal neben einander am Punkte
*Aufg. 4 O dieser Linie *. Durchschneidet der dritte Schenkel den Kreis in B, so ziehe AB und mache den Winkel ABC gleich P, so ist, wenn man AC zieht, ABC das verlangte Dreyeck, welches mit dem gegebenen PQR gleich-

gleichwinklig iſt. Denn der Winkel C iſt gleich der Hälfte des Winkels AOB *, folglich gleich Q. Da * 23.
auch B gleich P iſt, ſo müſſen die dritten Winkel R, A ebenfalls gleich *, alſo beyde Dreyecke unter ein- * I. 31 f. 1
ander gleichwinklig ſeyn.

Eine andere Auflöſung. Ziehe durch A eine Tangente GH an dem gegebnen Kreiſe *, und mache A. 14.
am Punkte A den Winkel GAC gleich P, den Winkel HAB gleich Q, und ziehe BC, ſo iſt ABC das geſuchte Dreyeck. Denn die Winkel, welche die Tangente mit den beyden Sehnen, die durch den Berührungspunkt gehn, bildet, ſind den Winkeln in den entgegengeſetzt liegenden Abſchnitten gleich *, alſo * 25.
B = GAC = P und C = HAB = Q, und folglich iſt das eingeſchriebene Dreyeck ABC mit dem gegebenen PQR gleichwinklig.

2. Verlängere eine Seite PQ des gegebenen Dreyecks, und mache DOE = RQS und DOF = RPT. Durch D, E und F ziehe man Tangenten an dem gegebnen Kreiſe, ſo bilden dieſe das geſuchte Dreyeck ABC, welches dem Kreiſe *umſchrieben*, und mit dem gegebenen PQR gleichwinklig iſt. — Denn da bey D, E, F rechte Winkel ſind, ſo ſind die einander gegenüberſtehenden Winkel in den Vierecken BDOE und ADOF in jedem zuſammengenommen zwey rechten Winkel gleich *. Folglich B gleich dem Neben- * I. 32.
winkeln von RQS, d. h. gleich Q, und A gleich dem Nebenwinkel von RPT, d. h. gleich P. Mithin iſt

das umschriebene mit dem gegebenen Dreyeck gleichwinklig.

AUFGABE 18.

Einen Kreis, 1) in ein gegebnes Dreyeck ABC einzuschreiben; 2) um ein gegebnes Dreyeck zu umschreiben.

F. 108. 1. Theile zwey der Winkel des Dreyecks, A, B, durch die graden Linien AO, BO, welche sich in einem Punkte O schneiden müssen *, in zwey gleiche Theile; fälle vom Punkte O auf eine der Seiten des Dreyecks ein Perpendikel OD, und beschreibe mit OD als Halbmesser, um O als Mittelpunk, einen Kreis; so ist dieser der gesuchte, in dem Dreyeck ABC eingeschriebene Kreis.

* I. 24.

Der so gefundene Punkt O steht nemlich von allen Seiten des gegebnen Dreyecks gleich weit ab, indem die Perpendikel auf die Seiten des Dreyecks, OD, OE und so auch OD, OF, gleich sind. Denn sie sind Katheten in rechtwinkligen Dreyecken ODB, OEB und ODA, OFA, wovon die ersten, so wie die letzten, sich wegen Gleichheit der Hypothenusen und eines der spitzen Winkel decken *. Die drey Fusspunkte der Perpendikel, D, E, F liegen also im Umfange der Kreislinie, welche um O mit dem Halbmesser OD beschrieben ist *. Diese Kreislinie berührt folglich die drey Seiten des Dreyecks ABC *, und ist daher in dem gegebenen Dreyeck eingeschrieben *.

* I. 18. f. 2
* E. 2. γ.
* 12.
* E. 16.

2. Die Methode einen Kreis um ein gegebenes Dreyeck zu beschreiben, steht in Aufgabe 12.

[Zusatz I. Zieht man noch CO, so decken sich auch die beyden rechtwinkligen Dreyecke COE, COF, daher die Linie CO den Winkel C ebenfalls halbirt. Folglich *durchschneiden sich die graden Linien, welche die Winkel eines Dreyecks halbiren, alle drey in einem Punkte*, und zwar in dem Punkte, welcher von allen drey Seiten gleich weit entfernt ist, und deshalb *einem Kreise, der dem Dreyeck eingeschrieben wird, zum Mittelpunkte dient.* Diese Linien zertheilen das ganze Dreyeck in drey kleinere Dreyecke, wovon ein jedes über eine Seite des Größern als Grundlinie steht, und worin die Perpendikel aus den Spitzen auf die Grundlinien gleich sind.]

[Zusatz II. Die Seiten des Dreyecks werden durch diese Perpendikel so zerschnitten, daß 1) an jedem *Winkelpunkte gleiche Stücke anliegen*, und 2) *jedes abgeschnittene Stück sammt der gegenüberliegenden Seite, dem halben Umfang des Dreyecks gleich ist.* Das erstere folgt aus der bewiesenen Deckung der kleinen rechtwinkligen Dreyecke, und hieraus wiederum die zweyte Behauptung. Denn bezeichnet man den *halben Umfang des Dreyecks* mit S, so ist $S = AD + BE + CF$, und setzt man in diesem Ausdruck der Folge nach, statt der darin vorkommenden Linien, das Stück an demselben Durchschnittspunkt, welches ihr gleich ist, so erhält man für den *halben Umfang* S eines Dreyecks, folgende Ausdrücke:

$$S = AD + BE + EC = AD + BC = AF + BC$$
$$S = AF + BE + CF = BE + AC = BD + AC$$
$$S = AD + BD + CF = CF + AB = CE + AB$$

Und daraus lassen sich umgekehrt wieder Ausdrücke für die Grösse der abgeschnittenen Stücke ableiten, welche uns in der Folge von Nutzen seyn werden.

$$AD = AF = S - BC$$
$$BE = BD = S - AC$$
$$CF = CE = S - AB.$$

Fig. 78* [Zusatz III. Vergleicht man die Lage des hier betrachteten Durchschnittspunkts (O) dreyer grader Linien, welche *die Winkel eines Dreyecks halbiren*, mit der Lage des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts (C) *dreyer Perpendikel*, welche auf der Mitte jeder der drey Seiten eines Dreyecks errichtet sind*, oder was dasselbe sagt, die Lage der *Mittelpunkte* des dem Dreyeck *eingeschriebenen*, und des *umschriebnen Kreises*; und mit diesen *drittens* den Punkt (P), worin die Perpendikel welche aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Seiten gefällt sind, alle drey sich durchschneiden *, und *viertens* den Punkt (S), worin, wie wir in den folgenden Büchern sehn werden, die drey graden Linien, die aus den Winkelpunkten nach den Punkten in der Mitte der gegenüberstehenden Seiten gezogen werden, sich durchschneiden, (den Schwerpunkt des Dreyecks); so erhält man folgende interessanten Sätze. 1) *Im gleichschenkligen Dreyeck liegen diese vier Punkte in einer graden Linie, und zwar im Perpendikel, welches aus der Spitze des Dreyecks auf die Grundlinie gefällt wird.* Denn dieses Perpendikel halbirt zu-

* 10.

*24 Z. 2.

gleich den Winkel an der Spitze und die gegenüberstehende Grundlinie *. 2) *Im gleichseitigen Dreyeck fallen diese Punkte alle vier in einem Punkt zusammen.* Denn jedes Perpendikel, welches aus einem Winkelpunkte auf die gegenüberstehende Seite gefällt wird, halbirt im gleichseitigen Dreyeck diese Seite und den Winkel an der Spitze *. *I.17.f.2 *I.17 f.1

3) *In keinem ungleichseitigen Dreyeck liegen diese Punkte alle vier in grader Linie.* Denn sonst müsste eins der Perpendikel, welche aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, zugleich diese Seite und den Winkel an der Spitze halbiren, da das Dreyeck denn nothwendig gleichschenklig wäre.

4) *Der erste O, und der vierte S, dieser Durchschnittspunkte* (der Mittelpunkt des eingeschriebnen Kreises, und der Schwerpunkt) *liegen bey jedem Dreyecke innerhalb desselben;* der *zweyte, C', und dritte, P,* aber (der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, und der Durchschnittspunkt der Perpendikel aus den Spitzen) *liegen in spitzwinkligen Dreyecken innerhalb, in stumpfwinkligen ausserhalb des Dreyecks* * *und* in *rechtwinkligen*, jener auf der Hypotenuse, dieser in der Spitze des rechten Winkels.] *A.12.Z 1; I.16 Z.2.f.2.

Anmerkung. Ueber die Lage dieser *vier merkwürdigen Punkte* bey jedem Dreyeck, hat *L. Euler* eine interessante algebraische Untersuchung angestellt, *(Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* in den Nov. Comment Ac. Sc. Petropol. ad. A. 1765) in welcher er den sehr netten Satz darthut, *dass in jedem Dreyeck drey dieser Punkte, nemlich C', P und S in grader Linie liegen*, und zwar so, dass immer S zwischen C' und P liegt, und PS das Doppelte von C'S, oder

PS = 2. CS ist, wie man dieses auch in unserer Figur wahrnimmt. Hat man also zwey dieser Punkte, so findet man den dritten durch eine sehr leichte Construction. Auch lehrt *Euler* in dieser Abhandlung, wie man, wenn die drey Punkte O, P, S gegeben sind, aus der Lage dieser drey Punkte das Dreyeck ABC finden kann, welches von der Auflösung einer Cubischen Gleichung abhängt, deren drey Wurzeln die Zahlausdrücke für die Seiten dieses Dreyecks sind.

d. U

AUFGABE 19.

F. 109. *Das Verhältniss zweyer grader Linien AB, CD, welche gegeben sind, in Zahlen auszudrücken, oder das Zahlverhältniss dieser Linien zu finden.*

Trage auf die grössere Linie AB, die kleinere CD
*Fo.3.α so oft stetig nebeneinander, als es angeht *, wir wollen setzen zweymal. Wird jene durch diese nicht genau gemessen, so bleibt ein Stück BE, kleiner als CD, übrig.

Trage ferner auf CD diesen Rest BE wieder so oft stetig nebeneinander, als es angeht, in unserm Fall einmal, da denn aufs neue ein Rest DF bleibt, der kleiner als BE ist.

Trage diesen zweyten Rest DF wieder auf den ersten BE so oft es angeht nebeneinander, in unserm Fall einmal, wobey der Rest BG bleibt.

Trage diesen dritten Rest BG wieder auf den zweyten DF so oft es angeht nebeneinander, und so fahre fort.

[Bey diesem Verfahren kömmt man nun entweder zuletzt auf einen Rest, der den vorhergehenden genau *misst*, oder man *erreicht nie einen solchen Rest*, so lange man auch fortfährt, welches letztere, wie wir im folgenden Buche sehn werden, allerdings bey gewissen Linien der Fall ist.

Erster Fall. Kömmt man endlich auf einen Rest der den vorhergehenden genau misst, und folglich in ihm nach irgend einer ganzen Zahl enthalten ist, *so ist dieser letzte Rest das gemeinschaftliche Maass der beyden gegebnen Linien AB, CD.* Sieht man ihn als Einheit an, so lassen sich alle vorhergehenden Reste, mithin AB, CD selbst, in Beziehung auf ihn als *Zahlen* ausdrücken, woraus sich denn das *Zahlverhältniss* der beyden gegebnen Linien AB, CD findet. Und zwar ist dieser letzte Rest *das grösste gemeinschaftliche Maass* der beyden gegebnen Linien, und daher ihr so gefundnes Zahlverhältniss sogleich *in kleinsten Zahlen* (in Primzahlen unter sich) ausgedrückt.]

Denn gesetzt in unserm Beyspiele sey BG jener letzte Rest, welcher den vorhergehenden DF genau misst, und zwar sey BG genau zweymal in FD enthalten, so ist, wenn man BG zur Einheit nimmt, also $BG = 1$ setzt, $FD = 2$; ferner, da FD und BG zusammengenommen gleich EB sind, ist $EB = 1.2 + 1 = 3$; und da wieder EB und FD zusammengenommen gleich CD sind, ist $CD = 1.3 + 2 = 5$, und da endlich zwey CD und BE zusammengenommen gleich AB sind, so ist $AB = 2.5 + 3 = 13$. Folglich lassen sich alsdann die beyden gegebnen Linien AB, CD, in Beziehung auf BG als Einheit, durch die Zahlen 13 und 5 ausdrücken; in beyden ist BG nach ganzen Zahlen enthalten, in AB 13 mal, in CD 5 mal, und dieser letzte Reſt iſt mithin für beyde gegebne Linien ein gemeinſchaftliches Maaſs.

Er iſt aber auch *ihr gröſstes gemeinſchaftliches Maaſs.* Denn wer dieſes leugnen wollte, müſte behaupten irgend eine grade Linie M $>$ BG könnte ein gemeinſchaftliches Maaſs der beyden gegebnen Linien AB und CD ſeyn. Nun aber wird ein Theil der Linie AB, nemlich AE, von CD gemeſſen (AE $= 2 \cdot$ CD), folglich müſte auch der Unterſchied von AB und AE, d. h. EB, und da EB $=$ CF iſt, auch CF von der Linie M gemeſſen werden. Wird aber CD und zugleich das Stück derſelben CF von M gemeſſen, ſo muſs nothwendig auch das zweyte Stück FD $=$ EG von M gemeſſen werden, und da das wieder eben ſo bey EB und dem Stück EG der Fall iſt, ſo muſs auch ihr Unterſchied GB von M genau gemeſſen werden folglich M *entweder gleich* oder *kleiner* als BG ſeyn, welches der Vorausſetzung daſs M $>$ BG ſey widerſpricht. Es iſt alſo kein gröſseres gemeinſchaftliches Maaſs beyder Linien AB, CD möglich, als der ſo gefundene letzte Reſt BG, dieſer mithin ihr gröſstes gemeinſchaftliches Maaſs.

Aus dieſem Beweiſe erhellet zugleich, 1) *daſs jede Linie M, welche zwey gegebne grade Linien AB, CD genau miſst, auch ihr gröſstes gemeinſchaftliches Maaſs GB genau meſſen müſſe.* — 2) Daſs *die beyden Zahlausdrücke* der gegebnen Linien AB, CD, welche auf dieſe Art gefunden werden (13 und 5) keinen gemeinſchaftlichen Factor haben können, alſo *Primzahlen unter ſich* ſind, und *das Verhältniſs beyder Linien in kleinſten Zahlen 13 : 5 ausdrücken.*]

Dieſes Zahlverhältniſs ſagt aus, daſs die beyden Linien grade ſo wie dieſe beyden Zahlen aus einander entſtehn, und daſs folglich, wenn AB in 13 gleiche Theile getheilt wird, 5 ſolcher Theile die Linie CD ausmachen. Nähme man daher nicht BG ſondern AB zur Lineareinheit, ſezte alſo AB = 1, ſo müſte CD durch den Bruch $\frac{5}{13}$ ausgedrückt werden, indem dann CD 5 ſolchen Theilen, wovon in der Lineareinheit 13 gleiche enthalten ſind, gleich ſeyn würde. Und ſezte man umgekehrt CD = 1 ſo wäre AB durch die Zahl $\frac{13}{5}$ auszudrücken.

[Zweyter Fall. *Kömmt man auf keinen Reſt der den nächſt vorhergehenden genau miſst,* man mag das angegebne Verfahren ſo weit fortſetzen als man nur immer will, *ſo giebt es für die beyden gegebnen Linien AB, CD kein gemeinſchaftliches Maaſs,* d. h. keine Linie die ſelbſt, oder deren noch ſo kleine Theile, in beyden Linien zugleich genau enthalten wären, und beyde ſind alſo *incommenſurabel*; wovon wir im folgenden Buche ein Beyſpiel an dem Verhältniſſe zwiſchen der Seite und der Diagonale eines Quadrats werden kennen lernen. Da alsdann beyde Linien ſich nicht auf einerley Einheit beziehn, nicht durch einerley Einheit, oder noch ſo kleine Theile derſelben, ſich ausdrücken laſſen; *ſo giebt es kein Zahlverhältniſs, wodurch ein ſolches incommenſurables Verhältniſs ſich völlig ausdrücken lieſse.* Vernachläſſigt man aber den letzten Reſt und nimmt z. B., wenn BG in dem vorhergehenden Reſt FD zwar nicht genau, aber doch beynahe zweymal enthalten ist, an, es sey genau FD = 2 BG; so findet man ein Zahlverhältniss, welches von dem incommensurablen nur um wenig abweicht, und das sich demselben um so mehr nähert, je weiter man auf dem angegebnen Wege fortgeschritten ist, und je weiter der vernachlässigte Rest hinaus fällt; so dass man in diesem Fall wenigstens ein Zahlverhältniss findet, welches dem Verhältniss der incommensurablen Linien so nahe kömmt als man nur immer will, und das sich demselben ohne alles Ende nähern läst, wiewohl es dasselbe nie erreichen, nie völlig erschöpfen kann.]

[Zusatz I. Dieser Satz begründet *die Methoden grade Linien* unmittelbar *zu messen*, und sich *über das Verhältniss zweyer grader Linien völlig ins Klare zu bringen.* Dieses ist man nur dann, wenn man weiss, wie oft die eine Linie die andere, oder einen bestimmten Theil derselben, in sich enthält, wenn man also das Zahlverhältniss beyder kennt, und um dieses zu erforschen muss man die eine Linie mit der andern, oder mit einem Theil derselben, als Einheit vergleichen; grade darin besteht aber *das Messen.* Dieses kann man *entweder* auf die Art, welche hier gelehrt ist, bewerkstelligen, indem man Rest auf Rest nebeneinander trägt; *oder* man hat einen *Maassstab* d. h. eine grade Linie, welche nach irgend einer Lineareinheit und deren Theilen, so klein als man sie zur jedesmaligen Absicht nöthig hat, eingetheilt ist (z. B. nach Zollen und Decimal- und Centesimaltheilen des Zolls.) Trägt man die gegebne zu messende Linie auf den Maassstab auf, so sieht man sogleich wie viel dieser Lineareinheiten und deren Theile sie enthält, z. B. 8, 25, erhält also auf diese Art mit grösster Leichtigkeit den *Zahlausdruck* der gegebnen Linie in Beziehung auf die angenommne Lineareinheit des Maassstabs. Verfährt man eben so mit der zweyten Linie, so findet man auch ihren Zahlausdruck in Beziehung auf dieselbe Lineareinheit, z. B. 14,75 und dann ist das *Zalverhältniss* der beyden gegebnen Linien 8, 25 : 14, 75 oder 33 : 59.]

[Zusatz II. Gesetzt wir sehn die grössere der beyden gegebnen Linien AB, CD als Lineareinheit an, setzen also AB = 1, so ist der Zahlausdruck von CD, d. h. $\frac{CD}{AB}$, ein ächter Bruch, der in unserm Fall, wo AB die Linie CD zweymal und noch das Stück EB in sich enthält, gleich ist, $\frac{CD}{2CD + EB} = \frac{1}{2 + \frac{EB}{CD}}$, indem der Bruchwerth unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerley Grösse dividirt werden. Nun aber war CD = EB + FD, EB = FD + GB und FD = 2 GB, also ist $\frac{EB}{CD} = \frac{EB}{EB + FD} = \frac{1}{1 + \frac{FD}{EB}}$; $\frac{FD}{EB} = \frac{FD}{FD + GB} = \frac{1}{1 + \frac{GB}{FD}}$ und $\frac{GB}{FD} = \frac{1}{2}$. Diese Werthe der Folge nach in den erstern Ausdruck gesetzt, geben

$$CD = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} \cdot AB \text{ (oder } CD = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}}} \cdot AB$$

wenn überhaupt $AB = m \,.\, CD + EB$, $CD = n \,.\, EB + FD$, $EB = p \,.\, FD + GB$ und $FD = q \,.\, GB$ ist;) so daſs also auf dieſem Wege die eine Linie in Beziehung auf die andre als Einheit, durch einen *Stuffenbruch* ausgedrückt wird, deſſen Werth ſich entweder aus der Lehre von der Addition und Diviſion der Brüche in jedem Fall finden, oder durch eine allgemeine algebraiſche Formel darſtellen, und nach ihr berechnen läſst. Und zwar iſt dieſe Formel folgende $CD = \frac{(1 + pq).n + q}{(1 + pq)(1 + mn + mq)}$, wie man leicht findet, wenn man den Werth des Bruchs Stuffenweiſe vom unterſten an, den Regeln der Bruchrechnung gemäſs entwickelt,

z. B. $p + \frac{1}{q} = \frac{pq + 1}{q}$, $\cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}} = \cfrac{1}{\cfrac{pq + 1}{q}} = \frac{q}{pq + 1}$

u. ſ. f. So berechnet iſt der Werth unſers Stuffenbruchs, $CD = \frac{5}{13} . AB$, wie oben. Wenn bey zwey Linien ſich darthun lieſse, daſs dieſer Stuffenbruch, der die eine in Beziehung auf die andre als Lineareinheit ausdrückt, ins Unendliche fortliefe; ſo wäre dadurch, dem zweyten Fall gemäſs, *die Incommenſurabilität der beyden gegebnen Linien* dargethan. Beyſpiele davon werden wir im folgenden finden.]

Anmerkung. Schon *Euklid* lehrt durch die Methode des *ersten Falls das gröſste gemeinschaftliche Maaſs zweyer grader Linien* oder auch zweyer *Zahlen finden*, ersteres gleich zu Anfang des *zehnten Buchs*, welches von der *Incommensurabilität ausgedehnter Gröſsen handelt*, (Satz 3) letzteres an der Spitze des ersten seiner drey arithmetischen Bücher (Buch VII. Satz 2), wo überhaupt die ersten Sätze, den ersten Sätzen des zehnten Buchs parallel laufen, (und von denen *Clavius* meint, Euklid habe diese Bücher blos zum Behuf des zehnten Buchs seinen Elementen einverleibt.) Ferner zeigt er, daſs um *dreyer Linien* (X. 4.) oder dreyer *Zahlen* (VII. 3.) *gröſstes gemeinschaftliches Maaſs zu finden*, man dieses zuerst für zwey derselben, und dann aufs neue für ihr gefundenes Maaſs und für die dritte Linie oder Zahl suchen müsse. Endlich beweiſt er auch, daſs wenn unser *zweyter Fall* eintritt, beyde Linien *incommensurabel* seyn müssen (X. 2), und daſs, wenn man die Methode auf zwey gegebne *Zahlen* überträgt, und man kömmt bey ihnen auf keinen Reſt, gröſser als die Einheit, der in dem nächſt vorhergehenden Reſte genau aufgeht, bey solchen Zahlen etwas Aehnliches ſtatt findet; indem ſie dann Primzahlen unter ſich ſind, und keinen gröſsern gemeinſchaftlichen Factor als die Einheit ſelbſt haben (VII. 1.)

Die fernern Sätze Euklids, daſs *commensurable Gröſsen sich wie Zahlen*, *incommensurable* Gröſsen hingegen *nicht wie Zahlen verhalten*, und daſs umgekehrt alle Gröſsen für die ſich ein genaues Zahlverhältniſs finden läſst, *incommensurabel* ſeyn müſſen, (X. 5-8. und VII. 4.) ſind unmittelbare Folgerungen aus unſerm Beweiſe. Und aus dieſen Sätzen flieſst wiederum, das *zwey incommensurable Gröſsen* mit jeder dritten beyde zugleich commenſurabel oder incommenſurabel ſind, und eine mit ihnen commenſurable Summe haben, und umgekehrt; daſs hingegen, wenn von *zwey commensurablen Gröſsen* die eine mit einer dritten commenſurabel iſt, die andre mit ihr incommenſurabel ſeyn muſs, und daſs beyde mit ihrer Summe incommenſurabel ſind, und umgekehrt (X. 12 - 17)

Diese Sätze dienen *Euklid* jedoch nur zu einer Art von Einleitung in die Materie, welche den eigentlichen Gegenstand des *zehnten Buchs* ausmacht, nemlich in die *Untersuchung über die Abhängigkeit, welche zwischen der Commensurabilität und Incommensurabilität von Rechtecken oder Quadraten und deren Seiten statt findet.* Diese Untersuchung, die Euklid zur Theorie der regulären Körper braucht, stellt er zwar mit grosem Scharfsinn, aber auf einem ganz geometrischen Wege an, auf welchem sie so weitläufig und schwierig wird, dass man dieses Buch mit Recht für das schwerste in den Elementen hält, und dass *Wolf* behauptet „es sey so dunkel, dass ein Anfänger unmöglich das geringste davon verstehn könne". Seitdem man in der neuern Mathematik in den *Wurzelgrössen* ein Mittel gefunden hat, incommensurable Grösen arithmetisch darzustellen, und sie als sogenannte *Irrationalzahlen* mit unter die Zahlbegrifte aufzunehmen, stehn uns weit einfachere und leichtere Methoden zu Geboth, das, was wir von dieser Untersuchung brauchen können, arithmetisch zu entwickeln und zu erörtern, ohne dass wir der grosen Menge von Distinctionen zwischen irrationalen Linien verschiedner Art, des Heers von Kunstwörtern welche diese Materie bey Euklid besonders erschweren, und des zehnten Theils der Sätze die bey Euklid vorkommen, von Nöthen hätten; eine Erleichterung die besonders daher rührt, dass wir, statt Rechtecke und Quadrate aus commensurablen und incommensurablen Linien, die Producte
* III. 4. An. 1. aus rationalen und irrationalen Zahlen betrachten *.

Euklid lehrt wie man zu jeder gegebnen Linie 13 verschiedne Arten von irrationalen Linien darstellen kann, die er insgesammt genauer untersucht, und mit besondern abschreckenden Kunstwörtern bezeichnet, (z. B. nach Lorenz Uebersetzung: *Mediale*, *Binomiale*, *erste und zweyte Bimediale*, *grössere und kleinere Irrationale*, *Apotome*, *erste und zweyte Medialapotome*, *des Rationalen und Medialen Quadratseite*, *die zwey Mediale Gebende etc.* (X. 112.), und zeigt, wie ausser diesen 13, (die sich nach unsrer Art insgesammt aus Rationalzahlen, Quadrat- und Biquadratwurzeln ausdrücken und zusammensetzen lassen) „noch unzählige andre Irrationalle nien entstehn, die mit keiner unter jenen einerley sind" (X. 116.) (die nemlich auf Wurzeln vom 8ten, 16ten und fernern Graden beruhen. Der letzte Satz in diesem Buche thut dies Incommensurabilität zwischen der Seite und dem Durchmesser eines Quadrats dar. Irrationallinien (ein Ausdruck, den schon Euklid hat) welche sich auf Wurzeln von andern Graden als dem 2ten, 4ten, 8ten u. s. f. beziehn, (die man also weder durch einmaliger noch durch wiederholter Darstellung einer mittleren Proportionallinie, sondern nur durch Auffindung zweyer mittlerer Proportionallinien, u. s. f., also nur auf Wegen, welche der Elementargeometrie unzugänglich sind *, findet,) erwähnt Euklid mit keinem Wort. *III24Z Seine Untersuchung ist also sehr eingeschränkt, statt dass wir durch die arithmetischen Begriffe sie sogleich ganz allgemein führen können. Ueberdem hat Euklids Vortrag noch das Unangenehme, dass er, wie überhaupt die Alten, *nur ganze Zahlen kennt*, und unter seinen Zahlbegriffen keinen für Brüche aufnimmt, so dass wir seine Worte nicht in den uns geläufigern Sinn nehmen dürfen (denn nach diesem sagten manche Sätze offenbare Falschheiten aus), sondern erst in *seine* Begriffe von Zahlen übersetzen müssen. Alles das trägt dazu bey, dieses Buch für uns überflüssig und ungeniessbar zu machen. Ueberhaupt ist die Materie in der Geometrie nur für die Art, wie Euklid die Theorie der regelmässigen Körper behandelt, von Wichtigkeit; was uns davon unentbehrlich ist, findet man theils hier, theils in der Folge dieses Werks. Dem allen ungeachtet, ist folgendes Urtheil sehr ungerecht, welches der bekannte *Peter Ramus* in seinen Scholiis Mathematicis (lib. 21. p. 252.) über diese Arbeit Euklids fällt: „*Materies decimo libro proposita, eo modo est tradita, ut in humanis literis atque artibus similem obscuritatem nusquam deprehenderim, obscuritatem dico, non ad intelligendum, quid praecipiat Euklides, — — sed ad perspiciendum penitus et explorandum, quis finis et usus sit operi propositus,* (die Theorie der regulären Körper,) *quae genera, species, differentiae sint rerum subjectarum*, (Euklid verweilt sich umständlich dabey die Verschiedenheit aller jener Irrationallinien ins

Klare zu setzen) *nihil enim unquam tam confusum vel involutum legi vel audivi.* Andere preisen es dagegen als ein Meisterstück beharrlichen Tiefsinns, und das mit Recht, gehört es auch für uns nur zu den blossen Schaustücken, und zu den veralteten Rüstzeugen im Zeughause der Wissenschaft. d. U.]

AUFGABE 20.

F. 110. *Wenn zwey Winkel A, B gegeben sind, ihr gemeinschaftliches Maass, und daraus ihr Zahlverhältniss zu finden.*

Man beschreibe mit gleichem Halbmesser um die Scheitelpunkte beyder Winkel Kreisbogen CD, EF, so
*22. Z. sind diese das Maass beyder Winkel *. Mit diesen beyden Kreisbogen verfahre man so, wie in der vorigen Aufgabe mit den beyden graden Linien; und das ist immer möglich, da Kreisbogen, die mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, gehörig gelegt sich de-
* 1. cken, also ineinander fallen *, und sich mittelst ihrer Sehnen einer auf dem andern stetig neben einander legen
* 7. lassen *. Auf diese Art findet man sogleich das *grösste gemeinschaftliche Maass* OD beyder Bogen, *wenn es eins giebt*, und ihr Verhältniss in den kleinsten Zahlen
* A. 14. Fall 1. ausgedrückt *. Dieses ist zugleich das Verhältniss der beyden gegebenen Winkel A, B, die sich stets wie
* 22. jene Bogen verhalten *. Der Winkel OAD, dessen Schenkel das gemeinschaftliche Maass beyder Bogen umspannen, ist zugleich das grösste gemeinschaftliche Maass dieser beyden Winkel.

Haben die beyden Bogen CD, EF, die man auf diese Art mit einander vergleicht, *kein* gemeinschaftli-

ches

ches Maaſs *, ſo ſind ſie, und die Winkel A, B deren Schenkel dieſe Bogen umſpannen, incommenſurabel, und dann giebt es *kein Zahlverhältniſs*, welches dem Verhältniſs dieſer Bogen, und dieſer Winkel völlig entſpräche. Allein man findet dann, wie in der vorigen Aufgabe, Zahlverhältniſſe, die ſich ihrem wahren (irrationalen) Verhältniſſe immer mehr und ohne Gränze nähern, je weiter man das angegebene Verfahren fortgeſetzt hat; folglich Zahlverhältniſſe, die man zum Gebrauch ſtatt des irrationalen Verhältniſſes ſetzen kann.

* A. 19. Fall 2.

[Zuſatz. *Um den unmittelbaren Zahlausdruck eines gegebenen Winkels in Theilen des rechten Winkels*, als dem feſtgeſetzten Maaſse alle Winkel *zu finden*, braucht man nur auf diese Art das gemeinſamme Maaſs und das Zahlverhältniſs zwiſchen dem Bogen, der den gegebenen Winkel miſst, und der Kreislinie, oder dem Quadranten, aufzuſuchen. Geſetzt man findet ſo das Zahlverhältniſs des Bogens und der Kreislinie $3:25$, alſo des Bogens und des Quadranten $3:\frac{25}{4}$, ſo iſt der Winkel $\frac{25}{3}$ von vier rechten, oder $\frac{25}{12}$ eines rechten Winkels, läſst ſich alſo durch den Bruch $\frac{25}{12}$ ausdrücken, in ſo fern wir den rechten Winkel zum allgemeinen Maaſs, zur Einheit der Winkelgröſsen, machen. Oder nimmt man den neunzigſten Theil des rechten Winkels, d. h. einen *Grad*, und deſſen Sexageſimaltheile zum allgemeinen Maaſs, oder zur Einheit der Winkel *, ſo läſst ſich jener Bogen durch die Zahl $\frac{25}{12} \cdot 90$ Grade $= 187 + \frac{1}{2}$ Grad $= 187^\circ\ 30'$ ausdrü-

*22.Z.3.

cken. Eben so der Bogen den er umspannt in Bogengraden. Dabey muss man sich denken, der *Winkel* enthält 187 Winkeleinheiten und 30 Sechzigtheile derselben, der Bogen 187 Bogeneinheiten und 30 Sechzigtheile derselben; ein Ausdruck welchem also immer das Zahlverhältniss des Winkels zum rechten, und des Bogens zu Kreislinie, zum Grunde liegt, wie wir das
*28.Z.3. umständlich erläutert haben *.

Gesetzt der gegebene Bogen B sey in dem *Halbkreise m* (4) mal enthalten, messe ihn aber nicht genau, sondern es bleibe ein Stück übrig, welches in dem Bogen B selbst *n* (2) mal enthalten sey, und einen Rest lasse, der in dem vorigen Reste, *p* (3) mal enthalten sey, sammt einem Bogenstück, welches wiederum von diesem Reste der *qte* (3te) Theil sey; so ist nach dem Zusatz der vorigen Aufgabe, B =

$$\frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{1}{q}}}} \,.\, \text{Halbkr.} = \frac{(1+pq).n+q}{(1+pq)(1+mn+mq)} \,.\, 180^0$$

$$= \frac{10 \cdot 2 + 3}{10 \cdot 25} \,.\, 180^0 = \frac{23 \cdot 180^0}{250} = \frac{414^0}{25} = 16^0\,31'36''.$$

Dieses artige *Verfahren*, *Winkel lediglich mit Hülfe des Zirkels zu messen*, trägt schon *Lagny* in den *Memoires de l' Acad. des Sc. de Paris A.* 1724. *p.* 250 vor.