Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Drittes Buch. Der Inhalt Gradeliniger Figuren.

DRITTES BUCH.

DER INHALT GRADELINIGER FIGUREN.

[Dieses Buch beschäftigt sich mit Untersuchungen über den Inhalt der gradelinigen Figuren, worauf sich alles Ausmessen und Ausrechnen dieser Figuren gründet, und mit Vergleichungen des Inhalts von Figuren, besonders von Rechtecken und Quadraten, welche über Linien von einer gewissen Eintheilung, oder über Seiten bestimmter Figuren, oder über Linien im Kreise beschrieben sind; Vergleichungen aus denen sich nicht nur manche interessante Eigenschaft dieser Figuren und des Kreises ergiebt, sondern die auch für die folgenden Materien von grosser Wichtigkeit sind. Le Gendre trägt überdem im dritten Buch die Lehre von der Aehnlichkeit der Flächenräume vor; allein da beyde Materien durch meine Bearbeitung noch mehr als die in den vorigen Büchern (bis zum Dreyfachen und Vierfachen) angeschwollen sind; so verweise ich die letzte Materie ganz in das vierte Buch. Im Ganzen konnte ich zwar hier die Ordnung Le Gendres beybehalten, (nur dass er die Sätze über den Kreis welche am Ende dieses Buchs stehn, und von denen bey ihm nur ein Paar vorkommen) aus der Lehre von der Aehnlichkeit ableitet; allein sein Vortrag ist so mangelhaft, so voller Lucken, und übergeht so viele wichtige und zur feinern Kenntniss der Geometrie unentbehrliche Sätze, die zwar in Compendien, aber in keinem vollständigen Lehrbegriff der Wissenschaft fehlen dürfen, dass ich dieses Buch grösstentheils habe umschmelzen müssen. Um indess nicht die Gleichförmigkeit der Behandlung zu stören, werde ich die Rolle des Ueberſetzers beybehalten, und was mir allein gehört, wie in den vorigen Büchern noch ferner mit dieſem Zeichen [ ] umklammern

Gilbert.

Erklärungen.

1.

Taf. III. [Die *Höhe einer Figur* wird durch den Abſtand zweyer Parallellinien beſtimmt, wovon die eine durch irgend eine Seite der Figur (*ihre Grundlinie*) die andere durch den Punkt, oder durch die Punkte, der Figur geht, die am weiteſten von dieſer Linie entfernt ſind. *Die Höhe einer Figur wird mithin durch das Perpendikel gegeben, welches man aus einem jener Punkte auf die Grundlinie oder deren Verlängerung fällt* *.

*I. 16. f. 1 u. 27.

α) Sind alſo *zwey Figuren* ſo beſchaffen, daſs, wenn man ihre Grundlinien in grader Linie ſtellt, ihre Spitzen, oder ihre der Grundlinie gegenüberſtehende Seiten, in derſelben Parellellinie fallen, ſo haben ſie *gleiche Höhe*.

β) Umgekehrt laſſen Figuren von gleicher Höhe ſich immer zwiſchen einerley Parallellinien ſo legen, daſs ihre Grundlinien in die eine, ihre Spitzen oder höchſten Seiten in die andre fallen.

Wendet man dieſe Sätze insbeſondere auf das Dreyeck und auf das Parallelogramm an, ſo ergeben ſich daraus die folgenden Erklärungen.]

2.

Nimmt man irgend eine Seite AB eines *Dreyecks* Fig. 1.
ABC zur Grundlinie an *, so ist das Perpendikel CD, *I. E. 18.
welches aus der *Spitze*, das heisst aus dem gegenüberstehenden Winkelpunkt C, auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefällt wird, die *Höhe des Dreyecks*.

[α) Legt man die Grundlinien zweyer Dreyecke in grader Linie, und zieht durch ihre Spitzen eine grade Linie, so sind *beyde Dreyecke von gleicher oder ungleicher Höhe, je nachdem diese Linie mit der Grundlinie parallel läuft, oder nicht* *. *E. 1, α.

β) Ist im *rechtwinkligen Dreyeck* die eine Kathete Grundlinie, so stellt die andere die Höhe dar.]

3.

Nimmt man eine Seite eines *Parallelogramms*
ABEC, z. B. AB zur *Grundlinie* *, so wird der Abstand * E. 1.
der gegenüberstehenden Seite CE von dieser Grundlinie, (mithin das Perpendikel CD oder EF zwischen diesen beyden parallelen Seiten oder deren Verlängerung) die *Höhe des Parallelogramms* genannt. Eben so ist die *Höhe eines Trapezoid* * das Perpen- *I. E. 19.
dikel EF zwischen den beyden parallelen Seiten des- Fig. 14.
selben, deren eine man stets für die Grundlinie annimmt.

[Legt man die Grundlinien zweyer Parallelogramme Fig. 6.
in grader Linie, so liegen, ist die Höhe dieser Parallelogramme gleich, die gegenüberstehenden Seiten

auch in grader Linie, und zwar in einer graden Linie, welche mit der erstern parallel läuft; und ist umgekehrt dieses bey zwey Parallelogrammen der Fall, so haben sie gleiche Höhe. Wo nicht so ist ihre Höhe ungleich.]

4.

Fig. 2. [In jedem *Rechteck* ABCD stellen zwey an einander liegende Seiten z. B. AB, BC die *Grundlinie* und *die Höhe* dar; denn je zwey Seiten desselben stehn
*I. E. 19. aufeinander senkrecht *. Im gleichseitigen Rechteck, d. h. im *Quadrat* stellt also jede Seite zugleich
* I. 34. A. 2. Grundlinie und Höhe dar. — Dem im ersten Buch * erklärten Kunstausdruck zu folge, ist also *jedes Rechteck aus seiner Grundlinie und Höhe beschrieben*, unter seiner Grundlinie und Höhe enthalten.

α) Rechtecke aus gleicher Grundlinie und gleicher Höhe beschrieben decken sich, und haben gleichen In-
* I. 34 A. 3. halt *. *Sind also die Gurndlinien AB, EF und die Höhen BC, FG zweyer Rechtecke gleich, so ist es auch der Inhalt, und sie decken sich.*

Fig. 3. β) Eben so *haben Quadrate über gleiche Linien AB, EF beschrieben, gleichen Inhalt.*

γ) *Haben* umgekehrt *zwey Quadrate gleichen Inhalt, so haben sie auch gleiche Seiten und decken sich.* Denn da sie beyde rechtwinklig sind, so kann man sie so aufeinander legen, dass zwey Seiten auf einander fallen. Wären nun die Seiten ungleich, wie z. B. AB, AK so wäre das eine Quadrat über AK = EFGH, nur ein

Theil des andern ACDE, und alſo wären beyde nicht gleich, gegen die Vorausſetzung.

[d. U.]

5.

[α) *Rechtecke von gleicher Höhe haben zuſammengenommen gleichen Inhalt mit einem Rechteck AG von derſelben Höhe AB, deſſen Grundlinie AH allen ihren Grundlinien zuſammengenommen gleich iſt.* Fig. 2.

Denn jene Rechtecke decken ſich zuſammengenommen mit dieſem einen Rechteck, weil ſich deſſen Grundlinie AH aus den Grundlinien jener Rechtecke, z. B. aus AD, DE, EH, der Vorausſetzung gemäſs zuſammenſetzen läſst. Errichtet man nemlich Perpendikel auf AH durch D und E, ſo theilen dieſe das Rechteck AG, in kleinere AC, DF, EG *, welche mit *II.A 11 den gegebnen gleiche Grundlinien und Höhen haben, ſich alſo mit ihnen decken *, daher auch das ganze * 4. α. Rechteck AG ſich mit ihnen zuſammengenommen deckt, und folglich mit ihnen gleichen Inhalt hat.

β) Beſteht überdem die zweyte Seite eines Rechtecks aus mehreren Abſchnitten AI, IB etc, und man errichtet auch auf ihr in den Theilpunkten Perpendikel IM etc., ſo laufen auch dieſe mit dem Seiten AH, BG, parallel *, durchſchneiden die parallelen Linien * I. 21. DC, EF, HG insgeſammt rechtwinklig * und zerthei- *I.25 f.1 len deshalb jedes der vorigen Rechtecke AC, DF, EG in kleinere Rechtecke *, welche die Abſchnitte der Sei- *I.E.19. te AB zur Grundlinie, und die erſtern AD, die zwey-

* I. 34 ten DE etc. zur gemeinschaftlichen Höhe haben*; daher *das Rechteck aus zwey graden Linien AB, AH, die beyde aus mehreren Abschnitten bestehn, gleichen Inhalt hat mit allen den Rechtecken zusammengenommen, welche aus je zwey Abschnitten der einen und der andern beschrieben sind.*

γ) Aus denselben Gründen ist *der Unterschied zweyer Rechtecke von gleicher Höhe* AF, AC einem Rechteck DF von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie ED dem Unterschiede ihrer Grundlinien AC, AB gleich ist.

Fig. 4. δ) Und *besteht eine grade Linie AB aus zwey Theilen AC, CD, so sind die Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem der beyden Theile*, d. h. Rechteck aus AB', AC und Rechteck aus AB', CB, mit dem Rechteck aus AB', und (AC + CB') d. h. mit dem Rechteck aus AB' und AB, also *mit dem Quadrat aus der ganzen Linie AB, von gleichem Inhalt.*

Fig. 5. ε) Hingegen ist *das Rechteck aus einer Linie AB, die aus den beyden Theilen AC, CB besteht, und aus einem der beyden Theile*, z. B. aus AC, gleich dem Rechteck aus AC', CB und dem Rechteck aus AC', AC, d. h. *gleich dem Rechteck aus den beyden Theilen AC, CB, sammt dem Quadrat des Theiles AC.*

Ist umgekehrt die Ergänzung eines Rechtecks CC, welches über einem Abschnitt AC einer graden Linie steht, zum (gleich hohen) Rechteck über der ganzen Linie ein Quadrat; so ist das erstere Rechteck aus den beyden Abschnitten AC, CB der gegebnen Linie beschrieben. (Euklid Lemma zu X. 18.)

Anmerkung. Die Sätze unter α, δ, ε machen die drey ersten Lehrſätze in *Euklids* zweytem Buch aus, wo ſie mit umſtändlichern Beweiſen, als es nöthig war, verſehen ſind. *Le Gendre* übergeht ſie und die Sätze unter 4 ganz und gar, und das ſehr mit Unrecht, da ſie die Fundamentalſätze über die Vergleichung des Inhalts gradeliniger Figuren enthalten. Ihrer groſsen Einfachheit wegen, habe ich ſie hierher, und nicht unter die Lehrſätze geſtellt. Daſs man ſie mit einer kleinen Modification auf alle Parallelogramme übertragen könne, ſieht jeder. Sie ſind den einfachſten Sätzen der Buchſtabenrechnung analog, und wir werden in den Zuſätzen zum vierten Lehrſatze zeigen, in wie fern ſie auf dieſe hinauslaufen; nemlich die in *Erklärung* 4. auf die Sätze, daſs, falls $a = c$ und $b = d$ iſt, $ab = cd$ und $a^2 = c^2$, und umgekehrt, wenn $a^2 = c^2$, auch $a = c$ ſeyn muſs. Die in *Erklärung* 5 hingegen auf die Sätze, daſs $ab + ac + ad \ldots = a\,(b + c + d \ldots)$; ferner $ab - ac = a\,(b - c)$; und falls $a = b + c$ iſt, $a^2 = ab + ac$ und $ac = bc + c^2$; und daſs endlich $(a + b + c \ldots)(e + f \ldots) = ae + be + ce + af + bf + cf \ldots$ iſt. d. U.]

6.

[*Erklärung über die Verhältniſſe und Proportionen zwiſchen ausgedehnten Gröſsen, und über dem wahren Sinn eines Produkts aus Linien.*

Wir haben in den beyden letzten Aufgaben des zweyten Buchs Methoden kennen gelernt, *wie ſich jedes Verhältniſs zwiſchen zwey Linien, zwey Kreisbogen, oder zwiſchen zwey Winkeln, auf ein gleichgeltendes Zahlverhältniſs bringen läſst.* Da nun ein Verhältniſs, z. B. zwiſchen zwey Linien A, B, auf der Vorſtellung beruht, wie oft die eine A, oder ein beſtimmter Theil derſelben, in der andern B enthalten iſt *, alſo auf

* V. 1.

Vorstellung durch einen Zahlausdruck, (der nach *II A. 16 Fall 2. Umständen selbst irrational seyn kann*); so sieht man leicht *dass es jenes Zahlverhältniss ist, an dass man sich halten muss, wenn man über Verhältnisse und Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen, sich richtige Begriffe machen will.*

Darauf macht auch Le Gendre aufmerksam, als auf etwas, das zur Einsicht in den wahren Sinn der folgenden Sätze sehr wichtig ist. „Bey allen Veränderungen, sagt er, die man in diesem und dem folgenden Buche mit Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen vornimmt, muss man stets die Glieder dieser Proportionen *als Zahlen* betrachten, deren jede sich auf ihre eigenthümliche Einheit bezieht. Thut man das, so wird man bey keinem dieser Verfahren, und bey keiner Folgerung die wir daraus ziehn, anstossen."

Bey jeder richtigen Proportion A : B = C : D ist, wie bekannt, das Produkt der äussern Glieder A . D dem Produkt der innern Glieder B . C gleich. Das muss also auch der Fall seyn, wenn diese proportionalen Grössen alle vier Linien oder A und B Linien, C und D Flächen, oder andre Ausdehnungen sind, *vorausgesetzt* dass man sich beyde Verhältnisse in gleichgeltende Zahlverhältnisse verwandelt denkt. So kömmt man dann auf *Produkte aus Linien* oder auf *Produkte aus Linien in Flächen* u. d. m., doch *immer nur unter der Voraussetzung, dass die Linien, Flächen u. s. durch Zahlen ausgedrückt sind*, indem man sie auf ein bestimmtes Maass als Einheit bezieht. Ausser dieser Rücksicht hätten jene Begriffe keinen Sinn. *Das Produkt aus zwey Li-*

nien *A und D* ist also nichts anders als ein *Zahlprodukt*, und zwar das Produkt aus den Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in A und wie viel deren in B enthalten sind.

Eben so ist *das Produkt aus einer Linie A in eine Fläche B* nichts anders als das Produkt der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in A und wie viel Flächeneinheiten in B enthalten sind, u. s. f.]

Anmerkung. Die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen, sind *Buch I. Erkl. 23* beysammen gestellt, und man wird sich mittelst ihrer leicht helfen können, wenn man bey einer arithmetischen Vorstellung über die Verhältnisse in den folgenden Sätzen anstofsen sollte. Ich verweise auf sie auch hier *durch das Marginal V*, z. B. V. 4. α, worunter man einen der Sätze über die Verhältnisse zu verstehn hat, die B. I. Erkl. 23. unter 4, α aufgestellt sind. Welchen? das wird jeder leicht herausfinden. d. U.

7.

[*Die Seiten zweyer Figuren*, z. B. die Seiten AB, AD und AF, AE der beyden Rechtecke von gleichem Inhalt ABCD, AFGE, *sind verkehrt proportional*, wenn sie in einer solchen Abhängigkeit von einander stehn, dafs in eben dem Verhältnifs als die eine Seite der einen Figur gegen die eine Seite der andern gröfser ist, z. B. AB gegen AF, die zweyte Seite der ersten Figur, AD, gegen die zweyte Seite AE der andern kleiner ist, oder dafs, wenn $AB = m \cdot AF$ ist, $AD = \frac{1}{m} \cdot AE$ seyn mufs. Fig. 10.

Dann verhält sich aber allemal AB : AF = AE : AD (indem die so gestellten Verhältnisse alsdann beyde
* V. 2. gleiche Exponenten m haben *) und mithin gehören dann die Vorderglieder, so wie die Hinterglieder der beyden gleichen Verhältnisse, als Seiten zu verschiednen Figuren.

Grade so können *die beyden Abschnitte zweyer zweytheiligen Linien verkehrt proportional* seyn.

Anmerkung. Dieser Begriff ist in der Arithmetik currens und wird in der hier erklärten Bedeutung auch schon von Euklid gebraucht, wiewohl von ihm so wenig als von Le Gendre und den übrigen Geometern besonders erklärt. Eben so mangeln bey ihnen die fruchtbaren Begriffe der folgenden Erklärung, die gleichfalls aus arithmetischem Boden herstammen. d. U.]

8.

[*Zwey grade Linien sind proportional getheilt*, wenn in der einen die Theile nach demselben Verhältniss und in derselben Anzahl und Folge wie in der andern vor-
Fig. 15. handen sind. So z. B. die beyden *zweytheiligen Linien* AB, AC, in deren jeder die beyden Theile in gleichem Verhältniss unter sich und zur ganzen Linie stehn, (AD : DB : AB = AE : EC : AC); oder die beyden
Fig. 16. *dreytheiligen Linien* AB, AC, in deren jeder die drey Theile in gleichem Verhältniss unter sich und zur ganzen Linie, und zwar in beyden in derselben Folge, gedacht werden (Ab : bD : DB : AB = Ac : cE : EC : AC)

α) Ueberhaupt nennt man die ersten Theile zweyer eingetheilten Linien, und die, welche von den ersten um gleich viel Stellen abſtehn, alſo die zweyten, dritten u. ſ. f. *übereinſtimmende Theile*, und eben ſo die Gränzpunkte beyder Linien, und die welche von ihnen um gleich viel Stellen abſtehn, *übereinſtimmende Theilpunkte.* β) Dieſe liegen entweder in *gleicher* Folge, oder in *verkehrter (entgegengeſetzter) Folge* wie z. B. wenn man in der einen Linie die Theilpunkte von der Linken zur Rechten, in der andern von der Rechten zur Linken zählt. γ) Zwey grade Linien ſind alſo unſerer Erklärung zu Folge proportional getheilt, wenn die übereinſtimmenden Theile in der einen daſſelbe Verhältniſs untereinander und zur ganzen Linie, als in der andern haben. δ) Liegen die übereinſtimmenden Theile in verkehrter Folge, ſo pflegt man auch wohl zu ſagen, daſs zwey ſolche Linien *in entgegengeſetzter Folge proportional* ſind.

Anmerkung. Ein Zeichen wie dieſes $a : b : c = d : e : f$ ſagt aus, daſs je zwey der Gröſsen links vom Gleichheitszeichen unter einander daſſelbe Verhältniſs haben, als die beyden Gröſsen die rechts vom Gleichheitszeichen in denſelben Stellen ſtehn, z. B. die erſten und zweyten, die erſten und dritten und die zweyten und dritten. Die obigen eingeklammerten Zeichen charakteriſiren alſo die proportionalen Eintheilungen zweyer Linien ſehr gut. In ſo fern eine Proportion in der Gleichheit zweyer Verhältniſſe beſteht, ſind in dieſen Zeichen eine Menge Proportionen eingewickelt, von denen man die herausheben kann, die man zu der jedesmaligen Abſicht, braucht.

Da ferner die erſten Gröſsen a, d in den zweyten b, e, und eben ſo in den dritten c, f, u. ſ. beyde (dem Begriff der Gleichheit unter Verhältniſſen gemäſs) gleich oft, ganz oder Theilweiſe, enthalten ſind, und z. B. wenn $b = ma$ und $c = na$ iſt, auch $e = md$ und $f = nd$ ſeyn muſs; ſo ſtehn dann auch die erſten Glie-

der, die zweyten Glieder, u. f. untereinander in demselben Verhältnifs a : d = b : c = e : f etc; und ist das der Fall, so sind auch die Summen zweyer, dreyer oder aller übereinstimmender Glieder links vom Gleichheitszeichen und rechts von diesem
*V. 4. 7. Zeichen in demselben Verhältnifs *.

α) Dieses auf proportionale Linien angewandt, sieht man also dafs in ihnen je zwey übereinstimmende Theile in gleichem Verhältnifs stehn, und so auch die Summe je zweyer, dreyer, kurz beliebig vieler, und folglich auch die Summe aller, d. h. die ganzen Linien; ein Satz den ich der Anwendung halber gleich mit in die Erklärung proportional getheilter Linien aufgenommen habe.

β) Sind umgekehrt zwey Linien AB, AC so eingetheilt, dafs je zwey übereinstimmende Theile in demselben Verhältnifs stehn, Ab : Ac = bD : cE = DB : EC, so sind sie proportional getheilt. Denn dann verhalten sich die Vorderglieder aller dieser Verhältnisse zu einander, wie die Hinterglieder, und das macht das Wesen einer proportionalen Theilung aus. d. U.]

LEHRSATZ I.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.

Fig. 6. [Man lege beyde Parallelogramme so aufeinander, dafs ihre Grundlinien sich decken. Dann stehn beyde über der gemeinschaftlichen Grundlinie AB, und weil sie gleiche Höhe haben, fallen die Seiten DC, FE, welche der AB gegenüberstehn, in einerley Parallel-
* E. 3. linien mit der Grundlinie AB *. Und zwar liegen sie

entweder ganz auseinander, oder fallen zum Theil aufeinander, welche Fälle die Figur beyde darstellt.]

In jedem der beyden Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten gleich; AD = BC, AF = BE und DC = AB = FE; und da auch das gleich seyn muss, was übrig bleibt, wenn man die gleichen Linien DC, FE beyde von der Linie DE abzieht, so ist auch CE = DF *. Mithin sind die beyden Dreyecke ADF, BCE untereinander gleichseitig, müssen *Gr. 2. § sich also decken *, und haben gleichen Inhalt; daher * I. 11. auch ihr Unterschied vom Trapez ABED gleich seyn muss. Zieht man aber von diesem Trapez das Dreyeck ADF ab, so bleibt das Parallelogramm ABCD, und zieht man das Dreyeck BCE ab, so bleibt das Parallelogramm ABED übrig. Folglich haben diese beyden Parallelogramme, weil ihre Grundlinien und ihre Höhen gleich sind, auch gleichen Inhalt.

Folgerung 1. *Jedes Parallelogramm ABED,* Fig. 1. *hat also insbesondre gleichen Inhalt mit einem Rehteck CEFD, welches mit demselben von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe ist.*

Folgerung 2. Haben zwey Parallelogramme gleiche Höhe, aber ungleiche Grundlinie, so ist das das Grössere, welches über der grössern Grundlinie steht. Denn ein Theil desselben, ist dann dem erstern gleich.

[Anmerkung. Dieser Lehrsatz läst sich auch auf *Trapezoide* von gleicher Höhe *, deren parallele Seiten in beyden * E. 3. gleich sind, ausdehnen, und für diese grade auf dieselbe Art beweisen.]

LEHRSATZ 2.

Fig. 1. *Der Inhalt eines Dreyecks ABC, ist halb so groß als der Inhalt eines Parallelogramms, welches mit dem Dreyecke gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.*

[Man ziehe durch zwey Winkelpunkte des Dreyecks B, C Parallellinien mit den gegenüberstehenden Seiten, CE parallel mit AB, und BE parallel mit AC, so entsteht ein Parallelogramm ABEC, welches mit dem Dreyeck ABC einerley Grundlinie AB, und gleiche Höhe hat, da beyde zwischen denselben Pa-
* E. 1. rallellinien AB, CE liegen *. In diesem Parallelogramm ist BC eine Diagonale. Also sind die Drey-
* I. 34. ecke ABC, BCE gleich *, und mithin das Dreyeck ABC die Hälfte des Parallelogramm ABEC. Da aber mit diesem Parallelogramm ein jedes andere von gleicher Höhe und gleicher Grundlinie gleichen Inhalt hat, so gilt unser Satz allgemein.]

Folgerung. 1. *Der Inhalt eines Dreyecks ABC ist also ins besondre halb so groß als der Inhalt eines Rechtecks CDFE, welches mit Dreyeck gleiche Grundlinie AB und gleiche Höhe CD hat.*

[*Folgerung* 2. *Alle Dreyecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.* Denn sie sind die Hälften von Parallelogrammen, die nach Lehrs. 1. gleichen Inhalt haben müssen.

[Zusatz. *Haben umgekehrt zwey Dreyecke ABC, DBC gleiche Grundlinie und gleichen Inhalt, so haben sie* und *auch gleiche Höhe.* Denn gesetzt sie hätten ungleiche, und zwar ABC die grösſere Höhe, so nehme man in einem der Schenkel des höhern einen Punkt G, der so weit, als im andern Dreyeck die Spitze, von der Grundlinie absteht, und ziehe von demselben nach dem gegenüberstehenden Endpunkte der Grundlinie eine grade Linie GC, so entstünde dadurch ein Dreyeck GBC, welches mit dem Dreyeck DBC gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, also gleichen Inhalt, mithin auch mit dem Dreyeck DBC, wovon es doch nur ein Theil ist, gleichen Flächenraum hätte; welches ungereimt ist.

Die Spitzen aller Dreyecke von gleichem Inhalt, welche über derselben Grundlinie BC stehn, liegen folglich in einer Parallellinie mit der Grundlinie, und *eine solche Parallellinie AE ist der geometrische Ort für diese Spitzen* oder für die Aufgabe, von zwey gegebnen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich so durchschneiden, dass das Dreyeck zwischen dem Durchschnittspunkt und den beyden gegebnen Punkten, eine gegebne Grösse habe. Alle Punkte der Parallellinie, und keiner der Punkte ausser ihr, thun dieser Aufgabe genüge *. (Apollonius 1. 3.)] *I.E. 21.

LEHRSATZ 3.

Die Flächenräume zweyer Rechtecke von gleicher Höhe, verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Fig. 8. Wenn die Rechtecke ABCD, AEFD beyde die Linie AD zur Höhe haben, [folglich sich beyde zwischen zwey Parallellinien AB, DC legen lassen, deren Ab-
* E. 3. stand AD ist*,] so, behaupte ich, verhält sich der Inhalt dieser beyden Rechtecke, wie ihre Grundlinien AB, AE.

Denn gesetzt *erstens* die Grundlinien AB, AE sind *commensurabel*, so läfst sich ihr Verhältnifs in ein
*II.A.19 Fall 1. gleichgeltendes Zahlverhältnifs verwandeln *. Dieses sey z. B. das Verhältnifs 7 : 4; so mufs, wenn man AB in 7 gleiche Theile theilt, AE genau 4 solcher Theile enthalten. Errichtet man in jedem der Theilungspunkte ein Perpendikel auf der Grundlinie AB, so entstehn dadurch 7 kleine Rechtecke (rectangles partiels) die allesammt gleiche Grundlinien und gleiche
* 1. Höhe, folglich auch gleichen Inhalt * haben, und wovon 7 im Rechteck ABCD, 4 im Rechteck AEFD enthalten sind. Folglich verhalten sich diese beyden Rechtecke zu einander wie 7 zu 4, also wie die Grundlinien AB zu AE. Da sich dieselbe Schlufsfolge auf jedes andre Zahlverhältnifs übertragen läfst, so verhalten sich allgemein, wenn die Grundlinien commensurabel sind, die Flächenräume der Rechtecke von gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien, oder

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Fig. 9. Gesetzt *zweytens* die Grundlinien AB, AE sind unter einander *incommensurabel*, hätten kein gemeinsammes
*II.A.19 Fall. 2. Maafs *, so mufs demungeachtet dieselbe Proportionalität zwischen den Flächenräumen und den Grundlinien statt finden. Denn wollte man dieses läugnen,

so müsste man behaupten nicht AE, sondern irgend eine andre Linie AO, die grösser oder kleiner als AE ist, sey die richtige vierte Proportionallinie zu den drey andern Linien. Wir wollen also setzen dieses AO sey um EO *grösser* als AE, und es sey dann

ABCD : AEFD = AB : AO.

Theilt man nun die grade Linie AB in gleiche Theile, welche kleiner als EO sind *, so muss zwischen E und *II. A 5. a. 2.
O wenigstens ein Theilpunkt I fallen. Durch diesen ziehe man auf die Grundlinie senkrecht IK, so entsteht ein Rechteck AIKD, welches mit dem Rechteck ABCD gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie AI mit der Grundlinie AB commensurabel ist [indem der angenommne Theil beyde misst.] Die Flächenräume dieser beyden Rechtecke sind also, nach dem was vorhin bewiesen ist, den Grundlinien proportional, also

ABCD : AIKD = AB : AI

Diese Proportion hat mit der Vorhergehenden, gleiche Vorderglieder in beyden Verhältnissen. Also müssten die Hinterglieder proportional seyn *, oder *V. 4. 5.

AEFD : AIKD = AO : AI.

Nun aber ist AI kleiner als AO, also müsste auch das Rechteck AIKD kleiner als das Rechteck AEFD seyn; folglich AI kleiner als AE, welches der Voraussetzung widerspricht. Also kann keine Linie AO, welche *grösser* als AE ist, die richtige vierte Proportionallinie zu den drey Grössen ABCD, AEFD, AB seyn, Durch eine ähnliche Schlufsfolge beweift man dafs auch keine Linie welche *kleiner* als AE ift, die richtige vierte Proportionalgröfse fein kann.

Nothwendig mufs diefes alfo AE felbft feyn.

Wie fich demnach auch in zwey Rechtecken von gleichen Höhen die Grundlinien verhalten, immer find ihre Flächenräume ABCD, AEFD den Grundlinien AB, AE proportional.

Folgerung 1. Gleich hohe Rechtecke über incommenfurabele Grundlinien befchreiben, find folglich ebenfalls incommenfurabel, indem ihr Verhältnifs gleichfalls irrational ift *.

* II. A. 19. a.

Folgerung 2. *Zwey grade Linien AC : CB verhalten fich ftets wie das Quadrat der einen, zum Rechteck aus beyden,* alfo wie Qdrat AC: Rechteck aus AC, CB oder wie Rechteck aus AC, CB : Qdrat CB, (Eukl. X. 23 Lemma). Auch verhalten fie fich wie Rechteck AB, AC : Rechteck AB, CB (Euklid X. 33)]

[Anmerkung. Der Beweis diefes dritten Lehrfatzes ftimmt in allem mit dem Beweis des 22ften Lehrfatzes im Zweyten Buche überein. Einige Bemerkungen über diefe Beweisart findet man dort in Zufatz I.]

LEHRSATZ 4.

Fig. 10.

Die Flächenräume zweyer Rechtecke ABCD, AEGF verhalten fich zu einander wie die Producte aus der Grundlinie eines jeden in deffen Höhe, oder es ift allgemein

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF.$$

[Man lege beyde Rechtecke ſo an einander, daſs ſie einen Winkelpunkt A gemein haben, zugleich zwey ihrer Seiten AB, AE eine grade Linie bilden, und die beyden Rechtecke ſich auf entgegengeſetzten Seiten dieſer Linie befinden. Da dann AD, AF auf demſelben Punkte einer graden Linie ſenkrecht ſtehn, ſo liegen auch ſie in grader Linie.*] Verlängert man *I.1.Z.2
die Seiten CD, GE bis zu ihrem Durchſchnittspunkt H, ſo entſteht ein Rechteck AEHD, welches mit jedem der gegebnen Rechtecke zwiſchen denſelben Parallellen CH, BE und DF, HG liegt *, mit ihnen *II.A.11
alſo einerley Höhe hat *, und deſſen Flächenraum * E. 3.
ſich deshalb zu den Flächenräumen jener Rechtecke, wie die Grundlinien EA, AB und DA, AF verhalten *, * 3.
oder

$$ABCD : AEHD = AB : AE$$
$$AEHD : AEGF = AD : AF.$$

Setzt man dieſe beyden Proportionen zuſammen *, ſo *V. 4. δ.
erhält man, da aus den beyden erſten Produkten der Zahlausdruck des Rechtecks AEHD als gemeinſchaftlicher Factor hinausfällt,

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF *. \quad * E. 6.$$

[Alſo ſind die Flächenräume je zweyer Rechtecke den Produkten aus ihren Grundlinien in ihren Höhen proportional*, oder, was daſſelbe ſagt, *das Verhältniſs* * E. 6.
der Flächenräume iſt aus dem Verhältniſs der Grundlinien und aus dem Verhältniſs der Höhen beyder Rechtecke zuſammengeſetzt *.] *V. 4. δ

[F o l g e r u n g 1. *Haben die beyden Rechtecke ABCD, AEGF gleichen Inhalt*, ſo ſtehn ſie im Verhältniſs der

Gleichheit. Folglich müssen die Produkte aus den beyden Seiten, woraus sie beschrieben sind, d. h. die
* E. 6. Produkte aus den Zahlausdrücken dieser Seiten*) ebenfalls im Verhältniss der Gleichheit stehn, oder es muss AB × AD = AE × AF seyn, daher zwischen diesen Zahlausdrücken stets folgende Proportion besteht
*V. 3. γ

AB : AE = AF : AD *.

Die Seiten zweyer Rechtecke von gleichem Inhalt sind
* E. 7. *mithin stets verkehrt proportional *.*

Sind umgekehrt zweyer Rechtecke Seiten, verkehrt
* E. 7. *proportional *, so sind ihre Flächenräume gleich.* Denn verhält sich AB : AE = AF : AD, so sind die Produk-
* E. 6. te AB × AD und AE × AF gleich *, daher auch die
V. 3. β. Flächenräume beyder Rechtecke, welche dem Lehrsatz zu folge, in demselben Verhältnisse wie diese Produkte stehn, gleich seyn müssen.

Hat man also vier proportionale Linien, so ist allemal das Rechteck aus den mittlern dem Rechteck aus den äussern gleich.]

Fig. 11. [*Folgerung 2. Sind die Linien AB, CD, EF, GH, und so auch die Linien AK, CL, EM, GN, untereinander proportional, so sind auch die Rechtecke proportional, welche man aus den ersten, zweyten dritten und vierten dieser Linien beschreibt, oder*

Rechtk. AB, AK : Rechtk. CD, CL = Rechtk. EF, EM : Rechtk. GH, GN.

Denn aus der Zusammensetzung der beyden gegebnen Proportionen folgt, dass dann auch die Produkte aus den ersten, zweyten, dritten, vierten dieser proportionalen Linien *, proportional sind, oder dass sich verhält AB × AK : CD × CL = EF × EM : GH × GN *. Nun aber ist nach unserm Lehrsatz das erstere Verhältniss dieser Produkte, dem Verhältniss des Inhalts der Rechtecke, die aus den Linien in ihnen beschrieben sind, gleich, (Rechteck aus AB, AK : Rechteck aus CD, CL). Eben so ist das zweyte Verhältniss dieser Produkte dem Verhältniss der Rechtecke gleich, die aus den Linien in ihnen beschrieben sind (Rechteck aus EF, EM : Rechteck aus GH, GN). Da nun beyde Verhältnisse jener Produkte gleich sind, so sind es auch die Verhältnisse dieser Rechtecke, und *diese vier Rechtecke sind proportional.*

* E. 6.

*V. 4. δ.

Insbesondere sind also die Quadrate vier proportionaler Linien proportional, z. B. in unserm Fall (q. AK : q CL = q. EM : q. GN.) Denn sind die Seiten der vier Quadrate proportional, so sind es auch immer ihre Grundlinien und Höhen *.

* E. 4.

Die Wahrheit dieser Sätze erhellt unmittelbar auch daraus, dass unserm Lehrsatz zu Folge das Verhältniss der Flächenräume von Rechtecken aus dem Verhältniss ihrer Grundlinien und ihrer Höhen zusammengesetzt ist. Denn ist dieses, so müssen zwey Rechtecke untereinander dasselbe Verhältniss, als zwey andere haben, wenn die Grundlinien, so wie die Höhen der Erstern untereinander dasselbe Verhältniss, als die Grundlinien und die Höhen der Letztern haben.]

[Folgerung 3. *Sind umgekehrt vier Rechtecke, und zugleich deren Grundlinien, proportional, so müssen auch ihre zweyten Seiten proportional seyn;*

und stehn vier Quadrate in gleichen Verhältnissen (q . AK : q . CL = q . EM : q . GN,) so stehn darin auch ihre Seiten.

Denn da nach unserm Lehrsatz Rechtecke sich wie die Produkte aus ihren Seiten verhalten, so folgt
*V. 4. δ. durch Trennung * dieser Proportion und der, welche die Proportionalität einer Seite in den Rechtecken angiebt, die Proportionalität der zweyten Seiten. — Insbesondere folgt aus der gegebenen Proportionalität der Quadrate, die Proportionalität der Produkte AK × AK : CL × CL = EM × EM : GN × GN, und daraus die Proportionalität der Seiten AK : CL =
*V. 1. β. EM : GN *].

Zusatz I. Die hier erwiesene *Proportionalität zwischen den Flächenräumen der Rechtecke und den Produkten aus ihren Seiten*, berechtiget uns die Produkte aus der Grundlinie in die Höhe eines jeden Rechtecks zum Maass des Flächenraums der Rechtecke zu nehmen. Es versteht sich, dass hierbey von den Zahlausdrücken der Grundlinie und der Höhe, und von
* E. 6. deren Produkten die Rede ist *; d. h. von Produkten der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten die Grundlinie, und wie viel deren die Höhe enthält.

Bey diesem Maass ist dasselbe als bey dem zu bemerken, welches wir in den Zusätzen zu Lehrsatz 22 des zweyten Buchs für die Winkel aufgestellt haben. Es ist nicht absolut, sondern nur Beziehungsweise ein Maass [oder vielmehr kein unmittelbares, sondern nur ein mittelbares Maafs]. Es fetzt voraus, dafs man irgend eines andern Rechtecks Flächenraum auf dieselbe Art bestimmt, indem man die Seiten deffelben mit derfelben Lineareinheit mifst, und das Produkt dieser Zahlausdrücke nimmt. Das Verhältnifs beyder Produkte giebt dann das Verhältnifs der Flächenräume. Endhält z. B. die Grundlinie eines Rechtecks A 7, deffen Höhe 3 Lineareinheiten, fo wird der Flächenraum diefes Rechtecks durch die Zahl 7×3 oder 21 vorgeftellt, welche Zahl einzeln und für fich nichts bedeuten würde. Hat man aber ein zweytes Rechteck, deffen Grundlinie 12, und deffen Höhe 7 Lineareinheiten enthält, fo wird der Inhalt deffelben durch die Zahlen 12×7 oder 84 vorgeftellt; woraus man fchliefsen mufs, dafs die Flächenräume beyder Rechtecke A und B fich zu einander wie die beyden Zahlen 21 und 84 verhalten, diefes alfo das Vierfache von jenem ift, [da dem eben bewiefenen zu Folge die Flächenräume zweyer Rechtecke fich wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen verhalten.] Gefetzt man käme darin überein, das Rechteck A allgemein als Einheit beym Meffen der Flächenräume zu gebrauchen, [alfo die Gröfse aller Flächenräume dadurch auszudrücken, wie vielmal fie das Rechteck A, oder welchen Theil deffelben, fie enthalten] fo wäre $\frac{84}{21}$ oder 4 das abfolute [vielmehr das unmittelbare] Maafs des Rechtecks B, und das hiefse dann nichts anders, als, diefes Rechteck ift 4 folcher Flächeneinheiten gleich.

Nun ift es allgemein gebräuchlich, und in der That am einfachften, *ein Quadrat zur Flächeneinheit zu nehmen*, und zwar braucht man dazu *das Quadrat, des-*

ſen Seite die Lineareinheit iſt, z. B. den Quadratzoll, den Quadratfuſs, die Quadratruthe u. ſ. f. [Wenn dieſes einmal feſtgeſetzt iſt, ſo geht jenes mittelbare Maaſs für den Flächenraum eines Rechtecks, durch die Produkte der Grundlinie in die Höhe, in ein unmittelbares über. Die Zahl 21, welche das Maaſs des Rechtecks A angab, bezeichnet dann 21 Flächeneinheiten, d. h. 21 Quadrate, deren Seite die Lineareinheit iſt; und daſs ein Rechteck deſſen Höhe 3 und deſſen Grundlinie 7 Lineareinheiten gleich iſt, in der That 21 ſolcher Quadrate in ſich enthalten müſſe, ſpringt ſogleich aus Erkl. 5. *e*, und auch unmittelbar aus der
Fig. 12. Figur in die Augen, indem ein ſolches Rechteck ſich mittelſt Perpendikel aus den Theilungspunkten in 3 Banden, deren jede 7 kleine Quadrate faſst, zertheilen läſst. — *Jeder andre* völlig begränzte *Flächenraum* iſt dem Inhalt nach irgend einem Rechteck gleich, [indem uns nichts hindert Rechtecke von jeder möglichen Gröſse zu denken,] wird ſich alſo ebenfalls, *durch ein Produkt aus zwey Linien* meſſen laſſen, [womit es denn immer die hier entwickelte Bewandtniſs hat, indem ein ſolches Produkt zunächſt den Inhalt eines Rechtecks giebt, das mit der andern Figur gleichen Flächenraum hat.]

Fig. 10. [Zuſatz II. Sind wir berechtigt uns den Flächenraum eines jeden Rechtecks ABCD durch ein Produkt aus der Grundlinie AB in die Höhe BC vorzuſtellen; ſo ſind wir auch befugt den *Flächenraum eines Rechtecks durch dieſes Produkt*, *oder durch* $AB \times BC$ *zu bezeichnen*, indem wir die Zeichen für die Grund-

linie und die Höhe durch das Multiplicationszeichen × verbinden. Und dieses Zeichens wollen wir uns hinfüro beständig bedienen um den Inhalt eines Rechtecks, das aus den Linien AB, BC beschribeen ist, oder dessen Grundlinie AB, dessen Höhe BC ist, zu bezeichnen.

Ein solches Produktenzeichnen zweyer Linien z. B. EF × GH kann man also hinfüro nach Willkühr *entweder durch Produkt aus den beyden Linien EF, GH, oder* durch *Rechteck aus den Linien EF, GH* übersetzen. Beydes kömmt nach dem hier Erklärten auf eins hinaus. Um indess nicht gänzlich in die rechnende Geometrie überzutreten, wird es vortheilhafter seyn, wenn man sich im folgenden an die letztere Auslegung hält, und also bey einem solchen Zeichen stets an *ein Rechteck* aus den genannten Linien denkt. Hierbey fällt es sogleich in die Augen, dass *diese Bezeichnung für den Flächenraum eines Rechtecks*, (welche aus den Zeichen der Seite mittelst einer arithmetischen Beziehung abgeleitet ist), *lediglich unter der Bedingung gültig und Sinnvoll ist*, unter der es allein erlaubt war, den Flächenraum eines Rechtecks als ein *Produkt* aus seinen Seiten anzusehn; nemlich unter der Voraussetzung, dass wir ein für allemal den Flächenraum aller Rechtecke mit einem Rechtecke (als Flächeneinheit) messen, mit dessen einer Seite wir alle Grundlinien, mit dessen andrer wir alle Höhen gegebner Rechtecke vergleichen und ausmessen; und zwar haben wir dazu ein für allemal das *Quadrat* erwählt, welches über der Lineareinheit als Seite beschrieben ist. Und so ist demnach der *arithmetische*

Sinn dieses Zeichens AB × BC, als Zeichen eines Flächenraums, stets so zu erklären, wie wir es mit der Vorstellung selbst, worauf dass Zeichen fusst, im vorigen Zusatz gethan haben.

Mit dem *geometrischen Sinn* dieses Zeichens, bey dem wir ganz davon absehn, dass es eigentlich ein Produkt bedeutet, würden wir ohne die Sätze, welche die *Folgerungen* aus unserm Lehrsatze, besonders die erste, aussagen, nicht weit reichen. Diese berechtigen uns aber, grade so, wie wir aus der Proportionalität von vier Zahlen auf die Gleichheit der Produkte der innern und äussern Glieder schliessen, aus der Proportionalität von vier Linien AB : AE = AF : AD auf die Gleichheit des Flächenraums der Rechtecke aus den mittlern und aus den äussern Linien AB × AD = AE × AF zu schliessen, und umgekehrt, abgesehn von aller arithmetischen Befugniss zu diesem Schlusse. Mittelst ihrer wird daher der Geometer in den Stand gesetzt, die *arithmetische Ansicht* der Abhängigkeit zwischen Seiten und Inhalt der Rechtecke, grösstentheils zu umgehn, und die Begriffe von *Produkten aus Linien* ganz zu vermeiden. Das thut Euklid, und die ihm folgen; daher sie auch das Rechteck nicht auf die Art wie unser Verfasser, sondern durch ein den Eckbuchstaben vorgezeichnetes ▭ oder *Rect.* bezeichnen, z. B. ▭ ABBC oder *Rect.* AC. Allein da das Wesen des Verhältnisses und der Proportion am Ende doch auf Zahl, also auf arithmetische Vorstellungen beruht; so dünkt es mich auf einen kleinen Missverstand hinaus zu laufen, wenn man aus der Lehre des Verhaltens und der Proportionalität ausgedehnter Gröſsen, alles Arithmetiſche verbannen und es darin ſorgfältig vermeiden will. Höchſtens kann man es verſtecken, wodurch aber dieſe Lehre wahrlich nicht erleichtert, ſondern nur verdunkelt wird. Ueberdem müſſen wir da, wo wir durch Zuſammenſetzen linearer Proportionen oder durch Multiplicationen auf Ausdrücke wie z. B. folgende kommen AB × BC × EF × GH, doch nothwendig zum arithmetiſchen Sinn unſere Zuflucht nehmen. Ich bleibe daher bey *Le Gendres* Bezeichnung, (welche dieſer aus *Tacquets* und *Whiſtons Euklid*, oder vielmehr aus *Simpſons* Elementen, die ſich ihrer durchgängig bedienen, entlehnt zu haben ſcheint), und die eben durch den arithmetiſchen Sinn, der zugleich in ihr liegt, vorzüglich und recht charakteriſtiſch wird. Hier im Lehrgebäude der Geometrie überſetzen wir das Zeichen AB × BC durch *Rechteck* aus den Linien AB, BC, und das iſt der *geometriſche Sinn* deſſelben. Dagegen brauchen wir es nur nach ſeinem *arithmetiſchen Sinn*, als Produkt zweyer Linien AB, BC zu nehmen, um uns unmittelbar in die rechnende Geometrie zu verſetzen.]

[Zuſatz III. Produkte von gleichen Faktoren nennt der Arithmetiker *Potenzen*, und zwar nach der Anzahl der gleichen Faktoren, die wir in ihnen denken, die zweyte, dritte Potenz u. f. Das arithmetiſche Zeichen der zweyten Potenz aus einer Gröſse a iſt a^2, der dritten Potenz a^3, u. ſ. f. * α) Ganz dem Geiſte unſerer Bezeichnung gemäſs, werden wir daher den *Flächenraum eines Quadrats, welches aus der Linie*

* I. E. 22.

Fig. 4. *AB beschrieben ist*, *mit* AB^2 *bezeichnen* †). Denn als
gleichseitiges Rechteck wird es durch ein Produkt aus
*Z. 1. zwey gleichen Faktoren, AB × AB gemessen *, und
muss also durch das Zeichen der *zweyten Potenz* von
* Z. 2. AB, bezeichnet werden *; eine Bezeichnung, von der
alles gilt, was wir über die vorige bemerkt haben, und
bey der man sich also allemal den *Flächenraum* des über
der Linie AB beschriebnen Quadrats denke, welches
Euklid durch das Zeichen □ AB, andre, z. B. Tacquet, durch ABq., wie mich dünkt nicht ganz so vor-
* Z. 2. theilhaft bezeichnen *. β) Misst man ferner *die Seite AB*
mit der Lineareinheit, und verwandelt sie auf diese
Art in einen Zahlausdruck, *so enthält* □ *AB so viel über
der Lineareinheit beschriebene Quadrate* (d. i. Flächeneinheiten) *in sich*, *als die zweyte Potenz jener Zahl an-*
* Z. 1. *giebt* *. — γ) *Weiss man endlich umgekehrt den Zahlausdruck eines Quadrats*, □ *AB*, *in Beziehung auf die Flächeneinheit*, *so giebt die Quadratwurzel aus dieser Zahl
den Zahlausdruck für die Seite AB dieses Quadrats in Lineareinheiten.* Diese beyden Sätze springen auch durch
Construction, mittelst Erkl. 5. β. sogleich ins Auge.

†) *Le Gendre* fügt diesem Zeichen durchgängig noch einen Strich über die beyden Buchstabe hinzu, z. B. $\overline{AB}^2$. Allein da wir hinlänglich daran gewöhnt sind, diese Buchstaben stets als Ein Zeichen, nemlich als das Zeichen einer Linie anzusehn, folglich nicht zu fürchten haben, dass jemand ein Zeichen wie AB^2 für folgendes A, $(B)^2$ nehmen, und als solches übersetzen werde, so ist dieser den Druck erschwerende Zusatz, in den mehrsten Fällen überflüssig. Auch bedient sich Simpson durchgängig des Potenzenzeichens ohne diesen Zusatz.

Denn enthält z. B. die Linie AB 2 oder 3 Lineareinheiten in sich, so läſst sich das Quadrat aus AB (d. h. ABDC oder AB' D'C) durch Perpendikel, welche auf den Seiten in den Theilungspunkten errichtet werden, in 2 oder 3 gleiche Banden zerschneiden, deren jede im ersten Fall aus 2, im zweyten aus 3 Quadraten besteht, welche über der Lineareinheit als Seite beschrieben sind; enthält mithin im ersten Fall 4, im zweyten 9 solche Flächeneinheiten in sich. Umfaſst es umgekehrt eine solche Zahl von Flächeneinheiten, so ist dessen Seite 2 oder 3 Lineareinheiten gleich.]

Anmerkung 1. *Der Zahlausdruck eines jeden Quadrats ist also eine Quadratzahl*, nemlich die zweyte Potenz aus dem Zahlausdruck der Seite; und *der Zahlausdruck der Seite umgekehrt eine Quadratwurzel*, nemlich aus dem Zahlausdruck der Quadratfläche. *Die Flächen zweyer Quadrate verhalten sich also zu einander stets wie zwey Quadratzahlen*, nemlich wie die zweyten Potenzen aus dem Zahlausdruck der Seiten, und umgekehrt *verhalten sich die Seiten zweyer Quadrate wie zwey Quadratwurzeln* nemlich wie die Quadratwurzeln aus dem Zahlausdrücken der Flächen.

Hieraus folgt *erstens*, *die Reduction verschiedener Flächenmaaſse auf einander*. Alle unsere Flächenmaaſse sind nemlich Quadrate, verhalten sich also wie die zweyten Potenzen der Zahlausdrücke ihrer Seiten. Enthält so z. B. 1 Ruthe 16 Fuſs, 1 Fuſs 12 Zoll, 1 Zoll 10 Theile in sich; so gehn auf 1 Quadratruthe $16^2 = 256$ Quadratfuſs, auf 1 Quadratfuſs $12^2 = 144$ Quadratzoll, und auf 1 Quadratzoll $10^2 = 100$ Quadrattheile; und verhalten sich der Pariser und Rheinländische Fuſs zu einander wie $1440 : 1391$, so ist das Verhältniſs beyder Quadratfüſse wie $1440^2 : 1391^2$ d. i. ungefähr wie $207 : 193$.

Wiſſen wir *zweytens* daſs ein Quadrat z. B. 25 oder 169 Quadratzoll enthalt, ſo iſt die Seite deſſelben $\sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{169} = 13$ Zoll lang. Iſt folglich der Zahlausdruck eines Quadrats in Beziehung auf ein anderes, als Einheit, keine Quadratzahl, z. B. 15, ſo iſt der Zahlausdruck für die Seite deſſelben, in Beziehung auf die Seite des andern, eine *Irrationalzahl*, $\sqrt{15}$; beyde Seiten ſind alſo *incommenſurabel*.

Drittens wird vermöge dieſer Sätze und der analogen im zweyten Zuſatze die ganze *Theorie von commenſurablen und incommenſurablen Flächen, und deren Verhalten*, auf die Lehre von den *Irrationalzahlen* zurück geführt, (woven der eben aufgeſtellte Satz ein Beyſpiel giebt, der bey Euklid X. 6, freylich anders ausgedrückt vorkömmt,) und mithin der eigentliche Gegenſtand von Euklids zehntem Buch * aus der Geometrie in die Arithmetik verwieſen.

* II. A. 19, a.

Anmerkung 2. So wie unſere Bezeichnung für Rechtecke und Quadrate aus der Arithmetik entlehnt iſt, ſo haben ſchon die *griechiſchen Mathematiker* (geſtützt auf der Analogie des *Produkts* aus zwey Linien, und der *Fläche eines Rechtecks* welches aus dieſen beyden Linien beſchrieben iſt, ſo wie *zweyter Potenzen* und der *Flächen von Quadraten*) theils die Begriffe von Flächen, Rechtecken, Quadraten und andre verwandte, aus der Geometrie in die Arithmetik, theils umgekehrt die arithmetiſchen Begriffe des Multiplicirens auf geometriſche Conſtructionen übertragen. Nach dieſer Analogie nennen ſie z. B *in der Arithmetik* ein jedes Produkt aus zwey Zahlen eine *Flächenzahl*, die zweyte Potenz einer Zahl ein *Quadrat*, und die Diviſion einer Zahl in die andre, *Applicatio numeri ad numerum*, nach der Aehnlichkeit mit dem Verfahren in Aufg. 3. am Ende dieſes Buchs.

Umgekehrt deuten ſie (oder vielmehr die Geometer des Mittelalters) die *Conſtruction* eines Rechtecks aus zwey gegebnen Linien AB, BC ſo an: *multiplicire AB in BC*; das *Rechteck* ſelbſt

durch

durch den Ausdruck: *quod fit ex ductu alterius Lineae in alteram*, und das *Quadrat* einer Linie durch *Potestas lineae*, oder blos durch *potest*. Ausdrücke, die ohne diese Erläuterung allerdings sehr sonderbar schienen. So z. B. frägt *Clavius* nach dem Unterschiede der Quadrate zweyer Linien folgendermasen: *invenire id, quod plus potest major, quam minor*, und der Pythagoreische Lehrsatz wird oft so vorgetragen: *hypotenusa potest cathetos*; d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist dem Quadrat der beyden Katheten gleich. Selbst Euklid bezeichnet auf diese Art die Gleichheit des Quadrats einer Linie mit einem andern Rechteck, „Wenn eine Linie nach stetigem Verhältniss geschnitten ist, so *kann* das Quadrat des grösern Abschnitts das Rechteck aus dem kleinern Abschnitt und der Linie".

Anmerkung 3. Aus den Erörtrungen zu diesem Lehrs. erhellet endlich, in wie fern wir oben behaupten konnten, dass die in Erklärung 4 und 5 aufgestellten Satze, auf die Arithmetischen Satze, welche dort angeführt werden, hinaus laufen.

d. U.

LEHRSATZ 5.

Der Flächenraum eines Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe gemessen;

der Flächenraum eines Dreyecks durch das halbe Produkt aus der Grundlinie in die Höhe.

Denn ein Parallelogramm ABEC hat mit einem Rechteck CDFE, welches von gleicher Grundlinie AB und gleicher Höhe CD mit diesem Parallelogramme ist, gleichen Inhalt *, und also auch zum Maasse seines Flächenraums ebenfalls das Produkt AB × CD *. — Fig. 1.

* 1. f. 1

* 4. Z. 1.

R

Ein Dreyeck ABC ist aber nur halb so groſs als ein sol-
*2. f, 1. ches Rechteck *, hat folglich zum Maaſse seines Inhalts das Produkt $\frac{1}{2}$ CD × AB.

Folgerung. 1. *Zwey Parallelogramme* und so auch *zwey Dreyecke* von *gleicher Höhe*, *verhalten sich* folglich dem Inhalt nach, wie ihre Grundlinien; und haben sie *gleiche Grundlinien*, so verhalten sie sich wie ihre Höhen. Denn aus dem Verhältniſs der Produkte wodurch ihr Inhalt bestimmt wird, fallen die gleichen
V. 1. β. Factoren unbeschadet des Verhältnisses hinaus, daher dieses Verhältniſs im ersten Fall mit dem Verhältniſs der Grundlinien, im zweyten mit dem Verhältniſs der Höhen übereinstimmt.

Fig. 13. [*Folgerung* 2. Da das Verhältniſs zweyer Produkte aus dem Verhältniſs der Faktoren zusammengesetzt ist, so ist folglich auch] *das Verhältniſs des Inhalts zweyer Parallelogramme*, *so wie zweyer Dreyecke*, *zusammengesetzt aus dem Verhältniſs der Grundlinien und der Höhen*, z B.

$$\triangle ABC : \triangle EFG = AD \times BC : EH \times FG$$
*V. 6.
$$= (AD : EH)\ (BC : FG)\,*.$$

Folgerung 3. Sind die Glieder des erstern dieser beyden gleichen Verhältnisse untereinander gleich, so sind es auch die des zweyten, und umgekehrt. Ist aber AD × BC = EH × FG so ist allemal auch AD : EH = FG : BC. Mithin sind *in Dreyecken von gleichem Inhalt stets die Höhen und die Grundlinien verkehrt propor-*
* E. 7. *tional* *, und *sind* umgekehrt *die Höhen und Grundlinien zweyer Dreyecke verkehrt proportional*, *so haben diese Dreyecke gleichen Inhalt*.

Dasselbe gilt aus den nemlichen Gründen für die Parallelogramme. Diese Eigenschaft kömmt also den Rechtecken nicht ausschliesslich zu *.] *4. f. 1.

Anmerkung. Der Kürze halber pflegt man unsern Lehrsatz auch wohl so auszudrücken: *ein Parallelogramm ist dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe, und ein Dreyeck der Hälfte dieses Produktes gleich.* Hat man sich hierüber so wie wir im vierten Lehrsatze erklärt, so sieht man sogleich, dass hier blos von den Zahlausdrücken für den Inhalt und die Seiten die Rede ist, und dann fällt alles Anstössige in diesem Ausdruck weg. Bezeichnet man diese Zahlausdrücke mit i, g, h, so ist für das *Parallelogramm* $i = gh$ und umgekehrt $g = \frac{i}{h}$ oder $h = \frac{i}{g}$ und für das *Dreyeck* $i = \frac{1}{2} gh$, $g = \frac{2i}{h}$, $h = \frac{2i}{g}$, so dass also jede dieser drey Grössen durch den Zahlausdruck der beyden andern, nach diesen leichten Formeln bestimmt wird. Ein Parallelogramm von 280 Quadratfuss, das über einer Grundlinie von 14 Fuss steht, hält so z. B. zur Höhe 20 Fuss, und ein Dreyeck von 400 Quadratfuss, dessen Höhe 20 Fuss ist, eine Grundlinie von 40 Fuss.

d. U.

LEHRSATZ 6.

*Der Inhalt eines Trapezoid ABCD wird durch das Produkt aus der Höhe EF in die halbe Summe der parallelen Grundlinien desselben, AB, CD * gemessen.* Fig. 14. * E. 3.

Man halbire eine der nicht parallelen Seiten, z. B. BC im Punkte I, ziehe durch diesen Punkt parallel mit der gegenüberstehenden Seite AD die Linie KL, und verlängere DC, bis wo sie diese Linie trifft, In den Dreyecken IBL, ICK, ſind vermöge der Conſtruction die Seiten IB, IC und die Scheitelwinkel CIK, LIB gleich. Ueberdem ſind die Winkel ICK, IBL vermöge des Parallelismus der Seiten AB, DC gleich. Alſo decken ſich beyde Dreyecke, daher das Trapezoid ABCD mit dem Parallelogramm ADKL gleichen Inhalt, und folglich, ſo wie dieſes, das Produkt EF × AL zu ſeinem Maaſse hat. — Nun ſind aber auch die dritten Seiten CK, LB jener beyden Dreyecke gleich, mithin $DC + AB = DK + AL = 2AL$, weil in jedem Parallelogramm die gegenüberſtehenden Seiten gleich ſind. Es iſt alſo $AL = \frac{DC + AB}{2}$, und folglich hat der Flächenraum des Trapezoids ABCD zu ſeinem Maaſse das Produkt $EF \times \left(\frac{AB + DC}{2}\right)$.

Zuſatz I. Zieht man durch den Punkt I, der in der Mitte der Seite BC liegt, mit den parallelen Grundlinien des Trapezoids eine Parallellinie, IH, ſo entſtehn zwey gleichwinklige Parallelogramme AHIL, HDKI*, worin *erſtens* (weil nach dem eben bewieſenen KI = IL;) auch DH = HA iſt, alſo auch die zweyte Seite DA halbirt wird; und *zweytens* HI = AL iſt. Folglich läſst ſich *der Inhalt eines Trapezoids* auch durch das Produkt EF × HI meſſen, d. h. durch das Produkt aus der Höhe in die grade Linie zwiſchen den Punkten, welche in der Mitte der nicht parallelen Seiten liegen.

* I. 35.

[Zuſatz II. *Jede gradelinige Figur läſst ſich ſowohl in lauter Dreyecke, als auch in Dreyecke und Trape-*

zoide zerlegen, daher man mit Hülfe dieses und des vorigen Lehrsatzes *den Inhalt jeder gradelinigen Figur* ohne Schwierigkeit findet. Um die Figur in *Dreyecke* zu zerfällen, nimmt man irgend einen Punkt in ihr, oder in ihrem Umfange, und zieht von demselben nach allen Eckpunkten grade Linien, (läge der Punkt ausserhalb der Figur, so bekäme man additive und subtractive Dreyecke, welches unbequem wäre), und zwar ist es bey unregelmäſsigen Figuren am vortheilhaftesten, wenn man sie durch Diagonalen, die von einem Winkelpunkte aus nach den übrigen gezogen werden, in Dreyecke zertheilt. Jede dieser Diagonalen giebt die Grundlinie für zwey an einanderliegende Dreyecke ab. Miſst man sie und die Höhen, so findet sich der Zahlausdruck für den Inhalt jedes der Dreyecke nach Lehrsatz 5, und ihre Summe ist der Zahlausdruck für die ganze Figur. Figur und Beyspiele wird sich jeder leicht selbst hierzu bilden.

Um eine gradelinige Figur in *Trapezoide* zu zerfällen, nehme man willkührlich eine grade Linie, und zwar ist es am vortheilhaftesten, wenn man hierzu die längste Diagonale wählt. Auf diese fälle man von allen Eckpunkten der Figur Perpendikel; so bilden je zwey dieser Perpendikel, sammt der Seite der Figur und dem Abschnitt der Diagonale, die zwischen ihnen liegen, ein *Trapezoid*, worin diese parallelen Perpendikel die Grundlinie, und der Abschnitt der Diagonale, der auf beyden senkrecht steht, die Höhe abgiebt. Die äussersten Perpendikel bilden mit den Seiten der Figur und dem Abschnitt der Grundlinie rechtwinklige

Dreyecke. Diese Zerfällung und Ausrechnung gradeliniger Figuren ist in vielen Fällen, besonders beym Feldmessen, sehr bequem.

Beyde Zerfällungen, besonders die letztere, kann man selbst auf krummlinige Figuren übertragen, nimmt man nur die Höhen der Trapezoide so klein, daſs die krummlinige Seite sich ohne merklichen Fehler für gradelinig nehmen läſst, oder substituirt man statt der krummen Linie eine grade, so daſs der Inhalt dabey nicht merklich verändert wird.]

[LEHRSATZ 7.]

Fig. 15. 1. *Jede grade Linie, welche, wie DE, durch ein Dreyeck ABC mit einer Seite desselben, z. B. mit BC, parallel gezogen ist, theilt die beyden andern Seiten des Dreyecks in proportionale Theile, so daſs sich verhält AD : DB : AB = AE : EC : AC.*

2. *Sind umgekehrt zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks in den Punkten D und E proportional getheilt *, so ist die grade Linie DE, zwischen den beyden Theilpunkten, mit der dritten Seite BC des Dreyecks parallel.*

* E. 8.

Ist DE mit der Seite BC parallel, und man zieht BE, DC, so entstehn zwey Dreyecke BDE, CED, welche über gleicher Grundlinie DE, und zwischen gleichen Parallelen DE, BC stehn, und deshalb gleichen Inhalt haben *. Zugleich sind die Dreyecke BDE, EDA, EBA von gleicher Höhe, denn ihre Grundlinien liegen in einer graden Linie und ihre Spitzen fallen

* 2. §. 2.

in einem Punkte E zusammen *; und eben so sind * E. 2.
auch CDE, EDA, CDA Dreyecke von gleicher Höhe. Folglich verhalten sich die Flächenräume dieser Dreyecke wie ihre Grundlinien *, oder * 5. f. 1.

$$\triangle ADE : \triangle BDE : \triangle ABE = AD : DB : AB$$

und $\triangle ADE : \triangle DEC : \triangle ACD = AE : EC : AC$

Da nun die Dreyecke BDE, DEC, und mithin auch die Dreyecke ABE, ACD gleichen Inhalt haben, so sind die Verhältnisse links vom Gleichheitszeichen in beyden Proportionen gleich; also auch die Verhältnisse rechts vom Gleichheitszeichen *, * Gr. 1

$$AD : DB : AB = AE : EC : AC,$$

und die beyden Linien AB, AC sind folglich proportional getheilt *. * E. 8.

2. Sind umgekehrt zwey Seiten eines Dreyecks AB, AC in D und E proportional getheilt, so verhält sich vermöge der proportionalen Theilung $AD : DB = AE : EC$. * Wäre bey dieser Voraussetzung die * E. 8. a.
grade Linie DE mit der dritten Seite BC des Dreyecks *nicht parallel*, so müsste eine andere grade Linie DO, die Parallellinien mit BC durch den Punkt D seyn. Dann verhielte sich aber, vermöge des eben Bewiesenen, $AD : DB = AO : OC$, und folglich, da dann in dieser und der vorigen Proportion die erstern Verhältnisse gleich sind, wäre auch $AE : EC = AO : OC$*; * Gr. 1.
welches unmöglich ist, da $AE > AO$, hingegen $EC < OC$ ist *. Also muss DE mit BC parallel seyn. * V. 3. δ.

Zusatz I. *Auch wenn man zwey Schenkel AD, AE eines Dreyecks ADE über die Grundlinie DE oder über die* Fig. 16.

Spitze A hinaus verlängert, so werden diese Verlängerungen durch jede Parallellinie mit der dritten Seite, z. B. durch BC oder durch β γ, den Schenkeln des Dreyecks proportional geschnitten. Denn im *erstern Fall* bildet ABC ein Dreyeck, dessen Schenkel AB, AC von einer Linie DE parallel mit der Grundlinie FG geschnitten, und folglich, unserm Lehrsatz zu Folge, proportional getheilt werden. — Im *zweyten Fall* nehme man auf dem Schenkel, auf dessen Verlängerung der Punkt β liegt, Ab gleich Aβ, und auf dem zweyten Ac gleich Aγ, und ziehe bc; so decken sich die beyden Dreyecke
* I. 6. Abc und Aβγ *, folglich sind die Winkel b, β, D
* I. 25. gleich, und daher die Linien βγ, bc, DE parallel *. Mithin werden, unserm Lehrsatz zu Folge, die Schenkel AD, AE durch die Parallellinie bc proportional getheilt, so dass sich verhält Ab : AD = Ac : AE, und
*E. 8. a. also auch Aβ : AD : βD = Aγ : AE : γE *, daher auch in diesem Fall die Linien βD, γE proportional getheilt sind.

Grade auf dieselbe Art beweist man (nach 2) *dass wenn zwey Linien βD, γE sich so in einem Punkte A durchschneiden, dass dieser Punkt beyde proportional theilt, die graden Linien zwischen den übereinstimmenden Theilpunkten βγ, DE, parallel seyn müssen.*

Zusatz II. *Zwey grade Linien, zwischen welchen Parallellinien in beliebiger Zahl und Entfernung gezogen sind, werden durch diese proportional getheilt.*

Fig. 10. Denn sind *erstens* diese beyden Linien selbst *parallel*, wie AB, CD, so schneiden je zwey der Parallellinien

auf beyden gleiche Theile ab *, daher die überein- *I. 33. f.
ſtimmenden Theile beyder im Verhältniſs der Gleichheit ſtehn, und alſo beyde Linien proportional getheilt ſind *. *E. 8. a.

Treffen dagegen *zweytens* die beyden Linien in ei- Fig 17.
nem Punkte A *zuſammen*, wie z. B. BC, DE; ſo entſteht ein Dreyeck AGK, deſſen Schenkel, in ihrer Verlängerung, von Parallellinien mit der Grundlinie GK durchſchnitten, folglich, dem vorigen Zuſatz gemäſs, proportional getheilt werden, ſo daſs je zwey übereinſtimmende Theile der einen, und deren Summe, untereinander daſſelbe Verhältniſs wie in der andern haben *. * E. 8.

Sind umgekehrt zwey grade Linien proportional getheilt, ſo ſind die graden Linien durch die übereinſtimmenden Theilpunkte, insgeſammt parallel, jene beyden Linien mögen parallel ſeyn oder ſich durchſchneiden. Dieſes folgt auf dieſelbe Art aus dem zweyten Theil des vorigen Zuſatzes.

Anmerkung. Die übrigen fruchtbaren Sätze über proportionale Eintheilungen von Linien, verſpare ich bis zum folgenden Buche. Der Beweis der hier vorgetragnen ſtützt ſich unmittelbar auf dem Vorhergehenden, und iſt uns in den gleich folgenden Materien von ſo vielem Nutzen, daſs ſie hier unſtreitig an der ſchicklichſten Stelle ſtehn. Sie begründen nicht nur die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, ſondern geben uns auch ſogleich die einfachſte *Methode* an die Hand, *zu drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie zu finden*; eine Methode, welche Aufg. 4 vorträgt, und die uns zur Verwandlung der Figuren in einander unentbehrlich iſt.

d. U.]

Fig. 18. Zusatz III. *Wenn man die Seiten eines Dreyecks ABC insgesammt in zwey gleiche Theile theilt, und die halbirenden Punkte D, E, F durch grade Linien verbindet, so wird das gegebne Dreyeck dadurch in vier kleinere Dreyecke getheilt, welche insgesammt mit dem Gegebnen gleichwinklig sind, und sich einander decken.*

Denn je zwey Seiten des gegebnen Dreyecks sind halbirt, d. i. nach dem Verhältniss von 1 : 1, und mithin proportional getheilt *, daher die Linien DE, EF, FD mit den gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks ABC parallel laufen. Folglich sind die kleinen Dreyecke an den Ecken nach I. 25, und das Dreyeck DEF in der Mitte nach I. 31. Anm., mit dem gegebnen Dreyeck gleichwinklig. Dieses mittlere bildet mit jedem der Dreyecke an den Ecken, wegen des Parallelismus der gegenüberstehenden Seiten ein kleines Parallelogramm, wie AFDE, deckt sich folglich mit jedem derselben, und daher auch diese untereinander, so dass jedes der vierte Theil des ganzen Dreyecks ist.

* E. 8.

Grade Linien AD, BE, CF, welche man von den Eckpunkten des gegebnen Dreyecks nach den Punkten in der Mitte der gegenüberstehenden Seiten zieht, geben für diese kleinen Parallelogramme die zweyten Diagonalen ab, *halbiren sich also mit den Seiten des Dreyecks DEF wechselseitig* *. Verbindet man daher aufs neue ihre Durchschnittspunkte, so entstehn wiederum vier den vorigen gleichwinklige, sich deckende Dreyecke, die ein Sechzehntel des Gegebnen, und dessen Seiten ebenfalls halbirt sind, und umgekehrt die in dem kleinern Dreyeck liegenden Stücke der Li-

* I. 37.

nien AD, BE, CF, halbiren. Verbindet man immer wieder die halbirenden Punkte durch grade Linien, so geht dieses ohne Ende fort; daher AG in Beziehung auf AF als Einheit, durch eine geometrische ohne Ende fortlaufende Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \ldots$ deren Summe, wie die Arithmetik lehrt, $\frac{2}{3}$ ist, gegeben wird; ein Satz, den wir im folgenden Buche auf ganz geometrischem Wege darthun werden.

Zusatz IV. *Wenn man alle Seiten irgend eines* Fig. 19.
Vierecks ABCD halbirt, und die halbirenden Punkte je zweyer Seiten, welche an einander stoſsen, durch grade Linien verbindet, so bilden diese stets ein Parallelogramm EFGH, dessen Seiten mit den Diagonalen AC, BD des gegebnen Vierecks parallel sind. Denn jede dieser Diagonalen zertheilt das Viereck in zwey Dreyecke, wie ADC, ABC, denen die Diagonale zur Grundlinie, und zwey der halbirenden Seiten des Vierecks zu Schenkeln dienen. Diese Schenkel sind proportional getheilt, daher HG und EF beyde mit der Diagonale AC, also auch untereinander, und eben so GF, HE mit der Diagonale BD und untereinander parallel laufen. Mithin ist EFGH ein Parallelogramm von der er- * 7. (2)
wähnten Beschaffenheit.

Der Inhalt dieses Parallelogramms ist halb so groſs als der Inhalt des gegebnen Vierecks. Denn da CO und DO beyde nach demselben Verhältniſs wie DC durch die Parallelen GH und GF eingetheilt *, mithin halbirt * 7. (1)
werden, so hat jedes der vier Dreyecke, in welche das gegebne Viereck durch beyde Diagonalen getheilt wird, z. B. AOD, eine doppelt so grosse Grundlinie und Höhe

als das kleine Parallelogramm OH, mithin auch
* 5. einen doppelten Inhalt *. Die vier kleinen Parallelogramme zusammengenommen sind also halb so groſs als die vier Dreyecke, d. i. als das gegebne Viereck.

Die Quadrate der beyden Diagonalen AC, BD sind noch einmal so groſs, als die Quadrate der vier Seiten des Parallelogramms EFGH zusammengenommen. Denn jede der Diagonalen ist, nach dem eben Bewiesenen, das Doppelte der Seite des Parallelogramms, welche mit ihr parallel läuft *.
*4.Z.3.3

Endlich sind *die vier Dreyecke, worin die Diagonalen das gegebne Viereck theilen, einander proportional.* Denn je zwey dieser aneinander liegenden Dreyecke, z. B. AOD, DOC und so auch AOB, BOC, stehn über einer graden Linie, und ihre Spitzen fallen zusammen.
* E. 2. Sie haben also gleiche Höhe *, und verhalten sich folglich, jene sowohl als diese, wie ihre Grundlinien AO,
*2 f. 1. OC *, sind also Proportionalflächen.

[Lehrsatz 8.]

Fig. 20. *Zwey grade Linien FH, GI, welche man durch einen Punkt E in der Diagonale eines Parallelogramms ABCD, mit den Seiten parallel zieht, theilen*

1) *die Flächen in vier kleinere Parallelogramme, welche unter sich, und mit dem Gegebnen, gleichwinklig und proportional sind,*

und 2) *die Seiten in zwey proportionale Abschnitte.*

3) *Die parallelen Seiten der Parallelogramme um die Diagonale, GF, HI, AC, stehn in*

gleichem Verhältniſs, und die Ergänzungen dieſer Parallelogramme, EA, EC, haben gleichen Inhalt, und ſind mittlere Proportionalflächen zwiſchen jenen.

4) *Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, ſo ſind auch die beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale Rhomben oder Quadrate aus beyden Abſchnitten der gegebnen Seite, und die beyden Ergänzungen decken ſich; und zwar ſind ſie im Fall eines Quadrats Rechtecke, die aus den beyden Abſchnitten der gegebnen Seite beſchrieben ſind.*

1) Vermöge der Conſtruction ſind AB, HF, DC miteinander parallel, und ſo auch AD, GI, BC. Beym Durchſchneiden dieſer Linien entſtehn alſo lauter Parallelen zwiſchen Parallelen, folglich lauter *Parallelogramme*, die unter ſich und mit dem gegebnen *gleichwinklig* ſind.

Je zwey derſelben, welche an einander liegen, z. B. HI, EC, haben gleiche Höhe, verhalten ſich folglich wie ihre Grundlinien HE, EF *. Dieſen Linien ſind die Grundlinien der beyden andern, ebenfalls gleich hohen Parallelogramme AE, GF gleich. Mithin ſind dieſe vier Parallelogramme *Proportionalflächen*, oder es iſt p HI : p EC : p HC = p AE : p GF : p AF = p AI : p GC : p AC *. *5. f. 1. *V. 4. β.

2) Weil EH mit AB, und EI mit BC parallel iſt, werden in den Dreyecken BDA, BDC die Schenkel DA, DC beyde dem gemeinſchaftlichen Schenkel DB

* 7. 1. proportional *, folglich auch *untereinander* selbst *pro-*
* Gr. 1. *portional getheilt* *, so dass sich verhält DH : HA : DA = DI : IC : DC.

3) Jedes der *Parallelogramme um die Diagonale*, HI, GF, AC, ist aus zwey Seiten beschrieben, wel-
* 8. α. che in dieser proportionalen Theilung übereinstimmende Glieder ausmachen *, das erste aus den ersten Gliedern DH, DI, das zweyte aus den zweyten HA, IC, das dritte aus den dritten DA, DC. Folglich stehen die *parallelen Seiten* dieser Parallelogramme *in gleichem Verhältniss*. (Hingegen sind die *Ergänzungen* aus den nicht-übereinstimmenden Gliedern dieser proportional getheilten Glieder beschrieben).

Da Parallelogramme, die einerley Höhe haben, sich
*5. f. 1. wie ihre Grundlinien verhalten *, so verhält sich ver-
* (2) möge der obigen Proportionalität * p DE : p. HG = p DE : p IF, daher wegen Gleichheit der Vorderglieder auch die Hinterglieder, Parallelogramm HG und Parallelogramm IF gleich seyn müssen. *Die beyden Ergänzungen* haben also immer *gleichen Inhalt*, und es ver-
* (1) hält sich mithin * p DE : p HG = p HG : p EB oder p DE : p DG = p DG : p DB, so dass die Ergänzungen die *mittleren Proportionalflächen* zwischen den Parallelogrammen um die Diagonale sind.

4) Ist das gegebene Parallelogramm ein *Rhombus* oder ein *Quadrat*, so stehn dessen Seiten, mithin auch
* (1) die übereinstimmenden Abschnitte derselben *, im
* E. 8. Verhältniss der Gleichheit *. Folglich sind dann die
κ. β. beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale

HI, GF, auch gleichſeitig *, und überdem mit dem * (3)
Gegebnen gleichwinklig *, mithin Rhomben oder * (1)
Quadrate, und zwar jenes aus dem Abſchnitt AG, dieſes iſt aus dem Abſchnitt GB beſchrieben. — Die Seiten der Ergänzungen ſind dann gleichfalls untereinander gleich *, beyde Ergänzungen decken ſich *, und * (3) * I. 34 Z 1
im Fall des Quadrats iſt jede das Rechteck aus AG, GB.

Zuſatz I. *Auch wenn man durch mehrere Punkte der Diagonale, z. B. durch E und L,* (oder durch Punkte in der Verlängerung der Diagonale) *Parallellinien mit den Seiten des Parallelogramms AC zieht, wird das Parallelogramm in lauter gleichwinklige Parallelogramme getheilt, von denen die Ausſagen des Lehrſatze gelten.* Denn alsdann ſind die Parallelogramme HI und MN beyde auf die Art, wie es der Lehrſatz vorausſetzt, eingetheilt; folglich haben die Parallelogramme um die Diagonale, LD, EL, ED, BE, BL und BD insgeſammt proportionale Seiten, und ſind, falls das Gegebene BD ein Rhombus oder Quadrat iſt, alleſammt Rhomben oder Quadrate, über den Abſchnitten der Seite AB beſchrieben *. Die Ergänzungen LI und * (3)
LH, EN und EM, EC und EA und folglich auch NI und MH, ſind von gleichem Inhalt, und falls AC ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, decken ſie ſich, und ſind aus je zwey Abſchnitten der gegebnen Seite AB beſchrieben. Endlich ſind EN, EC, GC mittlere Proportionalflächen zwiſchen GF, und zwiſchen EL, ED, BD u. ſ. f.

Zuſatz II. *Nimmt man auf der einen Seite eines Parallelogramms AC einen Punkt G, und auf der daran*

ſtoſsenden Seite einen Punkt F, ſo daſs B und BF in dem-
* Ag. 4. *ſelben Verhältniſs als die Seiten BA und BC ſtehn *, und zieht durch G und F mit den Seiten des Parallelogramms Parallellinien GI, FH; ſo durchſchneiden ſich dieſe beyden Parallellinien in einem Punkte E, der in der Diagonale des gegebnen Parallelogramms liegt.*

Denn da durch einen Punkt F nur eine einzige Pa-
*I24.Z 2 rallellinie EF mit einer graden Linie AB *, ſo wie zu drey gegebnen Linien nur eine einzige vierte Pro-
*V. 3. α. portionallinie möglich iſt *, und nach unſerm Lehrſatz die Parallellinie EF die Seite BC ſo durchſchneidet, daſs BA : BC ſich verhält wie BG : BF; ſo muſs, wenn man umgekehrt den Punkt F dieſer Proportion gemäſs beſtimmt, und durch ihn eine Parallellinie mit der Seite AB zieht, dieſe Parallellinie durch den Punkt E gehn, worin die Parallellinie GI die Diagonale durchſchneidet. *Folglich gelten von den ſo gezognen Parallellinien alle Ausſagen unſers Lehrſatzes;* und alſo auch ins beſondere, wenn AC ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, und man BF gleich BG nimmt.

Zuſatz III. Daſſelbe iſt endlich der Fall, wenn man *zwey gleichwinklige Parallelogramme*, deren Seiten in gleichem Verhältniſs ſtehn, wie GF, HI, ſo *an einander*, oder wie GF, AC ſo *in einander* ſetzt, daſs die proportionalen Seiten in grader Linie liegen, und wenn man dann durch Verlängerung der Seiten dieſer Parallelogramme, das Parallelogramm AC ergänzt.

Anmerk.

Anmerkung. Die Sätze kommen Theilweise schon bey *Euklid* vor I. 43, VI. 24 und 26, und X. 54 Lemma. Bey Le Gendre fehlen sie, obschon sie gleich bey den folgenden Sätzen, und noch mehr für die Verwandlung der Figuren, und für die geometrische Analysis von Nutzen sind.

d. U.

LEHRSATZ 9.

Ein Quadrat aus einer zweytheiligen Linie AC Fig. 21. *ist den Quadraten über den beyden Abschnitten AB, BC, und zwey Rechtecken, welche aus den beyden Abschnitten beschrieben sind, zusammengenommen gleich; oder es ist* AC^2 *d. h.* $(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC$.

Beschreibe über AC ein Quadrat ACDE *, nimm *II.A.11 AF gleich AB, und ziehe FG mit AB, und BH mit AE parallel. Dem vorigen Lehrsatz gemäss theilen diese Parallellinien das Quadrat über AC in zwey Quadrate AI, ID, welche über den beyden Abschnitten AB, BC der Seite des gegebnen Quadrats *beschrieben * 8. (2) sind, und in zwey sich deckende Rechtecke IE, IC, deren jedes aus diesen beyden Abschnitten beschrieben ist *. Folglich ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\ AB$ * 8. (3) $\times BC$.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus, welcher die Zusammensetzung der zweyten Potenz einer zweytheiligen Zahl, aus den beyden Theilen derselben, aussagt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

[*Folgerung*. Fügt man zu den Grössen, welche der Lehrsatz als gleich angiebt, beyderseits noch das

Quadrat aus dem einen Abschnitt, z. B BC^2, hinzu, so wird, weil $2 . BC^2 + 2 . AB \times BC$ gleich ist $2 . BC \times (AB + BC)$ d. h. gleich $2 BC \times AC$ *, auch

*E. 5. α.

$$AC^2 + BC^2 = 2 . BC \times AC + AB^2$$

eine Eigenschaft, die also gleichfalls von jeder zweytheiligen Linie gilt, und deren Wahrheit auch in Fig. 20 sogleich in die Augen fällt.]

Fig. 22. [Zusatz I. *Besteht eine grade Linie AB aus mehreren Abschnitten, AR, RS, SB etc., so ist das Quadrat derselben gleichfalls den Quadraten aller einzelnen Abschnitte und den doppelten Rechtecken aus je zwey Abschnitten zusammengenommen gleich, oder* $AB^2 = AR^2 + RS^2 + SB^2 + 2\, AR \times RS + 2\, AR \times SB + 2\, RS \times SB$ (ein Ausdruck, in welchem man statt der doppelten Rechtecke auch die Rechtecke $2 AR \times RB + 2 RS \times SB$ setzen kann *). Denn auch hier sind wiederum *erstens* die Rechtecke an der Diagonale α, β, γ, Quadrate, und zwar die Quadrate aus den einzelnen Abschnitten der gegebnen Linie AB. *Zweytens* sind unter den Ergänzungsrechtecken je zwey einander gleich δ und δ, ε und ε, ζ und ζ etc., und diese Rechtecke sind überdem aus je zwey der verschiednen Abschnitte beschrieben, $\delta = AR \times RS$, $\varepsilon = AR \times SB$, $\zeta = RS \times SB$ etc. *

*E. 5. α

*8. Z. 1.

Zusatz II. Diese drey Rechtecke sind zusammengenommen gleich $AR \times RB + RS \times SB$ *, oder auch $AR \times RS + AS \times SB$, oder auch $RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, je nachdem man zwey, die einerley Höhe haben, in ein Rechteck zusammen nimmt. Daraus folgt

*E. 5. α.

1) dafs *bey jeder dreytheiligen Linie* $AR \times RB + RS \times SB = BS \times SA + SR \times RA$ *ist*, und dafs diese Eigenschaft auf ähnliche Art *für jede* in noch so viel Abschnitte *getheilte Linien gilt* (Gregor von St. Vincenz B. 1. S. 55.)

2) Dafs eben so *für jede dreytheilige Linie* $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$ *ist*. Denn fügt man zum ersten und dritten jener Ausdrücke beyderseits RS^2 hinzu, so wird $AR \times RB + RS \times SB + RS^2 = RS^2 + RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, oder, da $AR \times RB + RS \times RB$ gleich $AS \times RB$ ist, $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$; eine artige Eigenschaft *dreytheiliger Linien*, auf welcher *Euler* den Beweis eines Satzes baut, den man vor ihm noch nicht bewiesen hatte, und den man im folgenden Buche findet.

Zusatz III. Da die dreytheilige Linie AB, erstens aus den beyden Abschnitten AS, SB besteht, so ist vermoge der Folgerung zu unserm Lehrsatz $AB^2 + BS^2 = 2\,BS \times AB + AS^2$; und da zweytens auch AS aus zwey Theilen AR, RS besteht, $AS_2 + RS^2 = 2\,RS \times AS + AR^2$. Folglich ist *für jede dreytheilige Linie* auch $AB^2 + BS^2 + RS^2 = 2\,BS \times AB + 2\,RS \times AS + AR^2$.

Anmerkung. Dem ersten dieser Sätze ist der arithmetische Satz $a\,(b + c) + bc = c\,(a + b) + ab$, dem zweyten der arithmetische Satz $(a + b)\,(b + c) = b\,(a + b + c) + ac$ analog.]

LEHRSATZ 10.

Fig. 23. *Ein Quadrat aus einer Linie AC, welche der Unterschied zweyer Linien AB, BC ist, beschrieben, ist gleich den Quadraten dieser beyden Linien zusammen genommen, weniger zweymal dem Rechteck aus beyden Linien AB, BC; oder es ist AC^2 d. h.* $(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2 . AB \times BC.$

Beschreibe über AC das Quadrat ABIF, mache AE gleich AC, und ziehe CG mit AF, und HE mit IF parallel, so wird das erstere Quadrat durch diese Parallellinie, wie Lehrsatz 8 Zusatz 2 aussagt, eingetheilt. Beschreibt man folglich noch über EF, welches gleich BC ist, das Quadrat EFLK gleich BC^2, so ist; dieses sammt AI, d. i. dem Quadrat über AB, gleich AD d. i. dem Quadrat aus AC und den beyden Rechtecken CBIG, GLKD. Jedes dieser Rechtecke ist aber aus AB = LG und BC beschrieben, und folglich $AB^2 + BC^2 - 2 AB \times BC = AC^2$.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: $(a-b)^2 = a^2 - 2 ab + b^2$.

LEHRSATZ 11.

Fig. 24. *Ein Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien AB, BC beschrieben, ist dem Unterschiede der Quadrate aus beyden Linien gleich, oder* $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

Beschreibe über AB und so auch über AC ein Quadrat, verlängere AB um BK, gleich BC, und vollende das Rechteck KCDL und das Quadrat DHIG.

Die Grundlinie AK jenes Rechtecks ist der Summe, die Höhe desselben AE dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC gleich, und folglich ist jenes Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC beschrieben, oder Rechteck AKLE = (AB + BC) × (AB — BC.) Nun besteht dieses Rechteck aus den beyden Stücken ABHE und BKLH, welches letztere dem Rechteck EDGF gleich ist, da beyde aus den Linien AC, CB beschrieben sind*. Also ist AKLE = ABHE + EDGF. Diese *8. Z. 2. beyden Stücke sind aber gleich dem Quadrat über AB, weniger dem Quadrat über DH, d. h. über BC; also ist AKLE = AB^2 — BC^2, und deshalb (AB + BC) × (AB — BC) = AB^2 — BC^2.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$.

[*Folgerung* 1. α) *Ist eine grade Linie MN im* Fig. 25. *Punkte O in zwey gleiche, im Punkte P dagegen in zwey ungleiche Theile getheilt*, (MO = ON und MP > PN;) so ist MP = MO + OP, und NP = ON — OP = MO — OP und folglich stets

$$MP \times NP = MO^2 - OP^2$$

β) *Nimmt man auf der Verlängerung einer solchen Linie MN, welche in O gleich getheilt ist, einen Punkt p,* so ist Mp = Op + MO und Np = Op — MO folglich stets

$$Mp \times Np = Op^2 - MO^2.$$

In beyden Fällen ist also das Rehteck aus den beyden ungleichen Stücken MP, NP oder Mp, Np dem Unterschiede der Quadrate aus der Hälfte der Linie MN und aus dem

Abſtand der beyden Theilpunkte O, P *oder* O, *p* (welche die Linie in gleiche und ungleiche Theile zerſchneiden), *von einander gleich.* — Der Lehrſatz gehört in dieſer Form zu den fruchtbarern Sätzen der Geometrie, iſt in ihr in geometriſchen Unterſuchungen von nicht minderm Gebrauch, als der Analoge arithmetiſche in der Buchſtabenrechnung, und verdient vorzüglich gemerkt zu werden. Schon in den Zuſätzen zu dieſem Lehrſatze findet man einige intereſſante Anwendungen deſſelben.]

[*Folgerung* 2. Verbindet man mit dieſen Sätzen Lehrſatz 9 und 10, ſo geben ſie noch ein Paar ähnliche Sätze, die gleichfalls Bemerkung verdienen, obgleich ſie nicht von ſo häufigem Gebrauch als die vorigen ſind.

α) Im *erſten Fall* war nemlich $MP + NP = MN = 2. MO$. Folglich müſſen auch die Quadrate dieſer
E. 4. β. gleichen Linien gleich ſeyn, mithin $MP^2 + NP^2 +$
* 9. $2 MP \times NP$ * $= 4 . MO^2$ *. Da nun in dieſem Fall
*4. Z. 3. nach Folgerung 1. α. auch $2 MP \times NP = 2 . MO^2 - 2 . OP^2$ iſt, ſo folgt hieraus, wenn wir Gleiches von Gleichem abziehn,

$$MP^2 + NP^2 = 2 . MO^2 + 2 . OP^2.$$

Denn da die Gröſse die wir abziehn ſollen um $2 . OP^2$ kleiner als $2 . MO^2$ iſt, ſo ziehn wir, wenn wir $2 . MO^2$ wegnehmen, um $2 . OP^2$ zu viel ab, müſſen alſo zum Reſte, der bey jener Wegnahme bleibt, $2 . OP^2$ hinzufügen, um den richtigen Unterſchied zu erhalten.

β) Im *zweyten Fall* war $Mp - Np = MN = 2 . MO$. Folglich ſind auch die Quadrate dieſer Linien gleich, alſo $Mp^2 + Np^2 - 2 . Mp \times Np$ * $= 4 . MO^2$. Da * 10.
nun nach Folgerung 1. β. in dieſem Fall, $2 . Mp \times Np = 2 . Op^2 - 2 . MO^2$ iſt, ſo folgt daraus, wenn wir Gleiches zu Gleichem hinzufügen

$$Mp^2 + Np^2 = 2 . MO^2 + 2 . OP^2.$$

In beyden Fällen iſt alſo die Summe der Quadrate aus den ungleichen Stücken MP, NP oder Mp, Np gleich dem doppelten Quadrat der halben Linie MN, und des Abſtands der beyden Theilpunkte O, P oder O, p von einander. Dieſer Satz läuft auf den arithmethiſchen hinaus: $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 . a^2 + 2 . b^2$.]

[Folgerung 3. Im *zweyten Fall* der erſten Folgerung, d. h. wenn $Mp = MN + Np = 2 . MO + Np$ iſt, iſt auch $Mp^2 = 4 . MO^2 + 4 . MO \times Np + Np^2$ * * 9.
oder, da $MO + Np = Op$, und folglich $MO^2 + MO \times Np = MO \times Op$ iſt *, * 3. f. 2.

$$Mp^2 = 4 . MO \times Op + Np^2$$

ein Satz der auf den arithmethiſchen hinausläuft $(2a + b)^2 = 4 . a . (a + b) + b2$].

Anmerkung. Man ſieht leicht, daſs man ſolche Sätze nach Anleitung analoger arithmetiſcher ins Unbeſtimmte vervielfältigen kann, und das iſt vielleicht der Grund, warum *Le Gendre* und *Simpſon* die fünf Sätze, die in dieſen Folgerungen ſtehn, ganz weggelaſſen haben; doch ſehr mit Unrecht, da durch ſie manche Beweiſe ſich abkürzen, und ohne ſie die Schriften alter Geometer ſich nicht ohne Anſtoſs verſtehn laſſen. Bey *Euklid* machen ſie im zweyten Buch der Elemente fünf beſondre Lehrſätze aus, und werden ſehr umſtändlich, jeder durch beſondere

Constructionen bewiesen. Diese Beweise sind besonders für die beyden Sätze in der zweyten Folgerung, die von Euklid aus dem Pythagoreischen Lehrsatz abgeleitet werden, ermüdend weitläufig. Sollte Euklid diese langen Umwege, nach welchen blos die Beweise dieser beyden Sätze zwey enggedruckte Seiten füllen nicht blofs deshalb erwählt haben, weil die arithmetischen Vorstellungsarten, mittelst derer wir sie abgeleitet haben, den ältern Geometern noch nicht so recht geläufig waren.

Mit ähnlichen Sätzen ist fast jedes geometrische Werk, welches tiefer in die Wissenschaft hineingeht, reichlich ausgestattet. Nun ist es zwar nicht zu leugnen, dafs Sätze von dieser Art, zur gelegnen Zeit gebraucht, geometrische Untersuchungen ausserordentlich abkürzen können; allein sie sind jedesmal, besonders auf arithmetischem Wege, (durch die einfachste Buchstabenrechnung) so leicht zu finden, dafs es in der That unnütz und schädlich ist, mit ihnen die geometrischen Werke zu überfüllen. Sie haben in der geometrischen Analysis einen ähnlichen Nutzen wie die Verwandlung einer Formel in die andre in der Buchstabenrechnung, und billig nimmt man daher diese bey jener mit zu Hülfe. *Clavius*, *Gregor von St. Vincenz* und selbst *Tacquet* standen noch in der Meynung, die Regeln der Buchstabenrechnung müfsten aus diesen geometrischen Sätzen abgeleitet, und durch sie bewiesen werden; ein sonderbarer Wahn, welcher zeigt, wie sehr noch vor hundert Jahren die arithmetischen Wissenschaften in ihrer Kindheit lagen, und der vielleicht nicht wenig dazu mag beygetragen haben, die geometrischen Werke mit Sätzen über Rechtecke und Quadrate aus Linien, welche nach einer gewissen Art eingetheilt sind, so sehr zu überladen. Von solchen Sätzen führe ich hier nur noch ein Paar an, die den Sätzen in der ersten Folgerung ähnlich sind: *Sind an einer Linie CD zwey gleiche Linien AC, DB angesetzt, so ist immer* $CB^2 = AB^2 + AB \times CD$, *und nimmt man in der Linie CD irgend einen beliebigen Punkt E, so ist* $AE \times EB = DE \times EA + EC \times CA + AC^2$ (*Gregor von St. Vinc.* B. 1. S. 57. 58.)

Fig. 26

d. U.

[Zusatz I. *Unter allen Rechtecken die sich aus zwey Abschnitten einer gegebnen graden Linie MN bilden lassen, ist das Quadrat über ihre Hälfte MO das gröste, und der Inhalt wird immer kleiner, je mehr die Abschnitte MP, PN verschieden sind.* Denn denkt man sich die Linie in O gleich, und in P ungleich getheilt, so ist, nach Folgerung 1. α., $MP \times NP = MO^2 - OP^2$, und dieser subtractive Theil OP^2 wächst mit dem Unterschiede der beyden ungleichen Theile, und nimmt mit demselben ab, und fällt ganz fort, wenn beyde Abschnitte gleich sind. Fig. 25.

α) *Unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat mithin das Quadrat den grösten Inhalt.*

β) Und wenn zwey Rechtecke, welche aus Abschnitten gleicher Linien beschrieben sind, gleichen Inhalt haben, so sind auch die Abschnitte, welche ihre Seiten bilden, selbst gleich.

Zusatz II. Dagegen wird *die Summe der Quadrate aus den beyden Abschnitten MP, NP kleiner, wenn der Unterschied der beyden Abschnitte von einander abnimmt.* Denn da die Summe dieser Quadrate $MP^2 + NP^2 = MN^2 - 2 . MP \times PN$ ist *; nimmt sie ab, wenn das Rechteck aus den beyden Abschnitten MP, PN zunimmt, folglich wenn die beyden Abschnitte von einander weniger verschieden werden. (Eukl. X. 42. Lemma).] * 9.

LEHRSATZ 12.

Das Quadrat der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreyecks ABC ist gleich den Quadraten Fig. 27.

über den beyden Katheten zusammen genommen, oder $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Es sey ABC ein bey A rechtwinkliges Dreyeck, über dessen Seiten Quadrate beschrieben sind. Fälle vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse ein Perpendikel AD, welches verlängert, die gegenüberstehende Seite des Quadrats in E durchschneide; so läuft dieses Perpendikel mit den Perpen-
*I.E.19. dikeln BF, CG parallel * und theilt also das Quadrat der Hypotenuse in zwey Rechtecke DF, DG. Jedes dieser Rechtecke, behaupte ich, ist dem Quadrat über einer Kathete, mit dem es einen Eckpunkt gemein hat, gleich.

Der Winkel ABF besteht aus dem Stücke ABC und dem rechten Winkel CBF; eben so besteht der Winkel CBH aus demselben Stück ABC und dem rechten Winkel ABH. Also sind die beyden Winkel ABF, HBC gleich. Ueberdem sind die Schenkel des einen den Schenkeln des andern gleich, indem, als Seiten eines Quadrats, AB = BH und BF = BC ist. Zieht man folglich AF und CH, so entstehn zwey Dreyecke ABF, HBC, welche sich decken, und mithin gleichen
* I. 6. Inhalt haben *.

Nun ist aber der Inhalt des Dreyecks ABF halb so groſs als der des Rechtecks BE, welches mit jenem Dreyeck über gleicher Grundlinie BF steht, und zwi-
* 2. schen gleichen Parallelen BF, AE liegt *. Eben so ist der Inhalt des Dreyecks HBC halb so groſs als der des Quadrats AH, indem beyde über der Grundlinie HB stehn, und zwischen den Parallelen HB, LA liegen,

von welcher letztern AC eine bloſse Verlängerung iſt, da BAL, BAC beyde rechte Winkel, folglich LA, AC in grader Linie ſind *. Daraus daſs der Inhalt der bey- * I. 4. den Dreyecke ABF, HBC gleich iſt, folgt alſo, daſs das Rechteck BE, als das Doppelte des Dreyecks ABF, dem Quadrat AH als dem Doppelten des Dreyecks HBC, dem Inhalt nach gleich ſeyn muſs.

Grade auf dieſelbe Art läſs ſich darthun, daſs das Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Flächenraum hat, indem, wenn man AG und BI zieht, ebenfalls zwey ſich deckende Dreyecke ACG, ICB entſtehn, welche die Hälften jener Vierecke ſind.

Folglich ſind beyde Quadrate AH, AI den beyden Rechtecken BE DG zuſammengenommen, mithin dem Quadrat der Hypotenuſe gleich, oder es iſt $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

[Dieſen Satz, einen der Wichtigſten in der Geometrie, ſoll nach der allgemeinen Sage des Alterthums *Pythagoras* erfunden haben, und er wird deshalb gewöhnlich der *pythagoreiſche Lehrſatz* genannt.]

Folgerung 1. *Das Quadrat einer der Katheten iſt gleich dem Quadrat der Hypotenuſe, weniger dem Quadrat der andern Kathete* *, *z. B.* $AB^2 = BC^2 - AC^2$. Mit- *Gr. 2. β hin iſt das Quadrat einer der Katheten auch gleich einem Rechtecke, welches aus der Summe und und dem Unterſchiede der Hypotenuſe und der andern Kathete beſchrieben iſt, oder $AB^2 = (BC + AC) \times (BC - AC)$ * * 11.

[*Folgerung* 2. Unſerm Beweiſe gemäſs hat das Rechteck BE mit dem Quadrate AH, und eben ſo das

Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Inhalt.

α) *Ein Perpendikel AD, welches aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreyecks auf die Hypotenuse gefällt wird, zerschneidet diese folglich so, daſs das Rechteck aus jedem der beyden Abschnitte und der ganzen Hypotenuse, dem Quadrate derjenigen Kathete, welche an dem Abschnitte anliegt, gleich ist, oder daſs $BD \times BC = AB^2$ und $CD \times BC = AC^2$ ist.*

β) *Das rechtwinklige Dreyeck selbst* wird durch das Perpendikel AD *in zwey kleinere rechtwinklige Dreyecke ABD, ACD zerfällt*, und zwar sind diese untereinander und mit dem Ganzen *gleichwinklig*, indem die Winkel $B + BAD$ und $BAD + DAC$ beyde einem Rechten
*I 31.f.2 gleich *, mithin $B = DAC$ und $C = DAB$ sind.

γ) Von jedem dieser kleinern Dreyecke gilt also
* (f. 1.) auch das Bewiesene, und es ist $AD^2 = AB^2 - BD^2$ * =
* (α) $BD \times BC$ * $- BD^2 = BD \times (BC - BD)$ *, also AD^2
*E.5.γ. $= BD \times DC$. *Das Quadrat über dem Perpendikel ist also dem Rechteck aus den beyden Abschnitten der Hypotenuse gleich*; eine elegante und fruchtbare Eigenschaft des rechtwinkligen Dreyecks.

δ) Verbindet man hiermit den Satz, daſs die Seiten
*4 f. 1. ten gleicher Rechtecke verkehrt proportional sind *, so folgt aus γ, daſs sich stets verhält $BD : AD = AD : DC$, und eben so folgen aus α, die Proportionen $BD : AB = AB : BC$ und $CD : AC = AC : BC$. Also wird *die Hypotenuse durch das Perpendikel AD so zerschnitten, daſs 1) dieses Perpendikel selbst die mittlere Proportionallinie zwi-*

*schen den beyden Abschnitten,*2) jede der Katheten die mittlere Proportionallinie zwischen dem Abschnitt unter der Kathete und der ganzen Hypotenuse ist.* Hierauf werden wir einfache Methoden gründen, um zu zwey gegebnen Linien, oder zu einer Linie und einem Abschnitt derselben, mittlere Proportionallinien zu finden, und gegebne Rechtecke in Quadrate zu verwandeln. * V. 5.

ε) *Die Quadrate der beyden Katheten und der Hypotenuse verhalten sich zu einander, wie die beyden Abschnitte der Hypotenuse untereinander und zur ganzen Hypotenuse, oder*

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 = BD : DC : BC.$$

Denn die Rechtecke BE, DG, BG, denen jene Quadrate gleich sind, haben die Hypotenuse zur gemeinschaftlichen Höhe, verhalten sich also wie ihre Grundlinien *. — Durch Bildung eines rechtwinkligen Dreyecks wird es also möglich seyn Linien darzustellen, die sich wie zwey gegebne Quadrate verhalten, und umgekehrt.] * 3.

[Folgerung 3. α) *Das Rechteck aus den beyden Katheten hat gleichen Inhalt mit dem Rechteck aus der Hypotenuse und aus dem Perpendikel, oder* $AB \times AC = AD \times BC$. Denn diese beyden Rechtecke haben mit dem rechtwinkligen Dreyeck gleiche Grundlinien und Höhe, folglich beyde einen doppelt so grossen Inhalt als dieses Dreyeck, und mithin beyde einen gleichen Flächenraum. (Euklid. X. 34. Lemma)

β) *Der Inhalt des rechtwinkligen Dreyecks* selbst ist gleich $\frac{1}{2}$ AB × AC oder $\frac{1}{2}$ AD × BC, und *verhält sich* *zum Quadrat der Hypotenuse wie* $\frac{1}{2}$ *AD : BC;* und zum *Quadrat über einer Kathete, z.B. über AB, wie* $\frac{1}{2}$ AC : AB *oder wie* $\frac{1}{2}$ *AD : BD. Denn es ist*

$$\triangle ABC : BC^2 = \tfrac{1}{2} AD \times BC : BC^2 = \tfrac{1}{2} AD : BC \text{ und}$$

$$\triangle ABC : AB^2 = \tfrac{1}{2} AB \times AC : AB^2 = \tfrac{1}{2} AC : AB$$

$$\text{oder} = \tfrac{1}{2} AD \times BC : BD \times BC = \tfrac{1}{2} AD : BD.$$

γ) Da bey zwey gleichen Verhältnissen die Vorderglieder auch dem Doppelten der Hinterglieder pro-
*V. 4. η. portional sind *, so verhält sich

$$\triangle ABC : BC^2 + AB^2 + AC^2 = \tfrac{1}{2} AD : 2\,BC$$
$$= AD : 4\,BC.$$

(Gregor von St. Vincenz I. 23. 24.)

[*Folgerung* 4. Fällt man *im gleichschenkligen Drey-*
Fig. 28. *eck* ABC, aus der Spitze eines der gleichen Winkel an der Grundlinie, z. B. aus B, ein Perpendikel BD auf den gegenüberliegenden Schenkel, so ist *die Summe der Quadrate über alle drey Seiten des Dreyecks gleich* $CD^2 + 2\,AD^2 + 3\,BD^2$. Denn es ist $BC^2 = CD^2 + BD^2$ und $AB^2 = AC^2 = AD^2 + BD^2$, folglich $BC^2 + AB^2 + AC^2 = CD^2 + 2\,AD^2 + 3\,BD^2$. (Gregor von St. Vincenz I. 40.)

Sätze die ich mehr ihrer Nettigkeit als ihrer Brauchbarkeit halber hier mit aufnehme.]

Fig. 29. Zusatz. Ein Quadrat ABCD wird durch die Diagonale AC in zwey rechtwinklige Dreyecke getheilt, wovon jedes, wie z. B. ABC, gleichschenklig ist. Also sind die beyden Quadrate über die Katheten dieses Dreyecks einander gleich, folglich $AC^2 = 2 \cdot AB^2$. *In jedem Quadrate ist folglich das Quadrat der Diagonale doppelt so groß als das Quadrat einer der*

Seiten. — Dieses läſst ſich auch ſo beweiſen. Man ziehe durch die gegenüberſtehenden Winkelpunkte des Quadrats Parallellinien mit der zwiſchen ihnen liegenden Diagonale, ſo entſteht dadurch ein Parallelogramm EFGH, welches, da beyde Diagonalen gleich und auf einander ſenkrecht ſind *, das Quadrat der Diagonale * I. 37. iſt. Dieſes Quadrat enthält 8 rechtwinklige Dreyecke in ſich, die ſich decken, und deren 4 das Quadrat ABCD ausmachen; daher jenes Quadrat das Doppelte von dieſem iſt.

Es verhalten ſich alſo in jedem Quadrate ABCD, die über eine der Diagonalen und über eine der Seiten beſchriebnen Quadrate $AC^2 : AB^2 = 2 : 1$, folglich die Seiten dieſer beyden Quadrate, wie die Quadratwurzeln aus 2 und 1 *, oder $AC : AB = \sqrt{2} : 1$. Dieſe *4.Z 3.7 beyden Linien haben alſo *ein irrationales Zahlverhältniſs, und mithin ſind die Diagonale und die Seite eines jeden Quadrats untereinander incommenſurabel* *; ein Satz, *II. Auf. 19. a. womit Euklid ſeine Abhandlung über incommenſurable Flächen ſchlieſst (X. 117), und den wir weiterhin noch auf eine andre Art beweiſen werden.

[LEHRSATZ 13.]

In jedem ſchiefwinkligen Dreyeck iſt das Quadrat Fig. 30. *einer Seite BC, welche einem ſpitzen Winkel A gegenüber ſteht, kleiner, dagegen das Quadrat einer Seite bc, welche einem ſtumpfen Winkel a gegenüber ſteht, gröſser als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten. Und* *zwar, wenn man von einem der Endpunkte dieser Seite, z. B. aus B, auf die gegenüberstehende Seite AC, oder deren Verlängerung, ein Perpendikel fällt; so ist das doppelte Rechteck aus AC und dem Abschnitte dieser Seite, welcher am Winkelpunkte A (nicht an BC) anliegt, jenem Unterschiede gleich. Oder es ist*

1) wenn der Winkel A spitz ist,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AC \times AD$$

2) wenn dagegen der Winkel a stumpf ist,

$$bc^2 = ab^2 + ac^2 + 2\ ac \times ad$$

1. Ist A eine *spitzer* Winkel, so liegt das Perpendikel BD zwischen den beyden Schenkeln dieses Winkels, und folglich mit der Grundlinie des Dreyecks,
* I. 16. Z. 2. d. h. mit AB auf einerley Seite des Punktes A *. Ist überdem auch der Winkel C spitz, so fällt das Perpendikel BD innerhalb des Dreyecks, und es ist $CD = AC - AD$; ist dagegen der Winkel C stumpf, so fällt das Perpendikel BD über den Schenhel BC hinaus,
*I. 16. Z. 2. f. 2. ausserhalb des Dreyecks *, und es ist umgekehrt $CD = AD - AC$. In beyden Fällen ist also CD dem Unterschiede zwischen AC und AD gleich, nur dass im ersten Fall die Grundlinie AC, im zweyten AD grösser ist; und mithin ist in beyden Fällen gleichmässig
* 10. $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2\ AC \times AD$ *. Fügt man nun zu diesen gleichen Flächenräumen beyderseits BD^2 hinzu, und setzt statt der Quadrate der beyden Katheten
* 12. $BD^2 + CD^2$, das Quadrat der Hypotenuse, BC^2 *, und

und eben ſo ſtatt $BD_2 + AD_2$, AB^2, ſo erhält man

$$BC_2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC \times AD.$$

2) Iſt a ein *ſtumpfer Winkel*, ſo liegt das Perpendikel bd auſserhalb beyder Schenkel*, (zwiſchen den Schenkeln des ſpitzen Nebenwinkels) und ſteht daher nicht auf der Grundlinie ac ſelbſt, ſondern auf deren Verlängerung auf, die in Abſicht des Punktes a entgegengeſetzt liegt. In dieſem Fall iſt alſo $cd = ad + ac$, folglich $cd^2 = ad^2 + ac^2 + 2\,ac \times ad$, und wenn man beyderſeits bd_2 hinzufügt,

*I. 16. Z. 2. f. 2.

$$bc^2 = ab^2 + ac_2 + 2\,ac \times ad.$$

Folgerung 1. Der Winkel A mag alſo *ſpitz* oder *ſtumpf* ſeyn, ſo wird in beyden Fällen das Quadrat der gegenüberſtehenden Seite BC, durch die Summe der Quadrate der anliegenden Seiten AB, AC, und durch das doppelte Rechteck $2\,AC \times AD$ beſtimmt, nur daſs dieſes für ſpitze Winkel *abzuziehn*, für ſtumpfe *hinzuzufügen* iſt. Die Ausſage für beyde Fälle laſſen ſich daher bequem in folgende allgemeine zuſammen ziehn

$$BC^2 = AB^2 + AC_2 \mp 2\,AC \times AD$$

wo, wenn A ſpitz iſt, für den letzten Theil das *obere* Zeichen, wenn A hingegen *ſtumpf* iſt, das *untere* Zeichen gilt.

Iſt A ein *rechter Winkel*, ſo muſs dieſer Theil fortfallen, damit wir die Ausſage des *Pythagoreiſchen Lehrſatzes* erhalten. In der That fällt dann das Perpendikel BD mit der Kathete BA zuſammen, daher dann kein

Abschnitt AD, mithin auch kein Rechteck AC × AD vorhanden ist.

Grade so liegt der Abschnitt AD, so lange der Winkel A spitz ist, mit der Grundlinie AC auf einerley Seite des Punktes A, hingegen wenn a stumpf ist, auf der entgegengesetzten Seite, hat also in diesem zweyten Fall eine entgegengesetzte Lage als im erstern, und von diesem Entgegengesetzten in der Lage des Abschnitts rührt es her, dass das Rechteck 2 AC × AD in beyden Fällen auf entgegengesetzte Art vorkömmt, in jenem wegzunehmen, in diesem hinzuzufügen ist.

Anmerkung 1. Dieses Entgegengesetzte in Absicht der Lage, (es sey nun zweyer Linien, oder zweyer Winkel, u. s. f.) in Fällen, die sich sonst ganz gleich sind, pflegt man *in der rechnenden Geometrie* durch die Benennungen *positiv* und *negativ* zu charakterisiren, indem man die Linien, Winkel u. s. f., welche dieselbe Lage als in dem Fall haben, von dem man ausgeht, *positive Linien*, *Winkel* u. s. f. nennt; diejenigen hingegen, die auf entgegengesetzte Art liegen, *negative Linien*, *Winkel* u. s. f. In so fern man sich dann bloss an den arithmetischen Sinn der geometrischen Sätze und Formeln hält, und es lediglich mit Zahlausdrücken für ausgedehnte Grösen zu thun hat, kann man das, was durch dieses Entgegengesetzte in der Lage, in den Sätzen und Formeln abgeändert wird, nach den Regeln der Rechnung mit entgegengesetzten Zahlgrösen, wie sie die Arithmetik entwickelt, beurtheilen, wobey uns die Aussage für einen einzigen Fall genügt, hier z. B. für den Fall eines spitzen Winkels, für den $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AD$ ist. Denn mittelst des Begriffs *negativer Grösen*, und den darauf gebauten Rechnungsregeln, liegt in dieser Formel zugleich die Aussage für den Fall eines stumpfen Winkels, für welchen AD auf eine entgegengesetzte Art als für den spitzen Winkel liegt, folglich einen *nega-*

tiven Zahlwerth erhält, daher alsdann das subtractive Produkt 2 AB × AD den Regeln der Rechnung gemäss, in ein Additives übergeht. Allein *dieses Zusammenfassen mehrerer Fälle, die in allem, bis auf das Entgegengesetzte in der Lage gewisser Linien, Winkel u. s. f. übereinstimmen, in einen Einzigen*, gehört eigentlich nicht hierher, sondern *in die rechnende Geometrie*, welche eben dadurch so manche geometrische Untersuchung, die auf dem ostensiven Wege, durch die Menge solcher Fälle sehr weitläufig und langwierig wird, ausserordentlich abkürzt und erleichtert. Auf dem ostensiven, eigentlich geometrischen Wege, muss man diese Fälle *einzeln* betrachten, und für jeden die Aussage *einzeln* aufstellen und darthun, weil, wie gesagt, der Kunstgriff, alle Aussagen in Eine durch den Begriff des Negativen zusammenzufassen, und aus ihr zu entwickeln, auf arithmetischen Gründen beruht, und der rechnenden Geometrie ausschliesslich eigen ist.

Daraus folgt aber nicht, dass man im System der Geometrie aus solchen einzelnen Fällen auch *einzelne Sätze* machen müsse. Dadurch würde die Uebersicht und das Behalten viel zu sehr erschwert. Vielmehr muss man sie, wenn ich nicht irre, auch hier als blosse Modificationen eines und desselben Hauptsatzes unter einer allgemeinen Aussage zusammenstellen, die blos, je nachdem gewisse Linien, Winkel u. s. f. eine entgegengesetzte Lage haben, nüancirt wird. *Euklid, Le Gendre* und fast alle andern Geometer pflegen sie zwar durchgängig als einzelne Sätze aufzuführen, und machen so z. B. aus den beyden Fällen dieses Lehrsatzes, zwey verschiedne Sätze. Weil aber dadurch die Uebersicht der Wissenschaft in der That nicht wenig gestörht und erschwert wird, so glaube ich dieses für einen Fehler gegen die Methode halten zu müssen, den ich zu vermeiden durchgängig Bedacht gewesen bin. Diese Zusammenstellung gewährt überdem noch den Nutzen, dass sie von selbst darauf führt, genau nachzusehn, worin sich jedesmal die verschiednen Fälle unterscheiden, und wie sie sich mittelst des Begriffs des Negativen unter eine Aussage zusammenziehn, und aus ihr entwickeln lassen; Uebungen, die ich dem Anfänger recht sehr empfehle, und durch die er sich in dem rechten Sinne und dem Gebrauch dieses für die Analysis und ihre Anwendungen so wichtigen Begriffs festsetzen wird. Und zwar versuche er das sogleich an Lehrsatz 10 und bey den Folgerungen zu Lehrsatz 11, so wie bey den folgenden Lehrsätzen, bey denen ich hierauf nicht wieder zurückkommen werde.

Was unsern Lehrsatz betrifft, so umfasst er, wie wir gesehn haben, zugleich den *Pythagoreischen Lehrsatz*, als einen von drey *Hauptfällen*, und dehnt ihn mit gehörigen Modificationen auf alle Arten von Dreyecken aus. Und zwar beruhen diese drey Fälle unmittelbar auf der Beschaffenheit und Lage des Abschnitts AD, welcher den Abstand des Perpendikels BD vom Winkelpunkte A bestimmt, und folglich mittelbar auf der Beschaffenheit des Winkels A. Je nachdem dieser Winkel A *spitz*, *stumpf* oder *recht* ist, fällt das Perpendikel BD und zugleich der Abschnitt AD, entweder auf *die* Seite des Punktes A, auf welcher die Grundlinie AC des Dreyecks liegt, oder auf die entgegengesetzte Seite, oder in den Punkt A selbst hinein. Und das macht die Verschiedenheit der drey Fälle aus, und begründet die Verschiedenheit in der Aussage des Satzes. Dass indess selbst dieser so verallgemeinerte Satz sich wiederum nur als einen *besondern Fall* eines noch allgemeinern Satzes über das Dreyeck ansehn lasse; davon wird uns Lehrsatz 15 überzeugen.

Fig. 31. *Folgerung* 2. Fällt man aus beyden Endpunkten der Seite BC auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks ABC, oder auf deren Verlängerungen, Perpendikel BD, CE; so ist, unserm Lehrsatz zu Folge, sowohl $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$ als auch $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AB \times AE$; wo in beyden Fäl-

len das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A ſpitz oder ſtumpf iſt. Mithin muſs in jedem Dreyeck, der Winkel A ſey ſpitz oder ſtumpf, $AC \times AD = AB \times AE$ ſeyn, und folglich auch $AC : AB = AE : AD$ *. *4. f. 1.

Zieht man durch den Durchſchnittspunkt der beyden Perpendikel BD, CE die grade Linie AF, ſo ſteht auch dieſe auf der gegenüberſtehenden Seite BC ſenkrecht *; daher gleichfalls $BC \times BF = BA \times BE$ und $CA \times CD = CB \times CF$ iſt, und ſich auch verhält $BC : BA = BE : BF$ und $CA : CB = CF : CD$. * II. 25. Z. 2.

Perpendikel aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberſtehenden Seiten gefällt, durchſchneiden dieſe folglich ſo, daſs je zwey Rechtecke, welche aus einer Seite und demjenigen Abſchnitt derſelben, der an beyder Seiten Durchſchnittspunkt anliegt, ſtets gleich ſind; oder daſs *je zweyer Seiten Abſchnitte, die an demſelben Winkelpunkte liegen, ſich verkehrt wie die Seiten verhalten* *. * E. 7.

Folgerung 3. Für einen ſpitzen Winkel A iſt *das Rechteck* $2\,AC \times AD = AB^2 + AC^2 - BC^2$; für einen ſtumpfen Winkel a hingegen $2\,ac \times ad = bc^2 - ab^2 - ac^2$. Für beyde wird alſo dieſes Rechteck durch die Quadrate der Seiten auf gleiche Art gegeben, nur daſs im erſtern BC^2 kleiner, im zweyten bc^2 gröſser iſt, als die Quadrate der beyden andern Schenkel zuſammengenommen.

Jeder der einzelnen Abschnitte, z. B. AD, wird mithin *durch die drey Seiten des Dreyecks* folgendermaſsen beſtimmt, $AD = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\ AC}$ und

$ad = \frac{bc^2 - ab^2 - ac^2}{2\ ac}$; Ausdrücke, welche, je nachdem man den geometriſchen oder den arithmetiſchen

*4. Z. 2. Sinn der Zeichen nimmt *, verſchieden zu überſetzen ſind. Dem *geometriſchen Sinn gemäſs* verlangen ſie, daſs man erſtens ein Quadrat, welches den Quadraten von AB, AC zuſammengenommen gleich, und zweytens ein Quadrat welches dem Unterſchiede zwiſchen dieſem und dem Quadrat von BC gleich ſey, bilde, und dieſes dritte Quadrat in ein Rechteck, das 2 AC zur Grundlinie hat, verwandle, (wozu man die Methoden unter den Aufgaben am Ende dieſes Buches findet) um den Abſchnitt AD, als die Höhe dieſes Rechtecks zu finden. Nach dem *arithmetiſchen Sinn* genommen, erhält man, wenn man die Zahlwerthe der Seiten auf die Art, wie die Formel es ausſagt, zuſammen nimmt, den Zahlausdruck des Abſchnitts AD, der für die Trigonometrie, wenn man aus den Zahlausdrücken der drey Seiten des Dreyecks den des Winkels A ſucht, und für Lehrſ. 20. von Wichtigkeit iſt.

Aus AD und BC findet ſich endlich geometriſch

*12. f. 1. ſowohl als arithmetiſch *das Perpendikel* AD *, und aus dem Zahlwerth deſſelben der *Inhalt des Dreyecks*

* 5. ABC *, der alſo auf dieſe Art aus dem Zahlwerth der drey Seiten gefunden iſt. Indeſs werden wir im folgenden Buche dazu einen bequemern Weg finden.

Folgerung 4. Endlich werden *die an dem Winkel A anliegenden Seiten des Dreyecks ABC durch folgende Ausdrücke gegeben. Erstens* die Seite AB, auf welcher das Perpendikel *nicht* steht, durch $AB^2 = BC^2 - AC^2 \pm 2\,AC \times AD$. *Zweytens* die Seite AC, auf die das Perpendikel gefällt ist, durch $AC^2 \mp 2\,AC \times AD = BC^2 - AB^2$, (folglich der Zahlausdruck derselben durch eine unreine quadratische Gleichung,) wo wiederum das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A spitz oder stumpf ist.

Aus der zweyten Formel folgt, dass
$AC \times (AC \mp 2\,AD) = BC^2 - AB^2$ ist *. Theilt man * E. 5.
daher die Grundlinie des Dreyecks, AC, im Punkte O in zwey gleiche Theile, da denn $AC \times (AC \mp 2\,AD)$ gleich $AC \times (2\,AO \mp 2\,AD)$ gleich $2\,AC \times OD$ wird, und zwar sowohl für spitze als für stumpfe Winkel; so ist $2\,AC \times OD = BC^2 - AB^2$; ein sehr brauchbarer Satz, den wir weiter unten nochmals als besondern Lehrsatz aufstellen, und noch auf andre Art herleiten werden *. * 17.

Folgerung 5. *Ist das Dreyeck ABC gleichschenklig, A die Spitze, BC die Grundlinie*, und AF das Perpendikel auf die Grundlinie, so wie BD das Perpendikel auf den Schenkel AC (folglich AB = AE, $BF = \frac{1}{2} BC$ * und die Winkel an der Grundlinie B, C nothwendig spitz *) so ist, dem hier Bewiesenen gemäss Fig. 28. * I.12.Z. * I. 31.

$$\alpha)\; BC^2 = 2\,AC^2 \mp 2\,AC \times AD\,* = 2\,AC \times (AC \mp AD)\,* \quad \text{* (f. 1.)}$$
$$= 2\,AC \times CD\,* \quad \text{* E. 5.}$$

A sey spitz oder stumpf, da im erstern Fall das obere, im zweyten das untere Zeichen gilt. Und das ist aller-

* f. 2. dings richtig, da $CA \times CD = CB \times CF$ * und $CF = \frac{1}{2} CB$ iſt.

* f. 3. β) $AD = \dfrac{2\,AC^2 - BC^2}{2\,AC}$ und $ad = \dfrac{bc^2 - 2\,.\,ac^2}{2\,.\,ac}$ *

Anmerkung 2. *Folgenden eleganten Beweis,* welcher *beyde Fälle unſers Lehrſatzes*, ganz nach der Art, wie wir den Pythagoreiſchen Lehrſatz bewieſen haben, und zwar unabhängig von dieſem, darthut, halte ich der Mühe werth hierher aus *Gregor von St. Vincenz* (l. 44. u. 45) zu übertragen, obgleich er ſich auf einen Satz über die Sehnen ſtützt, den wir erſt weiterhin be-
* 22. weiſen werden *, indem dieſer Hülfsſatz ſich auch leicht unmit-
Fig. 32. telbar aus Lehrſatz 7 ableiten läſst. Unſre Figur ſtellt zwar nur den Fall des ſtumpfen Winkels dar, reicht aber hin ſich daran auch den Fall des ſpitzen Winkels zu denken, der nur wenig verſchieden iſt, und für den jeder ſich leicht ſelbſt eine Zeichnung entwerfen wird.

Man beſchreibe über die drey Seiten des gegebnen Dreyecks ABC Quadrate AH, AI, BG, und über die Grundlinie BC, als Durchmeſſer, einen Halbkreis. Je nachdem nun der Winkel A *recht*, *ſpitz*, oder *ſtumpf* iſt, fällt der Winkelpunkt A *auf* die Kreislinie, oder
*II 25.f. *auſserhalb*, oder *innerhalb* des Kreiſes *. In den bey-
1. u. 26. den letztern Fällen wird alſo die Kreislinie entweder von den Schenkeln, oder von deren Verlängerung, in den Punkten P, Q durchſchnitten, und zieht man durch dieſe Durchſchnittspunkte die graden Linien CPM, BQN, ſo ſind P, Q als Winkel im Halbkreiſe,
*II 23 Z 2 Rechte *, folglich BPMH und CQNI Rechtecke, ſo wie auch APML, AQNK; und zwar ſind dieſe letztern Rechtecke, jenes aus den Linien AP, AB, dieſes aus AQ, AC beſchrieben, alſo (da BP, CQ Sehnen ſind,

die sich in einem Punkte A durchschneiden,) vermöge der Natur des Kreises gleich *. Theilt man nun, wie beym Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes, das Quadrat über der Grundlinie BC durch das Perpendikel AE in zwey Rechtecke, und zieht AG, BI; so entstehn zwey Dreyecke AGC, BIC, welche, jenes mit dem Rechteck DG, dieses mit dem Rechteck CN über gleicher Grundlinie und zwischen gleichen Parallelen stehn, folglich halb so groß als diese Rechtecke sind *. Beyde Dreyecke decken sich aber, sind also gleich, und folglich haben auch die Rechtecke DG und CN gleichen Inhalt. Grade so thut man dar, daß auch die Rechtecke DF und BM gleichen Inhalt haben. Folglich ist BC^2 = Rechtk. CN + Rechtk. BM oder $BC^2 = AC^2 \mp AC \times AQ + AB^2 \mp AB \times AP$; und da die beyden Rechtecke gleich sind,

* 22.

*2. f. 1.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2\, AC \times AQ$$

wo das untere Zeichen gilt, wenn A stumpf, das obere wenn A spitz ist, und wo man statt des letztern Rechtecks auch das Rechteck $\mp 2 . AB \times AP$ setzen kann. d. U.

[LEHRSATZ 14.]

Ein Dreyeck ABC ist bey A rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem das Quadrat der Seite BC, welche diesem Winkel gegenübersteht, den Quadraten der beyden Seiten AB, AC, welche den Winkel A einschliessen, zusammengenommen gleich ist, oder kleiner, oder grösser ist, als diese beyden Quadrate. Fig. 30.

Denn gesetzt es ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$, und doch wäre A kein rechter, sondern ein spitzer oder ein stumpfer Winkel, so müsste zugleich auch $BC^2 =$
* 13. $AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$ seyn *, welches der Voraussetzung widerspricht.

Eben so müssen, wenn $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$ ist, und der Winkel A wäre nicht im Fall des *obern* Zeichens *spitz*, sondern recht oder stumpf, und nicht im Fall des *untern* Zeichens *stumpf*, sondern recht oder spitz, vermöge der beyden vorigen Lehrsätze zugleich $BC^2 = AB^2 + AC^2$ oder $BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm 2\,AC \times AD$ seyn, welches ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Aehnliche *Kriterien* um aus der Größe der drey Seiten eines Dreyecks ABC, und eines der Stücke, welche durch die Perpendikel aus den Spitzen auf den gegenüberstehenden Seiten abgeschnitten werden, *zu beurtheilen, ob ein bestimmter Winkel A des Dreyecks, recht, spitz oder stumpf ist*, geben die Formeln in Lehrsatz 13 Folgerung 3 und 4 an die Hand, so wie Folgerung 5 Merkmale, wonach sich aus der Größe der Seiten beurtheilen läßt, ob ein Dreyeck *gleichschenklig* ist, oder nicht.

[Lehrsatz 15.]

Fig. 33. *Wenn man über zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC zwey Parallelogramme ABDE, ACFG, unter beliebigen Winkeln, und von beliebiger Größe und Lage beschreibt, die Seiten derselben, welche den*

Seiten des Dreyecks gegenüberstehn, bis zu ihrem Durchschnittspunkte H verlängert, und durch diesen und die Spitze des Dreyecks die grade Linie HAK zieht:

so ist, wenn diese Linien die Grundlinie BC selbst schneidet, die Summe; wenn sie hingegen die Verlängerung der Grundlinie schneidet, der Unterschied der beyden Parallelogramme über AB und AC, einem Parallelogramme BCML gleich, welches über die dritte Seite BC des Dreyecks so beschrieben wird, dass dessen zweyte Seite der Linie HA gleich und parallel ist.

Zieht man durch die Endpunkte der Grundlinie BC, parallel mit KH, zwey grade Linien, welche die Linien DE, FG, in den Punkten L und M, durchschneiden, so sind die Vierecke ABLH, ACMH, Parallelogramme, da sie der Construction gemäss, durch Parallelen zwischen Parallelen gebildet werden*. Und* zwar stehn diese Parallelogramme mit denen, welche über die Seiten AB, AC beschrieben sind, auf gleicher Grundlinie und zwischen gleichen Parallelen, haben also mit ihnen gleichen Inhalt *.

* I. 34.

* I.

In ihnen sind die gegenüberstehenden Seiten BL, AH, und CM, AH, mithin auch BL und CM, gleich. Da diese Linien überdem der Construction gemäss parallel laufen, so ist CBLM ein Parallelogramm *, und zwar ein Parallelogramm, welches aus den Linien BC und AH, letzterer in paralleler Lage mit KH, beschrieben ist.

* I. 36.

Ueberdem bildet die Linie HK mit den Seiten dieses Parallelogramms, oder deren Verlängerungen, ebenfalls zwey Parallelogramme LK, KM, welche mit den Parallelogrammen BLHA, CMHA, über gleichen Grundlinien BL, CM, und zwischen gleichen Parallelen stehn, folglich gleichen Inhalt haben *.

* 1.

Diese letztern hatten aber mit den Parallelogrammen ABDE und ACFG gleichen Inhalt. Also ist das Prlgr. ABDE = Prlgr. LK und Prlgr ACFG = Prlgr. MK.

Durchschneidet nun die Linie AK die Grundlinie des Dreyecks BC selbst, so ist das Parallelogramm über BC die Summe der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG + Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;
und dann ist dieses letztere Parallelogramm unter Winkeln LBC = B + BAK und MCB = C + CAK beschrieben.

Durchschneidet dagegen die Linie AH die Verlängerung der Grundlinie in einem Punkte K, so ist das Parallelogramm über BC der Unterschied der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG — Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;
und dann sind die Winkel, worunter das letztere Parallelogramm beschrieben ist, LBC = B — BAK und MCB = C — CAK.

Zusatz. Im Fall die beyden Parallelogramme, welche man über die Seiten AB, AC des Dreyecks, ABC beschreibt, *Quadrate* sind, geht die Aussage dieses Satzes, für rechtwinklige Dreyecke in den *Pythagoreischen Lehrsatz* *, und für schiefwinklige in die allgemeinere Aussage *des 13ten Lehrsatzes* über. In diesem Fall ist nemlich das dritte Parallelogramm über BC, welches jenen beyden gleich ist, beym rechtwinkligen Dreyeck auch ein Quadrat, bey schiefwinkligen hingegen ein Parallelogramm, das um zwey Rechtecke, wie sie Lehrsatz 13 angiebt, grösser oder kleiner als das Quadrat über BC ist. Dieses läſst sich leicht mittelst folgendes *Lemmas* zeigen. * I. 12.

Hülfssatz. Beschreibt man über eine der Katheten eines bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC, z. B. über AC, ein Quadrat, verlängert die Seite desselben, welche der Kathete gegenübersteht, und zieht durch die Spitzen des rechten Winkels und des Winkels C, senkrecht auf der Hypotenuse, bis an jene Seite oder deren Verlängerung, die graden Linien KAH und CM; so sind AH und CM beyde der Hypotenuse des gegebnen rechtwinkligen Dreyecks gleich. Fig. 34.

Denn vermöge dieser Construction sind erstens CMAH Parallelen zwischen Parallelen, also CM = AH*. * I. 34.
Zweytens sind BAC und F rechte Winkel; eben so BCM und ACF, weshalb der Unterschied derselben vom Winkel ACM, d. h. die Winkel BCA und MCF gleich seyn müssen. Endlich sind, als Seiten eines Quadrats, AC und CF gleich. Folglich decken sich die beyden Dreyecke ABC, FMC *, und es ist allemal * I. 7.
FM = AB und CM = BC, oder AH und CM sind der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreyecks gleich.

Folgerung 1. Werden folglich in einem *rechtwinkligen Dreyeck* über *beyde* Katheten Quadrate AF, AD beschrieben, und auf den Endpunkten der Hypotenuse Perpendikel BL, CM errichtet, welche die den Katheten gegenüberstehenden Seiten der Quadrate, oder deren Verlängerungen, in L und M durchschneiden, so sind diese Perpendikel beyde der Hypotenuse BC gleich, und folglich ist BCML ein über der Hypotenuse beschriebnes Quadrat. Ueberdem durchschneidet das Perpendikel KA jede dieser beyden Verlängerungen in einem Punkte H so, dass für die eine AH gleich CM, für die andre AH gleich BL, mithin für beyde gleich ist, folglich in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte beyder Verlängerungen. Da nun
* 15. überdem AH mit BL und CM parallel läuft, so ist * *das Quadrat über der Hypotenuse BC, den Quadraten über den beyden Katheten zusammengenommen gleich*, wie dieses der Pythagoreische Lehrsatz aussagt.

Fig. 35. *Folgerung* 2. Werden in einem *schiefwinkligen Dreyeck* ABD, über zwey Seiten AB, AC Quadrate AD, AF beschrieben, und man fällt aus den Endpunkten der dritten Seite BC auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel CP, BQ, und beschreibt über die Seiten BP, CQ Quadrate, BPed, und CQgf, so gilt auch für diese Quadrate unser Lehnsatz, indem vermöge dieser Construction BCP und BCQ rechtwinklige Dreyecke sind, welche BC gemeinschaftlich zur Hypotenuse haben. Errichtet man folglich auf B und C die Perpendikel Bl Cm, welche bis an die Seiten dieser letztern Quadrate,

oder ihre Verlängerungen reichen, so ist jedes dieser Perpendikel der Hypotenuse BC gleich, also auch in diesem Fall BCml das Quadrat über der dritten Seite BC. Zugleich muss auch in diesem Fall das Perpendikel KA sich mit den Seiten, welche den beyden Katheten gegenüber stehn, in demselben Punkte h schneiden, weil dieses Perpendikel, sowohl mit AB, Bl, lh, als auch mit AC, Cm, mh, Parallelen zwischen Parallelen bildet, folglich für beyde Seiten gleiche Länge Bl = Cm hat. Mithin ist nach Lehrsatz 15 BCq = Rechtk. Ad + Rechtk. Af. Nun aber ist Rechtk. Ad = $AB^2 \mp AB \times AP$ * und Rechtk. Af = $AC^2 \mp AC \times AQ$, wo das *8.Z.2. untere Zeichen gilt, wenn A (wie in unsrer Figur) stumpf, das obere wenn A spitz ist, (für welchen Fall man sich die Figur leicht selbst zeichnen wird). Ueberdem sind BQPC Punkte in einem Halbkreise *, und *23.Z.2. folglich $AB \times AP = AC \times AQ$ der Natur der Sehnen gemäss *. Mithin ist $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AB \times AP$, * 22. *wie dieses Lehrsatz 13 aussagt.*

Anmerkung. Der intressante Lehrsatz, von dem, wie wir sehn, die Sätze von den Quadraten, welche über Seiten eines Dreyecks beschrieben sind, nur einen besondern Fall aussagen, kömmt im Wesentlichen schon bey *Pappus*, an der Spitze des vierten Buchs seiner mathematischen Sammlungen vor (Collectiones mathematicae lib. 4. pr. 1.) und wird vom ältern *Castillon* in den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften (Propositions de Géométrie et de Trigonométrie élémentaire, démontrées d'une maniere nouvelle. Mém. de Berlin An. 1766. p. 354.) auf eine ähnliche Art wie hier behandelt.

d. U.

[LEHRSATZ 16.]

Fig. 36. 1. *Ein Perpendikel, welches aus einem der Eckpunkte eines Dreyecks, z. B. aus A, auf die gegenüberstehende Seite BC, oder deren Verlängerung gefällt wird, schneidet diese so, daſs der Unterschied der Quadrate aus beyden Abschnitten BD, DC, dem Unterschiede der Quadrate aus den beyden andern Seiten des Dreyecks, AB, AC, gleich ist* ($BD^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$;) *und zwar liegt stets der gröſsere Abschnitt BD an dem gröſsern beyder Schenkel AB an.*

2. *Und theilt man die Grundlinie BC im Punkte O in zwey gleiche Theile, so ist der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB, AC gleich dem doppelten Rechteck aus der Grundlinie und aus dem Abstande des Perpendikels AD von der Mitte der Grundlinie; oder* $AB^2 - AC^2 = 2 \cdot BC \times DO$.

1. Da nach dem Pythagoreischen Lehrsatze $AB^2 = AD^2 + BD^2$ und $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ist, so muſs auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ seyn, wie dieses der erste Theil des Lehrsatzes aussagt; und dabey kömmt es auf die Beschaffenheit der Winkel weiter nicht an. Ist der Schenkel AB gröſser als AC, so muſs folglich auch der an diesem Schenkel anliegende Abschnitt BD der Grundlinie, der gröſsere seyn.

2. Da der Unterschied zweyer Quadrate dem Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede ihrer Seiten gleich

gleich ist *, so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass * 11
$AB^2 - AC^2 = (BD + CD) \times (BD - CD)$ ist. Nun ist im *spitzwinkligen* Dreyeck die Summe, im *stumpfwinkligen* der Unterschied der beyden Theile BD, CD der Grundlinie BC des Dreyecks gleich. Halbirt man überdem die Grundlinie im Punkte O, und trägt OE gleich OD auf, so ist auch BE gleich DC *, folglich *Gr. 2 β
im *spitzwinkligen* Dreyeck der Unterschied der Linien BD, DC gleich $BD - BE = DE = 2DO$, im *stumpfwinkligen* Dreyeck dagegen die Summe der Linien BD, DC gleich $BD + BE = DE = 2 . DO$. Mithin ist im spitzwinkligen Dreyeck sowohl als im stumpfwinkligen

$$AB^2 - AC^2 = 2 . BC \times DO.$$

Und diese Aussage gilt auch für das bey C rechtwinklige Dreyeck, für welches C und D zusammenfallen und $2 DO \times BC = BC^2$ ist; mithin für jedes Dreyeck. Eine Allgemeinheit, in der wir diesen Satz schon weiter oben unter den Folgerungen aus Lehrsatz 13 kennen gelernt haben *. * 13. f. 4.

Folgerung. 1. Da nach dem ersten Theil des Lehrsatzes, für jedes Dreyeck $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$ ist, so muss auch, wenn man beyderseits $AC^2 + DC^2$ hinzufügt, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ seyn. *In jedem Dreyeck sind also die Quadrate der beyden Schenkel, sammt den Quadraten der ihnen gegenüberstehenden Abschnitte der Grundlinie, die durch ein Perpendikel aus der Spitze gebildet werden, untereinander gleich.*

Fig. 37. *Folgerung* 2. Eine grade Linie CG, welche man aus dem Scheitelpunkte C eines der spitzen Winkel *des bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC*, nach der gegenüberstehenden *Kathete*, *oder nach deren Verlängerung willkührlich zieht*, theilt diese folglich so, dass $CB^2 + AG^2 = CG^2 + AB^2$ oder $CB^2 + Ag^2 = Cg^2 + AB^2$ ist. (Gregor von St. Vincenz I. 41.)

Fig. 36. *Folgerung* 3. Da nach dem zweyten Theil des Lehrsatzes in jedem Dreyeck der Unterschied der Quadrate zweyer Seiten, $AB^2 - AC^2$, dem Rechtecke $2\,BC \times DO$ gleich ist; so muss *in allen Dreyecken, welche über derselben Grundlinie BC stehn*, und *für welche der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB, AC derselbe*, folglich einem gegebnen Flächenraume F gleich ist ($AB^2 - AC^2 = F$,) auch *DO von einerley Grösse seyn*, ($DO = \frac{F}{2\,BC}$). In allen diesen Dreyecken steht folglich das Perpendikel, welches aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, vom Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit ab, und da für alle diese Dreyecke der Punkt O derselbe ist, so müssen ihre Spitzen insgesammt in dasselbe Perpendikel auf BC fallen, welches um die bestimmte Linie $OD = \frac{F}{2\,BC}$ von der Mitte der Grundlinie absteht. *Dieses Perpendikel ist mithin der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweyer grader Linien, welche von den gegebnen Punkten B und C aus gezogen, sich so durchschneiden, dass der Unterschied*
*I.E. 21. *ihrer Quadrate einem gegebnen Flächenraum F gleich ist**. Oder es ist der geometrische Ort *für die Spitzen eines*

Dreyecks, von welchem die Grundlinie BC und der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln, d. i. F, gegeben ist. Verwandelt man diesen Flächenraum F in ein Rechteck, welches über 2 BC als Grundlinie steht *, so giebt die Höhe dieses Rechtecks den Abstand DO; und jeder Punkt A in dem Perpendikel, welches auf BC in der Entfernung DO von der Mitte der Grundlinie errichtet wird, giebt als Durchschnittspunkt zwey grade Linien BA, CA, oder als dritter Eckpunkt ein Dreyeck ABC, dessen Schenkel die verlangte Beschaffenheit haben. Dieses Perpendikel fällt innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks, oder auf dem Schenkel CB, je nachdem der gegebne Flächenraum F kleiner, oder grösser als AB^2, oder diesem Quadrate gleich ist.

* Ag.

Anmerkung. Unser Lehrsatz, der bey Euklid fehlt, ist das erste Lemma, und die Aussage der dritten Folgerung der erste Satz im Zweyten Buche von *Apollonius* ebnen Oertern; auch eben daselbst der erste Fall des vierten Satzes. d. U.

[LEHRSATZ 17.]

1. *Wenn man in einem Dreyeck ABC von einem der Winkelpunkte, z. B. von A, eine grade Linie AO nach dem Punkte O in der Mitte der gegenüberstehenden Seite BC zieht, so ist allemal* $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$. Fig. 36

Fälle von A auf die gegenüberstehende Seite das Perpendikel AD. Wie dieses auch liegen möge, so theilt allemal die Linie AO das gegebne Dreyeck in zwey Dreyecke AOB, AOC, welche, je nachdem die-

ſe halbirende Linie auf BC ſenkrecht oder ſchief aufſteht, entweder *beyde bey O rechtwinklig*, oder das *eine* bey O ſtumpfwinklig, das *andre* ſpitzwinklig iſt. Im *erſten Fall* (der ein gleichſchenkliges Dreyeck, deſ-
*I. 12.7. ſen Spitze A iſt, vorausſetzt *,) fallen die Punkte O und D zuſammen, und es iſt $AB^2 + AC^2 = 2\,AC^2 =$
* 12. $2\,AO^2 + 2\,OC^2$ *, wie der Lehrſatz ausſagt. Iſt im *zweyten Fall* AOB der ſtumpfe, AOC der ſpitze Winkel, ſo ſteht in dem bey O *ſpitzwinkligen* Dreyeck, dem Winkel O die Seite AC gegenüber, und aus A iſt auf OC das Perpendikel AD gefällt, folglich,

*13. (1) $$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2\,OC \times OD\,*;$$

(eine Ausſage, die für den Fall, daſs C ein rechter Winkel iſt, folglich AD mit AC zuſammenfällt, und OD in OC übergeht, ſich in dieſe, $AC^2 = AO^2 - OC^2$ verwandelt.) In dem bey O *ſtumpfwinkligen* Dreyeck AOB, wo der Schenkel AB dem Winkel bey O gegen-
* 13. (2) überſteht, iſt $AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2\,OB \times OD$ *, oder, weil nach der Vorausſetzung OB gleich OC iſt,

$$AB^2 = AO^2 + OC^2 + 2\,OC \times OD$$

(eine Ausſage, die falls bey C ein rechter Winkel, und OD gleich OC iſt, in dieſe übergeht, $AB^2 = AO^2 + 3\,OC^2$). Es iſt daher auch in dieſem zweyten Fall

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$$

es ſey bey C ein ſchiefer oder ein rechter Winkel. Die Ausſage des Lehrſatzes gilt alſo für jeden möglichen Fall.

Ein andrer viel kürzerer *Beweis* dieſes Satzes läſst ſich unmittelbar aus Lehrſatz 11. Folgerung 2. ableiten. Denn da vermöge der Conſtruction, die Grundlinie

BC des Dreyecks, in O gleich, und in D ungleich getheilt ist, so ist $BD^2 + DC^2 = 2\,CO^2 + 2\,OD^2$, folglich, wenn man beyderseits 2 AD hinzufügt, dem Pythagoreischen Lehrsatz gemäss, $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$. — Umgekehrt kann man aus dem letztern Satze den erstern ableiten, wenn man für ihn noch einen andern Beweis, als den oben * mitgetheilten wünscht. *11. f. 2.

Folgerung 1. *Für alle Dreyecke, wie ABC, welche über derselben Grundlinie BC stehn,* ist die Hälfte dieser Grundlinie, OC, also auch $2 \cdot OC^2$ von gleicher Grösse *. Diejenigen unter diesen Dreyecken, für welche überdem noch *die Quadrate der beyden Schenkel AB, AC einerley Grösse haben*, also $AB^2 + AC^2 = F$, d. h. irgend einem gegebnen Flächenraum gleich sind, müssen folglich allesammt so beschaffen seyn, *dass ihre Spitze A von dem Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit absteht.* Denn da unserm Lehrsatz gemäss für sie alle $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$ ist, so ist in jedem dieser Dreyecke $2\,AO^2 = F - 2\,OC^2$, mithin $AO = \sqrt{(\frac{1}{2}F - OC^2)}$, also AO für alle von gleicher Grösse. Folglich ist eine um den Mittelpunkt der Grundlinie BC, mit einem Halbmesser, dessen Zahlausdruck $\sqrt{(\frac{1}{2}F - OC^2)}$ ist, beschriebne *Kreislinie*, der *geometrische Ort für die Spitzen aller Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und für welche die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln gleiche Grösse hat.* Oder sie ist der *geometrische Ort für die Aufgabe*, welche verlangt, *von zwey gegebnen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich in einem Punkte A so durchschnei-* *E. 5. δ

den, dafs ihre Quadrate zusammengenommen einem gegeb-
*Cf. 16. f. 3. *nen Flächenraum gleich sind* *. Den Halbmesser dieser Kreislinie findet man aus den gegebnen Grösen F und BC geometrisch, wenn man nach Anleitung der Aufgaben zu Ende dieses Buchs, die Figur F in ein gleichgeltendes Rechteck, und die Hälfte desselben in ein Quadrat verwandelt, und dann die Seite des Quadrats sucht, welches dem Unterschiede des erstern Quadrats von $(\frac{BC}{2})^2$ gleich ist.

Fig. 39. Folgerung 2. *Nimmt man umgekehrt auf dem Durchmesser eines gegebnen Kreises, oder auf dessen Verlängerung, zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, in gleicher Entfernung von demselben, zwey Punkte B, C; so ist die Summe der Quadrate je zweyer Linien BM, CM, die man von diesen Punkten nach einem Punkte M in der Kreislinie zieht, für jeden solchen Punkt von gleicher Grösse.* Eine artige Eigenschaft der Kreislinie, welche, wenn man MO zieht, unmittelbar aus unserm Lehrsatz folgt.

Sie stellt uns jedoch nur den einfachsten Fall einer viel allgemeinern und weiter greifenden *Eigenschaft der Kreislinie* dar, die grade so aus der Verallgemeinerung
* 20. unsers Lehrsatzes *, wie die hier entwickelte aus diesem Lehrsatze selbst fliest, und von der man gleich nach den Anwendungen des gegenwärtigen Lehrsatzes
*18.u.19 auf das Parallelogramm und Trapez *, nach dem Beweise jenes verallgemeinerten Satzes, einiges finden wird.

Fig. 40. Zusatz I. *Werden alle Seiten eines Dreyecks ABC durch grade Linien aus den gegenüberstehenden Winkelpunk-*

ten, AD, BE, CF halbirt, so ist die Summe der Quadrate über diese Linien, gleich $\frac{3}{4}$ von der Summe der Quadrate aus den Seiten des Dreyecks. Denn da das doppelte Quadrat aus der Hälfte einer Linie, z. B. $2\,BD^2$, der Hälfte des Quadrats aus der ganzen Linie, $\frac{1}{2}\,BC^2$, gleich ist, so ist unserm Lehrsatz gemäss

$$AB^2 + AC^2 - \tfrac{1}{2}BC^2 = 2\,AD^2$$
$$AB^2 + BC^2 - \tfrac{1}{2}AC^2 = 2\,BE^2$$
$$AC^2 + BC^2 - \tfrac{1}{2}AB^2 = 2\,CF^2$$

folglich $\frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = (AD^2 + BE^2 + CF^2)$

Zusatz II. Ist ABC ein schiefwinkliges Dreyeck, so ist das Quadrat der Seite AB, kleiner oder grösser als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten AC, BC*. Dann muss es folglich auf der Seite AB, oder auf deren Verlängerung, einen Punkt O geben, der auf ihr zwey Stücke AO, BO abschneidet, deren Quadrate zusammengenommen den Quadraten der beyden andern Seiten AC, BC gleich sind. Diesen Punkt O findet man allemal, wenn man AB über B hinaus, und die Seite AC über C hinaus verlängert, auf dieser Verlängerung CF = CA nimmt, FB zieht, auf der erstern Verlängerung BG = FB anträgt, und dann AG halbirt. Der halbirende Punkt ist der gesuchte Punkt O. Fig. 41.

* 13.

Denn weil dann AG in O gleich und in B ungleich getheilt ist, so ist erstens $AB^2 + BG^2 = 2\,AO^2 + 2\,BO^2$ *; und weil zweitens auch im Dreyeck ABF, die Seite AF halbirt ist, ist $AB^2 + BF^2 = 2\,BC^2 + 2\,AC^2$. Nun aber ist der Construction gemäss BF gleich BG, folglich $AO^2 + BO^2 = BC^2 + AC^2$, mit-

* II. f. 2.

hin O der gesuchte Punkt, der auf der Seite AB oder deren Verlängerung, zwey Stücke abschneidet, deren Quadrate den Quadraten der beyden Seiten AC, CB zusammengenommen gleich sind.

Da in den Dreyecken BCA, BCF, die Schenkel, welche die Winkel bey C einschliessen, untereinander gleich sind, so ist, falls AB einem *spitzen* Winkel gegenübersteht, $AB < FB$, also $< BG$, und mithin fällt alsdann der Punkt O allemal in die Verlängerung der Seite AB. Steht hingegen AB einem *stumpfen* Winkel gegenüber, so ist $AB > FB$, also $> BG$ und der Punkt O liegt dann stets in der Seite AB, wie dieses auch Lehrsatz 13 gemäss seyn muss.

Fig. 42. Zusatz III. *Wenn man von irgend einem Punkte F nach den vier Eckpunkten eines Rechtecks ABCD grade Linien zieht, so ist die Summe der Quadrate je zweyer dieser Linien, die nach den gegenüberstehenden Winkelpunkten gezogen sind, einander gleich, oder* $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$.

Denn zieht man die beyden Diagonalen AC, BD, so halbiren sich diese wechselseitig, so dass $AO = OC = OB$
*I. 36. Z. $= OD$ ist *. Zieht man FO, so ist im Dreyeck AFC vermöge unsers Lehrsatzes $FA^2 + FC^2 = 2\,FO^2 + 2\,AO^2$, und im Dreyeck BFD eben so $FB^2 + FD^2 = 2\,FO^2 +$
* Gr. 1. 2 DO^2, folglich $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$ *.

Anmerkung. Bey *Le Gendre* findet sich zwar der Lehrsatz, aber sein Beweis ist mangelhaft. Folgerung 2 und Zusatz 3 kommen in *Simpsons* Elementen vor; Zusatz 1 und 2 entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* I. 42 und 49, und Folgerung 1 macht in *Apollonius* ebnen Oertern II, 5. den ersten Theil des ersten Falls aus.

d. U.

LEHRSATZ 18.

In jedem Parallelogramm ABCD ist die Summe der Quadrate aus allen Seiten, den Quadraten der beyden Diagonalen AC, BD zusammengenommen gleich. Fig. 43.

Da jedes Parallelogramm durch eine der Diagonalen, z. B. durch AC, in zwey Dreyecke ABC, ADC getheilt wird, welche über der Diagonale als Grundlinie stehn, und überdem die beyden Diagonalen sich in ihrem Durchschnittspunkte O wechselseitig halbiren, so dass $AO = OC$ und $BO = OD$ wird, so ist, erstens im Dreyeck ABC

$$AB^2 + BC^2 = 2\,AO^2 + 2\,BO^2$$

und zweytens im Dreyeck ADC

$$AD^2 + DC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OD^2$$

folglich, wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, und statt des vierfachen Quadrats der halben Diagonalen ($4AO^2$, $4\,BO^2$) die Quadrate der Ganzen setzt *, * 4. Z. 3.

$$AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$$

Folgerung. Da im Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten, folglich auch die Quadrate derselben, gleich sind, so läst sich dieser Satz auch so ausdrücken: *In jedem Parallelogramm sind die Quadrate der beyden Diagonalen, das Doppelte von den Quadraten aus* *zwey an einander liegenden Seiten*, *oder* $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$; ein Satz, der für das Parallelogramm etwas Aehnliches, als Lehrſatz 17 für das Dreyeck ausſagt.]

[LEHRSATZ 19.]

Fig. 44. *In jedem Trapez ABCD übertrifft die Summe der Quadrate aller Seiten, die beyden Quadrate der Diagonalen AC, BD zuſammen genommen; und zwar um ein Quadrat, welches man erhält, wenn man über zwey aneinander liegende Seiten des Trapezes ein Parallelogramm ABCE errichtet, den Abſtand der beyden Eckpunkte D des Trapezes und E des Parallelogramms, die beyden nicht gemein ſind, nimmt, und über dieſen Abſtand DE als Seite, ein Quadrat beſchreibt. Oder es iſt* $AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$.

Ein Parallelogramm, weches man über zwey an einander liegende Seiten eines Trapezes, z. B. über AB, BC beſchreibt, hat mit dem Trapez die drey Eckpunkte A, B, C und die Diagonale AC gemein, hingegen iſt der vierte Eckpunkt, D, E, und daher auch die zweyte Diagonale BD, BE in beyden verſchieden, weil ſonſt das erſtere Viereck, gegen die Vorausſetzung, ein Parallelogramm ſeyn würde.

Ziehe vom Winkelpunkte C eine Parallellinie mit der gegenüberſtehenden Seite DA des Trapezes, und von B aus eine Parallellinie mit DE, ſo durchſchneiden ſich dieſe Parallellinien in einem Punkte F ſo, daſs ſich die

Dreyecke CFB, ADE decken. Denn die Linien AE, BC*, und die Winkel an den Punkten C, A so wie an B, E sind einander gleich*. Folglich ist auch CF = AD und BF = DE. Zieht man also noch die Linien FA, FE, so entstehn zwey Parallelogramme ADCF und BDEF*, von deren Seiten und Diagonalen folglich der so eben bewiesene Satz* gilt. Es ist also im Parallelogramm ADCF

* I. 4.
* I. 34.
* I. 35.
* 18.

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 = AC^2 + DF^2.$$

Eben so ist im Parallelogramm BDEF

$$2 . BD^2 + 2 . DE^2 = BE^2 + DF^2.$$

Zieht man folglich Gleiches von Gleichem ab, so erhält man

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 - 2 BD^2 - 2 . DE^2 = AC^2 - BE^2.$$

Und wenn man beyderseits wieder hinzufügt $2 . BD^2 + 2 . DE^2$,

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 = 2 . BD^2 + 2 . DE^2 + AC^2 - BE^2$$

Nun ist endlich auch im Parallelogramm ABCE

$$2 . AB^2 + 2 . BC^2 = AC^2 + BE^2.$$

Verbindet man wieder diese Gleichung mit der vorigen, so wird

$$2 . AB^2 + 2 . AD^2 + 2 . BC^2 + 2 . CD^2 = 2 . AC^2 + 2 . BD^2 + 2 DE^2;$$ mithin auch, wenn man von beyden gleichen Grössen die Hälfte nimmt,

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2.$$

Folgerung 1. Also ist kein Viereck möglich, worin die beyden Quadrate der Diagonalen *grösser* als die Quadrate aus allen Seiten zusammengenommen wären. Weicht ein Trapez vom Parallelogramm mehr ab, wird folglich DE grösser, so wird auch die Summe aus den Quadraten der Diagonale, gegen die Summe aus den Quadraten aller Seiten immer kleiner.

Folgerung 2. Halbirt man beyde Diagonalen des Trapezes in den Punkten P, Q, so wird durch den Punkt P zugleich die Diagonale AC des Parallelogramms ABCE, welche diesem mit dem Trapez gemein
*I. 37. ist, mithin auch die andre Diagonale BE halbirt *. Zieht man daher PQ, so theilt diese Linie sowohl BD als BE in zwey gleiche Theile, daher auch PQ die Hälfte von
* 7. DE, und mit dieser Linie parallel ist *. Ist aber $DE = 2 . PQ$, so wird $DE^2 = 4 . PQ^2$. Setzt man diese Grösse statt der erstern, so ist also auch in jedem Viereck

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + 4 . PQ^2.$$

Anmerkung. Diesen Lehrsatz entlehne ich von *Euler*, der ihn zuerst gefunden, und auf die hier mitgetheilte Art bewiesen hat, in seinen *Variis Demonstrationibus Geometricis*, in den *Novis Comm. Acad. Imp. Petrop. T. I. p. 409. seq.*

d. U.

[LEHRSATZ 20 †.]

Fig. 45. *Wenn man aus einem der Winkelpunkte eines Dreyecks ABC, z. B. aus A, nach irgend einem*

†) Wer mit den bisherigen Sätzen noch nicht ganz im Deutlichen ist, und sich noch nicht stark genug fühlt, um sich in das Feinere der Geometrie zu vertiefen, überschlage fürs erste diesen Lehrsatz sammt allen seinen Folgerungen und Zusätzen, und wende sich sogleich zu Lehrsatz 21, wo

Punkte G in der gegenüberstehenden Seite BC, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie AG zieht, so ist allemal

$$\alpha)\ BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} \pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$$

oder, was auf eins hinauskömmt,

$$\beta)\ AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

$$= BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG} \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

oder $\gamma)\ AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG$

$$= BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG \pm AG^2 \times BC$$

oder, wenn GE irgend eine beliebige Linie ist,

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE}$$

$$\pm AG^2 \times \frac{BC}{GE} = \frac{BG}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$

oder endlich

$$\delta)\ AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

wo, je nachdem der Punkt G in der Seite BC selbst, oder in deren Verlängerung liegt, die obern oder die untern Zeichen gelten, und zugleich angenommen wird, dass im zweyten Fall $Bg > Cg$ *ist.*

er ohne Anstos fortfahren kann. Der gegenwärtige Lehrsatz, und die hinzugefügten Sätze, enthalten vom zweyten Buche der *ebnen Oerter des Apollonius*, so viel als es nur immer der Zweck dieses Werks erlaubte, auf eine, wie mir scheint, leichtere Art als von andern vorgetragen, und wird hinreichen einen deutlichen Begriff von jenem interes-

Fig. 48. *Steht AG* 1) *auf der Grundlinie BC selbst*, oder 2) *auf deren Verlängerung senkrecht*, so bildet diese Linie mit den Schenkeln des Dreyecks zwey rechtwinklige Dreyecke, worin $BG^2 = AB^2 - AG^2$ und $CG^2 = AC^2 - AG^2$, mithin auch $BG = \frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ und $CG^2 = \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ ist. Nun ist im ersten Fall die Grundlinien $BC = BG + CG$, im zweyten Fall $BC = BG - CG$, vorausgesetzt dass $BG > CG$ ist. Daraus folgt für diesen Fall die Aussage α, und mithin die Wahrheit der andern Aussagen, die, wie wir gleich sehn werden, unmittelbar aus ihr abgeleitet sind.

Fig. 45. *Steht* dagegen AG *schief auf*, und zwar 1) *auf der Grundlinie BC selbst*, so dass AGB ein spitzer, AGC aber ein stumpfer Winkel ist, so theilt diese Linie das gegebne Dreyeck in zwey kleinere Dreyecke, ein spitzwinkliges AGB, und ein stumpfwinkliges AGC, denen die Spitze A und das Perpendikel AD auf die gegenüberstehende Seite gemein ist, und in denen beyden das Perpendikel, von dieser Seite oder deren Verlängerung, ein gleiches Stück GD abschneidet. Die Grösse dieses Abschnitts wird in jedem Dreyeck durch
13. f. 3. die Grösse der drey Seiten bestimmt *, und zwar ist

samen Theile der Geometrie zu geben, und eine Menge netter und allgemeiner Sätze, besonders über den Kreis, dem Leser, der die kleine Mühe des Durchstudirens nicht scheut, bekannt zu machen.

Gilbert.

in dem bey G spitzwinkligen Dreyeck AGB, $GD = \frac{BG^2 + AG^2 - AB^2}{2\,BG}$, hingegen in dem bey G stumpfwinkligen Dreyeck ACG, $GD = \frac{AC^2 - CG^2 - AG^2}{2\,CG}$; Ausdrücke, die wir ihrem geometrischen und ihrem arithmetischen Sinne nach, am angeführten Orte erklärt haben. Folglich sind, da für beyde Dreyecke der Abschnitt GD derselbe ist, diese Ausdrücke gleich; mithin auch ihr Zweyfaches, und da überdem $\frac{BG^2}{BG} = BG$ und $\frac{CG^2}{CG} = CG$ ist, $BG + \frac{AG^2 - AB^2}{BG}$ $= \frac{AC^2 - AG^2}{CG} - CG$. Fügt man beyderseits CG und $\frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ hinzu, so bleiben auch diese Grösen gleich, und folglich ist

$$BG + CG \text{ d. h. } BC = \frac{AB^2 - BG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG},$$

welches in der Aussage α, der erste Fall ist. Und da hier AB, AC und BG, CG völlig auf einerley Art vorkommen, so hat es auf den Ausdruck von BC weiter keinen Einfluss, welcher von den beyden Schenkeln AB, oder ob AC dem stumpfen Winkel bey G gegenübersteht. Dieser Ausdruck gilt daher unbedingt *für jeden Punkt G in der Grundlinie* (selbst dann, wenn G mit B oder C zusammenfällt).

Steht 2) *Ag auf der Verlängerung der Grundlinie schief auf*, und zwar *zuerst auf der Verlängerung derselben* *über C hinaus, so dafs Bg > Cg ist*, so unterscheidet sich dieser Fall von dem vorigen darin, dafs nun die Schenkel AB, AC entweder beyde dem spitzen, oder beyde dem stumpfen Winkel bey g gegenüberstehn. Ist das *erstere* der Fall, und die Dreyecke AgB, AgC sind beyde bey g spitzwinklig, so ist

$$gD = \frac{Bg^2 + Ag^2 - AB^2}{2\,Bg} \text{ und zugleich}$$

$$gD = \frac{Cg^2 + Ag^2 - AC^2}{2\,Cg}, \text{ mithin } Bg + \frac{Ag^2 - AB^2}{Bg}$$

$$= Cg + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}.$$ Ist hingegen das *zweyte* der

Fig. 47. Fall, und stehn beyde Schenkel AB, AC dem stumpfen Winkel bey g gegenüber, so ist in diesen stumpfwinkligen Dreyecken $gD = \frac{AB^2 - Bg^2 - Ag^2}{2\,Bg}$ und zugleich $gD = \frac{AC^2 - Cg^2 - Ag^2}{2\,Cg}$, folglich $\frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$

$$- Bg = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - Cg.$$ In beyden Fällen ist der Voraussetzung gemäfs $Bg - Cg = BC$. Zieht man daher im erstern Fall beyderseits Cg ab, und fügt zugleich $\frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$ beyderseits hinzu, und verfährt dagegen im zweyten Fall grade umgekehrt, so erhält man *in beyden Fällen gleichmäfsig*

a) $Bg - Cg$ d. h. $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$

oder, da es einerley ist, ob man den Unterschied

Ag^2

$Ag^2 - AC^2$ hinzufügt, oder umgekehrt den Unterschied $AC^2 - Ag^2$ abzieht,

b) $Bg - Cg$ d. h. $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} - \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg}$

welches oben in der Ausſage α der zweyte Fall iſt, bey welchem es alſo wiederum nicht weiter auf die Beſchaffenheit des Winkels bey g ankömmt, wenn nur g ein Punkt in der Verlängerung der Grundlinie über C hinaus iſt.

Liegt dagegen g in der entgegengeſetzten Verlängerung, und ſteht, Ag nicht wie wir hierbey vorausſetzten, auf der Verlängerung der Grundlinie über den Punkt C, ſondern *auf der entgegengeſetzt liegenden Verlängerung über den Punkt B hinaus auf*; ſo iſt $Bg < Cg$, und folglich $Cg - Bg = BC$, daher wir unter dieſen Umſtänden nicht den Werth $Bg - Cg$, ſondern den umgekehrten, $Cg - Bg$, hätten herleiten müſſen, für welchen ſich Fig. 46.

$BC = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$, alſo BC ebenfalls als

der Unterſchied der beyden Theile in b) findet nur daſs in jenem Fall der erſtere, in dieſem der letztere dieſer Theile gröſser iſt. Will man daher die Form in b) auch auf dieſen Fall übertragen, ſo giebt ſie in ihm für BC einen ſubtractiven Zahlwerth, oder etwas *Negatives* *, welches alſo allemal ein Zeichen iſt, daſs * 13. a 1.
die Linie Ag eine entgegengeſetzte Lage hat; als die, für welche die Formel unmittelbar gebildet iſt, und welche wir im Lehrſatz ausdrücklich bemerkt haben; d. h. daſs ſie ſo aufſteht, daſs nicht, wie die Formel vorausſetzt, $Bg > Cg$, ſondern umgekehrt $Bg < Cg$

ist. *Unter dieser Bedingung* gilt auch die Formel *b* allgemein für jeden beliebigen Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie. (Durch die Vorstellung des Negativen läfst sich diese Formel selbst mit unter die Aussage für den ersten Fall ziehn, wenn der Punkt G in der Grundlinie liegt, indem beyde Fälle sich lediglich durch das Entgegengesetzte in der Lage des Abschnitts CG unterscheiden, und daher die erstere, wenn man in ihr CG negativ setzt, in die zweyte übergeht. Doch haben wir es nicht nöthig uns hier bis zu dieser gänzlichen Verallgemeinerung zu erheben.)

Die Aussage unter α läfst sich noch *auf eine andre Art sehr leicht beweisen*, die ich hier wenigstens andeuten will. Man fälle im gegebnen Dreyeck ABC auf die Grundlinie das Perpendikel AD, und es sey D sowohl als G ein Punkt in der Grundlinie selbst, so ist die Grundlinie $BC = BD + GD + CD - GD$. Nun ist das Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien, dem Unterschiede ihrer Qua-

* 11. drate gleich *, folglich $BD + GD = \frac{BD^2 - GD^2}{BD - GD}$ und $CD - GD = \frac{CD^2 - GD^2}{CD + GD}$, und da überdem im Drey-

* 16. 1. eck ABG, $BD^2 - GD^2 = AB^2 - AG^2$ *, und im Dreyeck AGC, $CD^2 - GD^2 = AC^2 - AG^2$ ist, so mufs in diesem Fall $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ seyn, welches der erste Fall in der Aussage α ist. Eben so leicht lassen sich die übrigen Fälle, je nachdem G und D verschieden liegen, auf diese Art herleiten.

Aus diesen Sätzen daſs für Punkte G *in der Grundlinie*, $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$, hingegen für Punkte g *in ihrer Verlängerung*, $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$ ist, (wobey $Bg > Cg$ angenommen wird,) lassen sich *die übrigen Aussagen des Lehrsatzes folgendermaſsen* herleiten. Man füge zu den gleichen Gröſsen im ersten Fall beyderseits $\frac{AG^2}{BG} + \frac{AG^2}{CG}$, und im zweyten Fall $\frac{Ag^2}{Bg} - \frac{Ag^2}{Cg}$ hinzu, d. i. Linien, deren Zahlausdruck auf gleiche Benennungen, nach den Regeln der Bruchrechnung, gebracht, im ersten Fall $\frac{AG^2 \times (CG + BG)}{BG \times CG}$, das ist $\frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG}$, im zweyten Fall $\frac{Ag^2 \times (Cg - Bg)}{Bg \times Cg}$ das ist $- \frac{AG^2 \times BC}{Bg \times Cg}$ ist (da unsrer Voraussetzung gemäſs $Bg > Cg$ ist); so verwandeln sich durch diese Hinzusetzung jene Aussagen für beyde Fälle in folgende: $BC \pm \frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG} = \frac{AB^2}{BG} \pm \frac{AC^2}{CG}$, wo die *oberen Zeichen* für den erstern Fall gelten, wenn G in der Grundlinie BC selbst liegt, die *unteren Zeichen* für den zweyten Fall, wenn g in der Verlängerung der Grundlinie liegt, (wobey zugleich $Bg > Cg$ angenommen wird). *Und das ist ein für allemal, auch bey allen folgenden Ausdrücken zu merken.*

Ferner ſind auch die Producte dieſer Zahlausdrücke in den Zahlwerth der Linie BG gleich, oder

$$AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{BG}$$

und hier läſst ſich wieder ſtatt BC × BG ſetzen $(BG \pm CG) \times BG$ oder, $BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG}$, welches die Formen des Satzes unter β ſind.

Nimmt man aufs neue die Produkte dieſer Ausdrücke in den Zahlausdruck von CG, ſo erhält man die erſte Form unter γ,

$$AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG$$
$$= BG^2 \times CG \pm CG_2 \times BG \pm AG^2 \times BC$$

und dieſe Gleichheit bleibt, wenn man alle Glieder, zum Behuf der geometriſchen Auslegung derſelben, durch den Zahlausdruck irgend einer willkührlichen Linie GE dividirt, wie in der zweyten Form unter γ. — Da endlich die beyden Theile $BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG$ ſich in das Produkt $BG \times CG \times (BG \pm CG)$, das iſt $BG \times CG \times BC$ zuſammen ziehn laſſen, ſo iſt auch, wie die dritte Formel unter γ ausſagt

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC_2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$

und dieſe Gleichheit bleibt wiederum, wenn man alle Glieder durch den Zahlausdruck $\frac{BC}{GE}$ dividirt, da denn, wie δ ausſagt, iſt

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

Auslegung. *Die geometrischen Sätze*, welche diesen verschiednen Formen, wenn man die Zeichen in ihrem geometrischen Sinne nimmt *, entsprechen, *4. Z. 2.
lauten folgendermassen.

α) *Wenn man von der Spitze A eines Dreyecks ABC nach der gegenüberstehenden Grundlinie BC, oder nach deren Verlängerung eine grade Linie AG zieht, und den Unterschied der Quadrate über AB und AG in ein Rechteck, welches über der Grundlinie BG steht* *, *und eben so den* *Auf 4.
Unterschied der Quadrate über AC und AG in ein Rechteck über CG verwandelt; so ist die Grundlinie BC des gegebenen Dreyecks, gleich den Höhen dieser beyden Rechtecke zusammen genommen oder von einander abgezogen, je nachdem G in der Grundlinie selbst, oder in deren Verlängerung über C, oder über B hinaus liegt, und je nachdem AG grösser oder kleiner als AB oder als AC ist; welches denn jedesmal durch die Formel α diesen Umständen gemäss bestimmt wird. Diese Formel schliesst daher in der That so viel verschiedne Sätze, als Unterfälle des Hauptsatzes, in sich, als hierin Modificationen möglich sind; und sie alle müsste der Geometer einzeln aufführen, der (wie wohl vor Zeiten geschah) die Vortheile unsrer Bezeichnung verschmähte.

Bey der Auslegung der andern Formen, muss man bemerken, dass ein Ausdruck wie dieser, $AC^2 \times \frac{BG}{CG}$ (den wir der Kürze wegen mit *a* bezeichnen wollen) in seinem geometrischen Sinne genommen *, *einen* *4. Z. 2.
Flächenraum bedeutet, *welcher vom Quadrate über AC*

ein bestimmter Theil $\frac{BG}{CG}$, d. h. der nemliche Theil, als BG von CG ist; oder was auf eins heraus kömmt, *einen Raum dessen Verhältniss zum Quadrate über AB bestimmt*, nemlich BG : CG, *ist*; oder *einen Raum, zu dem* AB^2 *sich wie CG : BG verhält* (denn dieser Ausdruck lässt sich stets als vierte Proportionalgrösse zu folgenden drey
*V. 2. α CG : BG = AB^2 : *a* betrachten *;) oder endlich *eine*
* (f. 3.) *der Gattung nach gegebne und über AC beschriebne Figur**, *deren Verhältniss zum Quadrate über AC eben deshalb gegeben*, nemlich BG : CG, *ist*. Je nachdem man in unsern Formen β, γ, δ, eine dieser Bedeutungen für solche Ausdrücke setzt, verwandelt sich eine jede in mannigfaltig ausgedrückte geometrische Sätze, an deren Ausdruck man sich jedoch nicht stossen wird, wenn man das hier bemerkte fest hält. — 2) Muss man sich dabey aus der Lehre von den Verhältnissen des Satzes erinnern, worauf unter andern in der Arithmetik die Gesellschaftsrechnung beruht, dass, nemlich, wenn eine Grösse A aus mehreren Theilen α, β, γ, besteht, und entweder diese Grösse A selbst, oder einer ihrer Theile α bekannt, und überdem das Verhältniss dieser Theile untereinander (m : n : p) oder zum Ganzen gegeben wird, *dadurch zugleich die Grösse aller Theile einzeln bestimmt ist*, weil wir nemlich dann auch das Verhältniss des Ganzen zu jedem der Theile (m + n + p : m, und : n, und : p) kennen. Ist also z. B. die Linie BC und das Verhältniss BG : CG gegeben, so ist auch die Grösse der Linien BG, CG bekannt, und mithin auch das Rechteck BG × CG, wel-

ches alſo in dieſem Fall auch ein gegebner Raum iſt. — Dieſes vorausgeſetzt, laſſen ſich alſo z. B. die andern Formen folgendermaſsen überſetzen:

β) Fall 1: „*Zieht man nach einem Punkt G in der Grundlinie BC eine grade Linie AG, ſo iſt die Summe des Quadrats über AB, und eines Raums zu welchem das Quadrat über AC ein gegebnes Verhältniſs (CG : BG) hat,* gleich *der Summe des Rechtecks BC × BG und eines Raums zu welchem das Quadrat über AG ein gegebnes Verhältniſs (CG : BC) hat.* — Oder: „Zieht man von zwey gegebnen Punkten B, C aus zwey grade Linien, welche ſich ſo in einem Punkte A durchſchneiden, daſs das Quadrat über AB und ein Raum, deſſen Verhältniſs zum Quadrat über AC gegeben iſt, zuſammengenommen einem gegebnen Flächenraum gleich ſind, ſo iſt auch die Summe eines gegebnen Raums (BC × BG) und eines Raums, deſſen Verhältniſs zu AG^2 gegeben iſt ($AG^2 \times \frac{BC}{BG}$) bekannt.

γ) Fall 1: „Unter denſelben Umſtänden iſt die Summe einer Figur gegebner Gattung über AB ($AB^2 \times \frac{CG}{GE}$) und einer Figur gegebner Gattung über AC ($AC^2 \times \frac{BG}{GE}$), *gleich* der Summe eines gegebnen Raums ($BG^2 \times \frac{CG}{GE} + CG^2 \times \frac{BG}{GE}$) und einer über AG beſchriebnen Figur gegebner Gattung ($AG^2 \times \frac{BC}{GE}$) u. ſ. f.;

Auslegungen die Folgerung 1 noch verdeutlichen wird.

Anmerkung. Mein Beweis dieser weitreichenden, für geometrische Untersuchungen ausserordentlich brauchbaren Satze, von welchen Lehrsatz 17, und eine Menge anderer bekannter Theoreme blos einzelne Fälle aussagen, tritt zwar aus dem eigentlich Constructiven hinaus, und in die arithmetischen Vorstellungen der rechnenden Geometrie über; allein bey geometrischen Sätzen von dieser Art, welche eine so grosse Menge verschieden modificirter Fälle in sich fassen, möchte das eher ein Vorzug als ein Mangel seyn. Ueberdem wäre es nicht schwierig gewesen den zweyten Beweis der Formel α, und die Herleitung der übrigen Formeln aus dieser, ganz in ein geometrisches Gewand zu kleiden, welches aber durch die Beschreibung der geometrischen Constructionen, welche der Division und Multiplication, so wie der geometrischen Begriffe, die den Producten u. s. f. entsprechen, zu weitschweifig geworden wäre. Solche ganz geometrische Beweise für den ersten Fall der Formen β und γ (wenn G in der Grundlinie liegt,) giebt *Robert Simson* in seiner *Wiederherstellung von Apollonius ebnen Oertern Buch II Lemma 10*, und *Anhang Lemma 3*, und diese Beweise, welche doch nur Einen Fall betreffen, sind beynahe eben so weitläufig, als mein Beweis für alle Formen in ihrer Allgemeinheit. Einen andern Beweis für die Form β giebt, wie Simson anführt, *Matthias Steward* in seinem Buche *de quibusdam Theorematibus generalibus etc. Edinb.* 1746, und zeigt den Gebrauch derselben beym Beweise mehrerer Theoreme. Die Hauptsätze im zweyten Buche von Apollonius ebnen Oertern (und sie gehören zu den nettesten und allgemeinsten, aber auch zu den schwierigsten in der Geometrie,) gründen sich am Ende auf unserm Hauptsatz, und können durch eine ähnliche Behandlung erleichtert werden.

Die Formen unter α und δ finde ich bey *Simson* nicht. Die beyden andern eignet sich Simson (S. 351) als seine Er-

findung zu, beweiſt ſie aber mittelſt eines Lehnſatzes über dreytheilige Linien, deſſen nach *Pappus* Bericht, ſchon Apollonius ſich in ſeinem Werke bedient hat, und aus dem ſie nicht ſchwer abzuleiten waren, wie denn *dieſer Lehnſatz* rückwärts unmittelbar aus unſerm Hauptſatze ſich ohne die geringſte Schwierigkeit ableiten läſst. *Werden nemlich in einer graden Linie vier* Fig. 49.
Punkte B, C, D, G willkührlich angenommen, und man errichtet über D ein Perpendikel, und zieht aus irgend einem Punkte A des Perpendikels, nach den übrigen Punkten B, C, G grade Linien, ſo entſteht ein Dreyeck ABC, worin aus der Spitze nach einem Punkte G in der Grundlinie, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie gezogen iſt. Für dieſe Dreyecke iſt nach unſrer Form α unter den oben angegebnen Vorausſetzungen $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} \pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$; und da zugleich das Perpendikel AD die Grundlinie ſo zerſchneidet, daſs $AB^2 - AG^2 = BD^2 - DG^2$ und $AC^2 - AG^2 = CD^2 - DG^2$ iſt *, * 16. 1.

$$\alpha)\ BC = \frac{BD^2 - DG^2}{BG} \pm \frac{CD^2 - DG^2}{CG}.$$

Dieſe Formel ſtimmt in ihrer ganzen Zuſammenſetzung mit der vorigen überein, und iſt an denſelben Vorausſetzungen gebunden, daher ſich aus ihr, grade auf dieſelbe Art, wie es in unſerm Lehrſatz geſchehn iſt, *drey* andre *Formen für jede dreytheilige Linie BC herleiten* laſſen, in welchen die obern oder die untern Zeichen zu nehmen ſind, je nachdem G in oder auſſerhalb BC liegt, auch im letztern Fall, $Bg > Cg$ geſetzt iſt, die Verſchiedenheit in der Lage von D aber nichts ändert:

$$\beta)\ BD^2 \pm CD^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

(In dieſer Form kömmt der Satz bey *Pappus* Buch 7. Satz 125, und als 7tes Lemma zum zweyten Buche von *Apollonius* ebnen Oertern, doch nur, wenn G ein Punkt in der Grundlinie iſt, vor.

Beschreibt man über BC einen Halbkreis, und errichtet auf C und G Perpendikel, so läſst sich der Satz leicht unmittelbar mittelst
* 12.f.2. unsrer Folgerungen zum Pythagoreischen Lehrsatze * beweisen.) Ist die Grundlinie BC, der Punkt D und das Verhältniſs des Flächenraums $CD^2 \times \frac{BG}{CG}$ zum Quadrat über CD, mithin CG : BG gegeben, so ist es auch der Punkt G, und mithin auch
*(Al. 2.) $BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$ gegeben * (Apollonius II Lemma 8, bey Pappus Buch 7. Satz 126.)

$$\gamma)\; BD^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CD^2 \times \frac{BG}{GE}$$

$$= BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE} \pm DG^2 \times \frac{BC}{GE}$$

(Diese Form beweist *Simson* als Lehnsatz 1 im Anhange.) Sind hier wiederum BC, der Punkt D, und die Verhältnisse GE : CG und GE : BG gegeben, so sind auch der Punkt G und die gleichen Flächenräume bestimmt. (Anhang Lemma 2). Wenn überhaupt auf einer graden Linie mehrere Punkte B, G, H, C etc. gegeben sind, so ist allemal auch ein Punkt D gegeben, der auf dieser Linie so liegt, daſs der Inhalt von Figuren gegebner Gattung, die über DB, DC, DG etc. beschrieben sind, einen gegebnen Inhalt haben. (Anh. Lemma 4.)

Folgerung 1. *Figuren, welche der Gattung nach gegeben sind*, und *Figuren, welche unter einander ähnlich sind*, bedeutet nach dem geometrischen Sprachgebrauch dasselbe. Mit diesen Figuren werden wir uns im nächsten Buche beschäftigen, und ich verspare es bis dorthin, diesen Begriff genauer auseinander zu setzen. Hier kömmt es nur auf die Eigenschaft ähnlicher Figuren an, daſs ihr Inhalt sich zum Inhalte des Quadrats über eine ihrer homologen Seiten, in allen auf einerley Art verhält, und daſs folglich, *ſo wie eine Figur, welche über eine Linie AC beſchrieben iſt, der Gattung nach gegeben wird, das Verhältniſs dieſer Figur zum Quadrate über AB völlig beſtimmt, unveränderlich und bekannt iſt; ein Lehnſatz* aus dem folgenden Buche, den wir dort ſtreng beweiſen werden. Mittelſt dieſes Satzes laſſen ſich unmittelbar aus der Auslegung unſers Hauptſatzes in ſeinen verſchiedenen Formen, folgende intereſſante Sätze über das Dreyeck und den Kreis folgern:

A) *Für alle Dreyecke, welche über derſelben Grundlinie BC ſtehn, und in welchen entweder die Summe oder der Unterſchied des Quadrats über den einen Schenkel AB, und einer über den andern Schenkel AC beſchriebnen Figur (a) von gegebner Gattung, einem gegebnen Flächenraum F gleich iſt* ($AB^2 \pm AC^2 \times \frac{m}{q} = F$); *iſt der geometriſche Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse.* Fig. 50

Denn iſt die Gattung der über AC beſchriebnen Figur *a* gegeben, ſo iſt auch, unſerm Lehnſatz zu Folge, ihr Verhältniſs zum Quadrat über AC gegeben, und zwar iſt dieſes Verhältniſs, welches m : q ſeyn mag, für alle ſolche Figuren einerley und unveränderlich. *Nimmt man* daher im Fall der *Summe auf der* gegebnen *Grundlinie* BC ſelbſt, hingegen im Fall des *Unterſchieds auf der Verlängerung* der Grundlinie *einen Punkt G ſo, daſs ſich verhält BG : CG = m : q*; ſo iſt *erſtens* $\frac{BG}{CG} = \frac{m}{q}$, folglich, unsern Voraussetzungen gemäss, $F = AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG}$, das ist, der Form β gemäss, $= BC \times CG \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$, und mithin

$$AG^2 \times \frac{BC}{CG} \begin{cases} = F - BC \times CG \text{ im Fall der Summe} \\ = BC \times Cg - F \text{ im Fall des Untersch.} \end{cases}$$

Zweytens sind dann, weil BC gegeben ist, auch die beyden Linien BG, CG, so wie *der Punkt G*, das Rechteck $BC \times CG$ und der Exponent $\frac{BC}{CG}$ gegeben *; und

*(Al. 2.)

daher ist dann in beyden Fällen *eine Figur gegebner Gattung, welche über AG beschrieben wird*, (nemlich $a = AG^2 \times \frac{BC}{CG}$,) *auch der Grösse nach gegeben*, indem sie dem Unterschiede gegebner Flächenräume (F und $BC \times CG$) gleich ist. Zu dieser Figur steht das *Quadrat über AG*, weil sie der Gattung nach gegeben ist, in einem gegebnen Verhältnisse ($CG : BC$ oder $q : m \pm q$) daher auch das Quadrat über AG, und mithin *AG selbst*, der Grösse nach gegeben und unveränderlich ist. Da nun zugleich der eine Endpunkt G dieser Linie gegeben und unveränderlich ist; so muss der *geometrische Ort des zweyten Endpunkts A* eine *Kreislinie* seyn, welche um G als Mittelpunkt, mit AG als Halbmesser beschrieben wird *. Und zwar findet man diesen Halbmesser durch Construction, wenn man, nach den Methoden in den Aufgaben zu diesem Buche, den Unterschied des gegebnen Raums F und des Rechtecks $BC \times CG$ in ein Quadrat verwandelt, und darauf ein Quadrat

*II. E. 1.

bildet, zu welchem sich das gefundene wie BC : CG verhält *. Die Seite dieses Quadrats ist der Halbmesser AG. *12.f.2 g

Apollonius ebne Oerter II. 5. Fall 1 Aussage 2, auch *II. 3. A*; doch fehlt an beyden Stellen der Fall, wenn der Unterschied gegeben ist. --- Aus der Bestimmung des Punktes G und der Linie AG, sieht man, dass für den Fall der Summe der *Mittelpunkt* G in der Grundlinie, für den Fall des Unterschieds allemal auf ihrer Verlängerung liegt, und dass im ersten Fall der gegebne Raum F nothwendig gröser, im zweyten kleiner als das Rechteck BC × CG seyn muss. Sonst würde AG negativ, und der erste Fall gienge in den zweyten, und umgekehrt über.

B) *Auch für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen, entweder die* **Summe**, *oder der* **Unterschied** *einer Figur gegebner Gattung* (*a*), *welche über den einen Schenkel AB, und einer andern Figur gegebner Gattung* (*b*), *welche über den andern Schenkel AC steht, einem gegebnen Flächenraum F gleich ist* ($a \pm b = F$); *muss* **der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie** *von gegebner Lage und Gröse seyn.*

Denn da *a* und *b* der Gattung nach gegeben sind, so ist das Verhältniss der erstern Figur zum Quadrat über AB, welches m : q seyn mag, und das Verhältniss der letztern zum Quadrat über AC, welches n : q seyn mag, mithin auch das Verhältniss m : n gegeben, und dieses ist das Verhältniss, worin die beyden der Gattung nach gegebnen Figuren, wenn man sie über dieselbe willkührliche Linie beschreibt, zu einander stehn. *Nimmt man* im Fall der *Summe in der Grundlinie*, im Fall des *Unterschieds auf ihrer Verlängerung einen Punkt*

G, und zugleich eine grade Linie GE, *so daſs ſich verhält*, $BG : CG : GE = m : n : q$, ſo ſind, da BC gegeben iſt, dieſe Linien, folglich auch das Rechteck $BG \times CG = R$ gegeben. Da nun nach γ,

$a = AB^2 \times \frac{CG}{GE}$ und $b = AC^2 \times \frac{BG}{GE}$ iſt, $a \pm b$ das iſt

$F = \frac{BC}{GE} \times (R \pm AG^2)$ ſeyn muſs; ſo iſt, falls a und b

Figuren gegebner Gattung, folglich $\frac{m}{q}$, $\frac{n}{q}$ gegeben

ſind, und der Raum $F = a \pm b$ gegeben wird, auch eine Figur gegebner Gattung über AG gegeben, und zwar iſt

$AG^2 \times \frac{m+n}{q} = F - \frac{m+n}{q} \times R$ im Fall der Summe

$AG^2 \times \frac{m-n}{q} = R \times \frac{m-n}{q} - F$ im Fall des Unterſch.

In beyden Fällen iſt alſo, auch unter dieſer Vorausſetzung, nicht nur der Punkt G, ſondern auch das Quadrat über AG, und alſo auch AG ſelbſt, als Seite dieſes Quadrats, gegeben und unveränderlich, daher eine um den Mittelpunkt G, mit AG als Halbmeſſer beſchriebene *Kreislinie* der *geometriſche Ort der Spitze A* ſeyn muſs.

Apollonius II. 5. Fall 1. Ausſage 3. Wo doch wiederum der Fall, wenn der Unterſchied der Figuren gegeben iſt, fehlt. — Aus der Beſtimmung von AG fällt übrigens in die Augen, daſs hier für den Fall der *Summe* $F > \frac{m+n}{q} \times BG \times CG$ und für den Fall des *Unterſchieds* $F < \frac{m-n}{q} \times Bg \times Cg$, folglich ein Raum, der ſich zum Raum F im erſten Fall wie die Summe, im zweyten wie der Unterschied der beyden Figuren gegebner Gattung, wenn sie über derselben Linie stehn, zum Quadrat dieser Linie, verhält, im ersten Fall nothwendig grösser, im zweyten nothwendig kleiner als das Rechteck aus den beyden Abschnitten auf der Grundlinie seyn muss; und das ist *die Bestimmung* dieser Aussage.

Für den *zweyten Fall (wenn der Unterschied der Figuren gegebner Gattung a und b gegeben wird)* ist die Aussage unter *B* noch besonders dahin einzuschränken, daß a und b *nicht ähnliche Figuren* seyn dürfen. Denn dann würden sich a und b zu den Quadraten über AB und AC auf gleiche Art verhalten, folglich m und n, mithin auch Bg und Cg gleich seyn müssen; welches unmöglich ist, da in diesem Fall der Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie liegt, und für jeden solchen Punkt die Linien Bg und Cg um BC verschieden sind. In der That ist dann auch $a - b = F = AB^2 \times \frac{m}{q} - AC^2 \times \frac{m}{q}$, folglich $AB^2 - AC^2 = F \times \frac{q}{m}$, mithin der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln gegeben und unveränderlich, daher in diesem Fall der Ort des Punktes A keine Kreislinie, sondern nach Lehrsatz 16 Folgerung 3 *eine grade Linie* seyn muss, und zwar ein *Perpendikel auf der Grundlinie BC*, dessen Abstand vom Mittelpunkt der Grundlinie gegeben ist *. *16. f. 3.

C) *Auch für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen das Quadrat, oder eine andere der Gattung nach gegebne Figur a über dem einen Schenkel AB*, gleich ist, *der Summe oder dem Unterschiede eines gegebenen Raumes S und des Quadrats, oder einer andern der Gattung nach gegebner Figur b, über dem zweyten Schenkel AC; muss der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebener Lage und Grösse seyn.*

Denn, ist *erstens* $a = b \pm S$, so ist im Fall *der Summe* $a - b = S$, *im Fall des Unterschieds* $b - a = S$, in beyden Fällen also der Unterschied zweyer der Gattung nach gegebenen Figuren, die über AB und AC beschrieben sind, einem gegebnen Raume S gleich. *Folglich tritt hier der zweyte Fall der Aussage B ein.* Verhalten sich daher die beyden Figuren gegebner Gattung a und b, zu den Quadraten über AB und AC, wie $m : q$ und $n : q$, und man nimmt auf der Verlängerung der Grundlinie BC einen Punkt g, so dass sich verhält $m : n = Bg : Cg$, so ist *eine Kreislinie*, welche um g als Mittelpunkt, und mit der Seite des Quadrats $Ag^2 = Bg \times Cg \times \frac{m - n}{q} - S$ als Halbmesser beschrieben wird, der Ort der Spitze A,*; es sey denn, dass m und n im Verhältniss der Gleichheit stehn, also *a* und *b* ähnliche Figuren sind, indem alsdann der Ort der Spitze A eine grade Linie wird *. — Ist *zweytens* $a = S - b$, mithin $a + b = S$, oder die *Summe* der beyden Figuren a und b einem gegebnen Raume S gleich, so muss, nach *B Fall* 1, der Ort der Spitze A ebenfalls eine Kreislinie seyn, deren Mittelpunkt nun aber in der Grundline BC selbst liegt, und zwar der Punkt G in der Grundlinie ist, für welchen sich verhält, $BG : CG = m : n$, und deren Halbmesser AG nun als Seite eines Quadrats $AG^2 = S - \frac{m + n}{q} \times BG \times CG$, gefunden wird.

* (B)

* 16. f. 3.

Bey dieser Aussage *C*) wird vorausgesetzt, dass a und b Figuren gegebner Gattung sind, und zwar dass a gleia gleich $AB^2 \times \frac{m}{q}$, und zugleich diese Figur $AB^2 \times \frac{m}{q}$ $= b \pm S$, oder umgekehrt $= S - b$ sey; eine Voraussetzung, die mit der auf eins hinausläuft, dafs sich verhalte $b \pm S$ (oder $S - b$) : $AB^2 = m : q$ *, dafs folglich *das Verhältnifs* der Summe oder des Unterschieds der Figur b und eines gegebenen Raums S, zum Quadrat über AB, *gegeben und unveränderlich sey*. Der Satz C) läfst sich daher auch folgendermafsen ausdrücken: *Für Dreyecke über derselben Grundlinie BC, für die das Verhältnifs der Summe oder des Unterschieds einer der Gattung nach gegebnen Figur, welche über dem einen Schenkel AC steht, und eines gegebnen Raums S, zum Quadrat über dem andern Schenkel AB gegeben ist; ist der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse*, den Fall ausgenommen, wenn beyde Figuren *ähnlich* sind, für welchen dieser Ort eine der Lage nach gegebne *grade Linie* wird.

* V. 3. γ.

Auf diese Art wird der Satz in *Apollonius ebnen Oertern II, 4* vorgetragen, wiewohl er dort weder in seiner Allgemeinheit (nur für den Fall, wenn b ein Quadrat ist) dargethan, noch auf den vorigen Ort B zurückgeführt wird. (Vielmehr stellt ihn Apollonius vor den Ort B, und scheint daher umgekehrt diesen aus unserm Satze C abgeleitet zu haben, sind anders nicht, wie Simson vermuthet, diese Sätze von spätern Abschreibern fälschlich versetzt worden. *Simson* beweist ihn dagegen, Satz 2 und 3 des Anhangs, allgemein, mit Hülfe unsers Lehrsatzes 20.

D) *Ist das Quadrat über dem einen Schenkel AB, einer Figur gegebner Gattung, welche über den andern Schenkel AC beschrieben wird, selbst gleich, $AB^2 = AC^2 \times \frac{m}{q}$*, mithin das Verhältnifs der beyden Quadrate der Schenkel $AB^2 : AC^2 = m : q$, und folglich auch *das Verhältnifs der beyden Schenkel selbst zu einander gegeben und unveränderlich*; fo ift diefe Vorausfetzung zwar *algebraifch* unter der Bedingung unferer Ausfage C enthalten, als der Fall derfelben, da der gegebne Raum $S = 0$ ift, d. h. gar kein folcher Raum gefetzt wird, indem die Arithmetik lehrt, dafs man o mit unter die Reihe aller möglichen Werthe einer Gröfse nicht nur aufnehmen darf, fondern auch aufnehmen mufs. Allein hier ift die Gültigkeit unferer Ausfage für diefen Fall noch befonders darzuthun, und ausdrücklich zu beweifen, dafs auch unter diefen Umftänden der Ort des Durchchnittspunktes A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse fey, wie diefes in Zufatz VI und VII gefchehn foll.

Folgerung 2. *Alle diefe Sätze* find nicht blofs auf die Schenkel von Dreyecken, welche über einer gegebnen Grundlinie BC ftehn eingefchränkt, oder, was daffelbe fagt, gelten nicht blofs von graden Linien, welche von *zwey* gegebnen Punkten B, C aus gezogen, fich fo durchfchneiden, wie die Bedingungen der Sätze *A*), *B*), *C*) ausfagen; fondern fie *gelten auch für grade Linien, welche von* 3, *von* 4, *von* 5 *gegebnen Punkten, u. f. f., kurz von jeder beliebigen Zahl gegebner Punkte aus gezogen, fich insgefammt in einem Punkte A fo durchfchneiden, dafs die Figuren gegebner Gattung, welche man über fie befchreibt, fie mögen Quadrate feyn oder nicht*,

a) entweder *alle zufammengenommen einem gegebnen Raume F gleich;*

b) oder *fo befchaffen find, dafs der Unterfchied zwifchen der Summe einiger diefer Figuren und der Summe andrer einem gegebnen Raume F gleich ift;*

c) oder endlich so, *dass die Summe einiger, gleich ist der Summe der andern, vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum S:*

Immer ist unter diesen Bedingungen der **geometrische Ort** *des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes A aller solcher Linien*, **eine Kreislinie** *von gegebner Lage und Grösse*, ausgenommen in dem Fall, wenn in b, alle diese Figuren einander *ähnlich* sind, oder wenn in c, der Raum S dem Unterschiede *ähnlicher Figuren* gleich ist, in welchen Fällen der Ort des Durchschnittspunktes eine *grade Linie* von gegebner Lage wird.

a) *Wenn zwey Punkte B und C gegeben* sind, von denen grade Linien so gezogen werden, dass sie sich zwey und zwey in Punkten A durchschneiden, und es werden beliebige Figuren gegebner Gattungen ** (f. 1.) $a = \frac{m}{q} \times MN^2$ über die ersten BA, und $b = \frac{n}{q} \times MN^2$ über die zweyten AC beschriebn, (wo MN irgend eine willkührliche Linie *bedeutet*,) und man nimmt auf der Linie BC, oder auf deren Verlängerung, einen Punkt G, und überdem eine Linie GE, so, dass sich verhält $BC : BG : CG : GE = m + n : m : n : q$, und zieht AG; *so ist allemal*, wo auch die Spitze A des Dreyecks BAC liegen möge, der Natur des Dreyecks gemäss,

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2) \text{ *, }$$ * 20. 7.

mithin stets $a \pm b = \frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AC^2)$, wie in

Folg. 1. B., die beyden Figuren gegebner Gattung a und b mögen zur Summe oder zum Uterſchied einen beſtändigen, oder einen veränderlichen Flächenraum F haben, worauf es hierbey weiter nicht ankömmt. Nur hat im erſtern Fall AG^2 einen beſtändigen und immer einerley, im letztern hingegen einen veränderlichen und ungleichen Werth, weshalb zwar im erſtern, nicht aber im letztern Fall, der Ort der Durchſchnittspunkte A eine mit dem Halbmeſſer GA, um den Mittelpunkt G, beſchriebne Kreislinie iſt *.

*f. 1. B.

Fig. 52. *Wird alſo noch ein dritter Punkt D gegeben, und der Gattung nach noch eine dritte Figur* $c = \frac{p}{q} \times MN^2$, und *durchſchneiden ſich nun drey von den Punkten B, C, D aus gezogne grade Linien in Einem Punkte A ſo, daſs die Summe oder der Unterſchied der drey Figuren gegebner Gattungen a, b, c, über dieſe Linien beſchrieben, einem gegebnen, unverän derlichen Flächenraum F' gleich ſind,* ($a \pm b \pm c = F'$,) ſo muſs, wenn man ſtatt $a \pm b$, ſetzt $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2)$, welches für jede Bedingung erlaubt iſt, allemal auch $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2) \pm c = F'$, folglich

$$AG^2 \times \frac{m+n}{q} \pm c = F' - R \times \frac{m+n}{q} \textit{ im Fall von } a+b$$

$$AG^2 \times \frac{m-n}{q} \pm c = R \times \frac{m-n}{q} - F' \textit{ im Fall von } a-b$$

ſeyn. Mithin müſſen dann in beyden Fällen die Linien BA, CA, DA sich drey und drey so in Punkten A durchschneiden, dass wenn man von dem Punkte G aus, (der auf die angezeigte Art, durch die Gattung der Figuren a und b bestimmt, und also gegeben ist,) GA zieht, entweder die Summe, oder der Unterschied zweyer Figuren gegebner Gattungen über GA und DA beschrieben, einem gegebnen Flächenraume gleich ist, nemlich dem Unterschiede der gegebnen Räume F′ und $R \times \frac{m \pm n}{q}$. Es tritt dann also allemal für die Linien GA, DA der *Fall A, der vorigen Folgerung* ein, und vermöge des dort Bewiesenen muss *der geometrische Ort der Durchschnittspunkte A jener drey Linien,* wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Grösse seyn. Und zwar, wenn man *erst*, im Fall der Summe a + b auf BC selbst, im Fall des Unterschieds a — b hingegen auf ihrer Verlängerung einen Punkt G so bestimmt, dass sich verhält BG : CG = m : n, und *dann* auf ähnliche Art, je nachdem c additiv oder subtractiv ist, auf GD oder auf deren Verlängerung einen Punkt G′ so nimmt, dass sich verhält GG′ : DG = m ± n : p, (da denn die Punkte G, G′, die Abschnitte BG, CG und GG′, DG′, und die Rechtecke aus den erstern R, und aus den letztern R′ gegeben sind); *so ist G′ der Mittelpunkt dieser Kreislinie*, und auf diese Bestimmung des Mittelpunkts hat *lediglich die Gattung*, nicht aber die Grösse der Figuren a, b, c Einfluss. *Der Halbmesser* der Kreislinie bestimmt sich hingegen daraus, dass dann, *im Fall die Summe aller drey Figuren* gegebner Gattung dem Raume F′ gleich ist, nach Folg. 1. B. seyn muss

$$G'A^2 \times \frac{m+n+p}{q} = F' - R \times \frac{m+n}{q} - R' \times \frac{m+n+p}{q}$$

(und auf eine ähnliche Art, *im Fall der Unterschied* einiger der Figuren gegebner Gattung von den andern, dem Raume F′ gleich ist, nur dass dann einige der subtractiven Theile dieser Formel additiv, und umgekehrt einige der additiven subtractiv werden, wie man sich das leicht aus Folgerung 1. B. entwickeln wird.) Folglich ist dann sowohl die Gattung, als die Grösse einer über G′A beschriebnen Figur, mithin G′A selbst, zugleich mit F′ gegeben und unveränderlich, und dieser Halbmesser des Ortes läst sich nach den Aufgaben zu Ende dieses Buchs ohne Schwierigkeit durch geometrische Construction, so wie dessen Zahlwerth durch Rechnung finden. Ist aber F′ kein unveränderlicher Raum, so ist auch die Figur gegebner Gattung über G′A, und diese Linie selbst, von veränderlicher Grösse, und dann also der Ort der Punkte A keine um G′ beschriebne Kreislinie.

Ist dann aber noch ein vierter Punkt E gegeben, und der Gattung nach eine vierte Figur $d = \frac{r}{q} \times MN^2$, und durchschneiden sich die aus den vier Punkten B, C, D, E gezogne grade Linien, je vier in Einem Punkte A, so, dass die *Summe* der vier Figuren gegebner Gattungen a, b, c, d, über diese Linien beschrieben, *einem gegebnen unveränderlichen Flächenraum F″ gleich sind,*

($a + b + c + d = F''$); so muſs, (wenn man aus der Gattung von drey dieſer Figuren, z. B, aus a, b, c, und aus der Lage der Punkte B, C, D, wie im vorigen Fall, den Punkt G′ beſtimmt, und nach den Durchſchnittspunkten A die grade Linie G′A zieht,) wiederum die vorige Gleichung beſtehn. Fügt man folglich, beyderſeits die vierte Figur gegebner Gattung d hinzu, und ſetzt ſtatt $F' + d$ den Raum F'', ſo erhält man für jeden Durchſchnittspunkt A die Gleichung

$$G'A^2 \times \frac{m+n+p}{q} + d = F'' - R \times \frac{m+n}{q} - R' \times \frac{m+n+p}{q}.$$

Die Durchſchnittspunkte A je vier ſolcher Linien, ſind folglich wiederum ſo beſchaffen, daſs wenn man von den beyden gegebnen Punkten G′ und E aus, nach ihnen die graden Linien G′A und EA zieht, Figuren gegebner Gattungen über dieſe Linien beſchrieben, zuſammengenommen einem gegebnen und unveränderlichen Flächenraume gleich ſind. *Der Ort dieſer Durchſchnittspunkte* iſt alſo wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Gröſse,* deren Mittelpunkt und *f. 1. B.
Halbmeſſer man wieder grade ſo, wie im vorigen Fall, nach Folg. 1. B. findet. Man theile nemlich, nachdem man den Punkt G′ beſtimmt hat, die Linie G′E im Punkte G″ nach dem Verhältniſſe von $m + n + p : r$ ein, (d. h. nach dem Verhältniſſe der beyden Figuren gegebner Gattung über G′A und EA, wenn ſie auf derſelben Grundlinie ſtehn); ſo erhält man den *Mittelpunkt*

und der *Halbmesser* G″A wird wider durch eine ähnliche Formel wie vorhin bestimmt,

$$G''A^2 \times \frac{m+n+p+r}{q} = F'' - R \times \frac{m+n}{q}$$
$$- R' \times \frac{m+n+p}{q} - R'' \times \frac{m+n+p+r}{q}.$$

Wird noch ein fünfter, und dann noch ein *sechster*, ein *siebenter Punkt* u. s. f. unter ähnlichen Bedingungen gegeben, so geht, wie man leicht sieht, die Schlussfolge grade so, wie hier für drey und vier Punkte fort, daher unsere Behauptung auch für 5, für 6, für 7, kurz für jede Zahl von Punkten gilt.

Wenn man folglich aus einer beliebigen Anzahl gegebner Punkte grade Linien so zieht, dass sie sich insgesammt in Einem Punkte, und zwar so durchschneiden, dass Figuren von gegebner Gattung, welche man über diese Linien beschreibt, zusammengenommen einem gegebnen Flächenraum gleich sind; so ist allemal der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes eine der Lage und Grösse nach gegebne Kreislinie, so dass jeder Punkt einer bestimmten Kreislinie, und kein Punkt ausserhalb derselben, mit den gegebnen Punkten grade Linien bestimmt, welche die erwähnte Eigenschaft haben. — Verhalten sich die der Gattung nach gegebnen, über BA, CA, DA, EA, u. s. f. zu beschreibenden Figuren, zu den Quadraten dieser Linien, wie m, n, p, r, u. s. f. zu q; und man theilt die grade Linie BC, im Punkte G nach dem Verhältnisse m : n ein, ferner GD, im Punkte G′ nach dem

Verhältnisse $m+n:p$, und G'E im Punkte G" nach dem Verhältnisse $m+n+p:r$ u. s. f.; so findet man den *Mittelpunkt dieses Kreises:* und der *Halbmesser* desselben wird durch den gegebnen Flächenraum, durch die gegebnen Gattungen der Figuren a, b, c etc., und durch die Rechtecke aus den Abschnitten der Linien BC, G'D, G"E u. s. f., durch Formeln, deren Gesetz leicht zu übersehn ist, bestimmt.

b) *Dass der Satz in dieser Allgemeinheit auch für den Fall gilt, da der Unterschied der Figuren gegebner Gattungen, einem gegebnen unveränderlichen Flächenraum gleich ist*, fällt aus unserer Erörterung für 2 und 3 Punkte in die Augen. Der einzige Unterschied dabey ist, dass für jede subtractive Figur, der durch ihre Gattung bestimmte Punkt G in einer Verlängerung zu nehmen, und die Grösse der Figur gegebner Gattung über GA aus F, R, R' etc. auf andre Art zusammenzusetzen ist.

c) *Ist endlich die Summe einiger der Figuren gegebner Gattung, der Summe der übrigen, sammt einem gegebnen Raume S gleich*; so ist der Unterschied der Figur gegebner Gattungen dem Raume S gleich: also auch der Satz C, in dieser Allgemeinheit wahr *. *(f. 1. C)

Der erstere von diesen Sätzen, welche zu den allgemeinsten und elegantesten in der geometrischen Analysis gehören, wird in *Apollonius ebnen Oertern II. 5. Fall 2 und 3* dargethan. Bloss der Beweis für 3 Punkte und den Fall der Summe, nimmt dort 16 Seiten ein, indem er durch alle Verschiedenheiten, (wenn alle 3 Figuren gegebner Gattung Quadrate sind, oder wenn ihrer 2, oder wenn 1, oder wenn keine ein Quadrate ist,) umständlich durchgeführt wird, und obgleich *Simſon* den Fall des Unterſchieds ganz übergeht, ſo füllt doch der ganze Satz über 30 Seiten. Der deutſche Ueberſetzer, *Camerer*, hat dort arithmetiſche und trigonometriſche Formeln zur Beſtimmung des Halbmeſſers hinzugefügt, die aber, wie ſich ſchon aus unſern Formeln ſchlieſsen läſst, auſserordentlich weitläufig werden. — Daſs im Fall der Summe der gegebne Raum F nothwendig gröſser ſeyn muſs als die Summe aller ſubtractiven Räume, fällt aus der Beſtimmung des Halbmeſſers in die Augen.

Stellt man ſich alle gegebene Punkte B, C, D etc. als gleich ſchwer vor, ſo findet man den Lehren der Statik gemäſs, ihren *Schwerpunkt* grade auf dieſelbe Art, wie man hier den Mittelpunkt G der Kreislinie findet, welche der geometriſche Ort des Durchſchnittspunktes A für den Fall iſt, daſs alle Figuren über BA, CA u. ſ. f. Quadrate ſind. Daher hat umgekehrt jeder Kreis, welcher aus dem Schwerpunkte mehrerer in einer Ebne gegebner, und gleich ſchwerer Punkte beſchrieben wird, die Eigenſchaft, daſs wenn man von allen dieſen Punkten, nach irgend einem Punkte der Kreislinie, grade Linien zieht, die Quadrate über dieſe Linien zuſammengenommen immer dem nemlichen Flächenraume gleich ſind; ein Satz den Simſon aus *Hughens Horologium Oſcillatorium prop. 12* entlehnt, und unſerm Satz *a* gemäſs noch erweitert.

Folgerung 3. Aus dieſen Sätzen flieſsen in Verbindung mit unſerm Lehrſatz umgekehrt folgende *intereſſante Eigenſchaften der Kreislinie*, wodurch die Eigenſchaft, welche wir in Lehrſatz 17, Folgerung 2 kennen gelernt haben, ausnehmend verallgemeinert wird.

Fig. 51. *Nimmt man nemlich auf einem der Durchmeſſer einer Kreislinie, oder auf deren Verlängerung, willkührlich zwey Punkte B und C, und zieht von beyden nach einem beliebigen*

Punkte M der Kreislinie grade Linien BM, CM; ſo haben zwey Figuren gegebner Gattung, welche man über dieſe Linien beſchreibt, (nemlich ſolche Figuren, die über einerley Linie beſchrieben, ſich wie die Entfernungen CG und BG verhalten,) *für jeden Punkt der Kreislinie, falls B und C zu entgegengeſetzten Seiten des Mittelpunktes G liegen, immer einerley Summe: falls hingegen B und C zu einerley Seite des Mittelpunkts G liegen, immer einerley Unterſchied.* Denn iſt *erſtens* M ein Punkt *auſserhalb* des Durchmeſſers BC, und man zieht MB, MC, MG, ſo entſteht ein Dreyeck MBC, von deſſen Spitze, im erſten Fall nach der gegenüberſtehenden Grundlinie, im zweyten nach ihrer Verlängerung eine grade Linie AG gezogen iſt, für welches folglich nach der Form γ unſers Lehrſatzes, $MB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm MC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \pm (BG \times CG \pm MG^2)$ iſt. Nun ſind B, G, C gegebne Punkte, alſo BG und CG unveränderliche Linien, wie auch der Halbmeſſer des Kreiſes MG, und die beliebig gegebne Linie GE. Mithin ſind die Räume rechts vom Gleichheitszeichen, für jeden Punkt M in der Kreislinie, der auſserhalb BC liegt, von einerley Gröſse, alſo auch die Räume links vom Gleichheitszeichen. Folglich haben zwey der Gattung nach gegebne Figuren über MB und MC beſchrieben, und zwar zwey Figuren, die über dieſelbe Linie beſchrieben ſich wie CG : BG verhalten, im *erſten* Fall zuſammengenommen, im *zweyten* von einander abgezogen, immer einerley Gröſse. Daſs dieſes *zweytens* auch für die beyden Punkte N der Kreislinie, welche *in* der Linie BC liegen, und für welche kein Dreyeck MBC vorhanden

*S 329. ist, gilt, folgt aus *Proklus Lehnsatz* in Anmerk. 1*, indem nach der Form γ dieses Lehnsatzes, auch für jene beyden Punkte, $NB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm NC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm MG^2)$ ist.

Fig. 54. *Nimmt man in oder ausserhalb der Kreislinie willkührlich drey Punkte, B, C, D, und zieht von ihnen nach Einem Punkte M der Kreislinie grade Linien, so haben auf dieselbe Art drey Figuren bestimmter Gattungen über diese Linien beschrieben, für jeden Punkt M einerley Summe, oder nach Umständen einerley Unterschied.* Und zwar, wenn man BC, und von D nach dem Mittelp. G, DG zieht, und diese beyden Linien sich in einem Punkte H durchschneiden, so wird die Gattung der Figuren über BM, CM, DM, durch das Verhältniss der Abschnitte CH : BH und HG : DG, wie in Folgerung 2. bestimmt. *Und dasselbe gilt für 4, für 5, kurz für jede beliebige Zahl willkührlich angenommener Punkte,* wofür der Beweis nach Anleitung des Beweises in Folgerung 2. sich ohne Schwierigkeit, grade so wie für 2 Punkte führen lässt.

Anmerkung 2. Diese interessanten Folgerungen aus unserm allgemeinen Lehrsatz, habe ich unmittelbar auf die Auslegung der verschiednen Formen desselben folgen lassen, weil sie sich lediglich auf diese gründen. In den folgenden *Zusätzen* füge ich nun noch *die Entwickelung einiger besondrer Sätze* hinzu,

* 20. *die in unserm allgemeinen Lehrsatze* liegen*, und aus deren grosser Brauchbarkeit in geometrischen Untersuchungen, die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes noch einleuchtender werden wird.

Zusatz I. 1) *Wenn in einem Dreyeck ABC aus der Spitze nach der Verlängerung der Grundlinie BC eine grade Linie Ag so gezogen ist, dass*, wenn S einen gegebnen Raum bedeutet, *sich verhält* $AB^2 - S : AC^2 = Bg : Cg$; *so ist allemal das Rechteck aus der Grundlinie und dem grössern Abschnitt BG, grösser als der gegebne Raum S.* Fig. 45.

Denn es ist alsdann $AB^2 - S = AC^2 \times \frac{Bg}{Cg}$ *, *V. 3. α.

folglich $S = AB^2 - AC^2 \times \frac{Bg}{Cg} = BC \times Bg - Ag^2 \times \frac{BC}{Cg}$ *, * 20. β.

und mithin $S > BC \times Bg$.

2) *Wird hingegen AG nach einem Punkte in der Grundlinie selbst so gezogen, dass sich verhält* $S - AB^2 : AC^2 = BG : CG$, *so muss dass Rechteck* $BC \times BG$ *kleiner als der gegebne Raum S seyn.* Denn alsdann ist $S = AB^2 + AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG + AG^2 \times \frac{BC}{CG}$ *, also * 20. β.

$S > BC \times BG$.

Beyde Sätze kommen in *Apollonius* ebnen Oertern II Lemma 4 und 5 vor, und ihr Beweis wird dort weit hergehohlt.

Zusatz II. Nach der Aussage δ unsers Lehrsatzes, ist, wenn man in einem Dreyeck ABC, die Linie AG willkührlich nach einem Punkte der Grundlinie oder deren Verlängerung zieht, immer Fig. 45.

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2,$$

wo die obern Zeichen für den erstern, die untern für den letztern Fall gelten.

Fig. 36. 1) *Zieht man folglich AG nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie*, da dann BG = CG = $\frac{1}{2}$ BC wird, so ist immer $\frac{1}{2}$ AB^2 + $\frac{1}{2}$ AC^2 = BG^2 + AG^2; unser Lehrsatz 17, welcher also der einfachste Fall dieses allgemeinen Satzes ist. — Zieht man Ag nach einem Punkte in der verlängerten Grundlinie, so dass BC = Cg wird, so erhält man ebenfalls die Aussage jenes Lehrsatzes.

Fig. 45. 2) *Zieht man AG so, dass BG = 2 CG, und mithin BC = 3 CG ist*, so ist $\frac{1}{3}$ AB^2 + $\frac{2}{3}$ AC^2 = 2 CG^2 + AG^2 u. s. f.

3) *Ist überhaupt BG = m . CG*, folglich, im Fall G in der Grundlinie liegt BC = (m + 1) CG, falls aber G in der verlängerten Grundlinie liegt BC = (m — 1) CG; so ist

$$\text{im \textit{ersten Fall}} \ \frac{AB^2 + m \,.\, AC^2}{m + 1} = m \,.\, CG^2 + AG^2$$

$$\text{im \textit{zweyten}} \ \frac{AB^2 - m \,.\, AC^2}{m - 1} = m \,.\, CG^2 - AG^2;$$

Aussagen, welche sich beyde in folgende Formel zusammenziehn lassen,

$$AG^2 = \frac{1}{1 \pm m} \,.\, AB^2 \pm \frac{m}{1 \mp m} \,.\, AC^2 \mp m \,.\, CG^2$$

wo die obern Zeichen für den ersten, die untern Zeichen für den zweyten Fall gelten.

Fig. 48. Zusatz III. 1) *Zieht man AG senkrecht auf die Grundlinie oder deren Verlängerung*, so wird AG^2 = AB^2 — BG^2, und setzt man diesen Werth in δ, so

geht die allgemeine Ausſage, je nachdem der Winkel B ſpitz oder ſtumpf (d. i. $BC = BG + CG$ oder $BG - CG$) iſt, in die beyden Ausſagen des dreyzehnten Lehrſatzes über; eine Ableitung, die ich dem Leſer überlaſſe. Auch dieſer Satz iſt alſo nur ein beſondrer Fall unſers Allgemeinen.

2) *Iſt das Dreyeck ABC gleichſchenklig, und AG von der Spitze nach der Grundlinie oder deren Verlängerung gezogen*, ſo verwandeln ſich in δ die Theile links vom Fig. 48.

Gleichheitszeichen in dieſe $AB^2 \times \left(\frac{CG \pm BG}{BC}\right) = \pm AL^2$,

indem, im Fall G in der Verlängerung der Grundlinie liegt, der Vorausſetzung bey unſern Formeln gemäſs, $Bg - Cg = BC$ iſt. Es iſt alſo im gleichſchenkligen Dreyeck $\pm AB^2 = BG \times CG \pm AG^2$ oder $AB^2 = AG^2 \pm BG \times CG$; ein fruchtbarer Satz, bey dem ich mich hier weiter nicht verweile, weil ich ihn, zum Behuf derer, die unſern allgemeinen Lehrſatz überſchlagen haben, bald als einen beſondern Lehrſatz aufführen und noch auf andre Art beweiſen werde *. * 21.

Zuſatz IV. 1) *Zieht man in einem Dreyeck ABC die grade Linie AG ſo nach der Grundlinie BC oder nach deren Verlängerung, daſs ſich die beyden Abſchnitte BG, CG, wie die Schenkel, an welchen ſie anliegen, verhalten, $BG : CG = AB : AC$; ſo iſt das Rechteck aus den beyden Schenkeln, gleich, im erſten Fall der Summe, im zweyten dem Unterſchiede des Rechtecks aus den beyden Abſchnitten BG, CG, und des Quadrats der theilenden Linie, oder $AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2$.* Fig. 50.

Denn aus der vorausgesetzten Proportion fließt auch die Proportionalität folgender Grössen
V.4.β. $BG \pm CG : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$, d. h. da im ersten Fall $BG + CG = BC$, im zweyten aber, der Bedingung unsers Lehrsatzes gemäss, $BG - CG = BC$ ist, $BC : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$. Folglich ist $\frac{BG}{BC} = \frac{AB}{AB \pm AC}$ und $\frac{CG}{BC} = \frac{AC}{AB \pm AC}$.
Setzt man diese Werthe in unsrer Form δ, so wird in diesem Fall der Theil links vom Gleichheitszeichen, das ist $AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC}$

$$= \frac{AB^2 \times AC}{AB \pm AC} \pm \frac{AC^2 \times AB}{AB \pm AC} = AB \times AC \times \frac{AB \pm AC}{AB \pm AC}$$

$= AB \times AC$; und mithin ist in diesem Fall immer

$$AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2.$$

Auch dieser bekannte und brauchbare Satz, der gewöhnlich aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke bewiesen wird, und der auch bey *Le Gendre* und *van Swinden* vorkömmt, ist also ein besonderer Fall unsers allgemeinen Lehrsatzes. Dass er auch für einen Punkt in der Verlängerung der Grundlinie, nur mit der Verschiedenheit gelte, dass dann die Summe in den Unterschied übergeht, scheint man bey dem gewöhnlichen Beweise desselben übersehn zu haben.

2) Es sey $AB = m \cdot AC$, und folglich, da $BG : CG$, dem Verhältnisse $AB : AC$ gleich ist, $BG = m \cdot CG$, so erhält unsere Aussage folgende Gestalt, $m \cdot AC^2 = m \cdot CG^2 \pm AG^2$, so dass also unter der Bedingung dieses Zusatzes für jeden Punkt G *in der* BG

Grundlinie, $AG^2 = m.(AC^2 - CG^2) = \frac{1}{m}.(AB^2 - BG^2)$, und für jeden Punkt g *in der verlängerten Grundlinie*

$Ag^2 = m\ (Cg^2 - AC^2) = \frac{1}{m}\ (Bg^2 - AB^2)$ ist.

Zusatz V. 1) *Zieht man endlich von der Spitze eines Dreyecks ABC, die grade Linie Ag so nach der Verlängerung der Grundlinie, dass die Abschnitte Bg, Cg sich wie die Quadrate der Schenkel, an welche sie anliegen verhalten, $Bg : Cg = AB^2 : AC^2$; so ist allemal das Rechteck aus den Abschnitten, dem Quadrat der theilenden Linie gleich, $Bg \times Cg = Ag^2$, oder diese Linie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten.*

Denn aus der angenommnen Proportion folgt, dass $AB^2 \times Cg = AC^2 \times Bg$, folglich $AB^2 \times \frac{Cg}{BC} - AC^2 \times \frac{Bg}{BC} = o$ sey. Da nun dieser Unterschied, nach unserer Form δ, gleich ist $Bg \times Cg - Ag^2$, so müssen auch diese Räume keinen Unterschied haben, also gleich seyn, oder es ist alsdann immer $Bg \times Cg = Ag^2$, und folglich $Bg : Ag = Ag : Cg$ *. *4. f. 1.

Apollonius ebne Oerter II. Lemma 2, und *Pappus* VII. 119, wo dieser Hülfssatz aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke abgeleitet wird.

2) *Für einen Punkt G in der Grundlinie*, der diese so schneidet, dass die Abschnitte sich wie die Quadrate der anliegenden Schenkel verhalten, ist $2\ AB^2 \times \frac{CG}{BC}$

$= BG \times CG + AG^2$; eine Erweiterung dieses Hülfssatzes, die ich nicht erwähnt finde.

Zusatz VI. *Wenn man von zwey gegebnen Punkten B, C aus, grade Linien zieht, die sich in einem Punkte A so durchschneiden, daſs je zwey dieser Linien zwar ungleich sind, aber ein gegebnes und unveränderliches Verhältniſs zu einander haben; so ist der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes, eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse.*

Denn ist das Verhältniſs dieser Linien AB, AC gegeben, so ist auch das Verhältniſs ihrer Quadrate bekannt. Nimmt man daher auf der Verlängerung der Linie BC einen Punkt g so, daſs Bg, Cg in diesem Verhältniſs der Quadrate über AB, AC stehn, und zieht Ag, so ist nach Zusatz V, $Ag^2 = Bg \times Cg$. Nun sind die Punkte B, C, und g gegeben und unveränderlich; also auch Ag^2, und die Seite Ag. Mithin ist *der Ort der Spitze A*, eine mit Ag um g beschriebne *Kreislinie*.

Ist das gegebne Verhältniſs der Linien BA : CA, das Verhältniſs der Gleichheit, so ist kein Punkt in der Verlängerung der Linie BC möglich, für welchen Bg : Cg in dem gegebnen Verhältnisse stünden, da Bg immer um BC gröſser oder kleiner als Cg ist. — Hingegen giebt es einen solchen Punkt G in der Linie BC selbst, für welchen $BG = CG = \frac{1}{2}$ BC ist, und für diesen wird, laut der zweyten Aussage in Zusatz V, $AB^2 = BG^2 + AG^2$, also der Ort der Durchschnittspunkte A für diesen Fall ein Perpendikel auf der Mitte der Linie BC *.

* 14.

Zusatz VII. Umgekehrt hat *jede Kreislinie die Eigenschaft*, dafs *wenn man innerhalb oder aufserhalb des Kreises willkührlich einen Punkt, z. B. C nimmt, und auf dem Durchmesser durch C, nach derselben Seite hin, einen zweyten Punkt B so, dafs das Rechteck aus den Entfernungen dieser beyden Punkte vom Mittelpunkte g, dem Quadrat des Halbmessers gN gleich ist*, $gC \times gB = gN^2$, oder, was auf eins hinaus kömmt, *so dafs gB die dritte Proportionallinie zu gC und dem Halbmesser gN ist; so stehn je zwey grade Linien, MB : MC, welche man von diesen Punkten C, B aus, nach demselben Punkte M der Kreislinie zieht, insgesammt in gleichem Verhältnifs, und zwar im Verhältnifs des Halbmessers und eines der Abschnitte, gB : gN*, oder *der beyden Linien NB : NC*, oder *BP : CP*.

Denn zieht man nach demselben Punkte M der Kreislinie BM, CM, gM, so entsteht ein Dreyeck BMC, von dessen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, Mg so gezogen ist, dafs $Bg \times Cg = Ng^2 = Mg^2$ ist, daher vermöge δ auch $MB^2 \times Cg = MC^2 \times Bg$ seyn *, und folglich sich verhalten mufs $MB^2 : MC^2 = Bg : Cg$. Nun aber ist der Mittelpunkt g, der Halbmesser gN, und einer der Punkte B, C, mithin auch der andre, also das Verhältnifs der Linien Bg : Cg, folglich das diesen gleiche Verhältnifs der Quadrate $MB^2 : MC^2$, und also auch *das Verhältnifs* der Seiten dieser Quadrate *MB : MC gegeben und unveränderlich.* * 20. δ.

Da nun die Punkte B und C, der Voraussetzung nach so bestimmt sind, dafs sich verhält gB : gN

$= gN : gC$, oder, wenn man diese gleichen und ste-
*V. 6. tigen Verhältnisse zusammen setzt * $gB : gC = gB^2 : gN^2$ oder auch wie $gN^2 : gC^2$; so verhalten sich die Quadrate $MB^2 : MC^2 = gB^2 : gN^2$, und folglich je zwey Linien $MB : MC = gB : gN$ *oder wie* $gN : gC$, *oder endlich* wie $gB \mp gN : gN \mp gC$ d. i. wie $BN : NC$ oder wie
*V. 4. ß. $BP : CP$ *. Mithin *verhält sich die grössere je zwey solcher Linien MB, MC zur kleinern, wie der grössere Abschnitt zum Halbmesser*, oder *wie der Halbmesser zum kleinern Abschnitt*, oder *wie die beyden an diesen Linien anliegenden Abschnitte, in welche BC durch die Kreislinie getheilt wird.*

Da der Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen den Entfernungen der beyden Punkte B, C, vom Mittelpunkte g ist; so können die Linien gB, gC, nicht beyde zugleich grösser, oder beyde zugleich kleiner als der Halbmesser seyn, folglich die Punkte B, C nicht beyde zugleich innerhalb oder ausserhalb des Kreises, eben so wenig als zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes genommen werden.

Anmerkung. Die Aussagen in Zusatz 6 und 7, welche zu den schönsten Sätzen über den Kreis gehören, machen in *Apollonius ebnen Oertern* den zweyten Ort des zweyten Buchs aus, und lassen sich auch aus Sätzen des nächsten Buchs folgern. In der That sind sie aber nur der einfachste Fall der Aussage C
*f. 1. D. in Folgerung 1 *, und *lassen sich daher noch sehr verallgemeinern.*

Wenn nemlich beliebig viel Punkte z. B. B, C, D in einer Ebne gegeben sind, und grade Linien von diesen Punkten aus gezogen sich (in diesem Fall je drey) so in Punkten, A durchschneiden, dass sie zu einander stets in demselben gegebnen Verhältnisse stehn, so ist der Ort der Durchschnittspunkte A stets eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse. Denn da alsdann auch die

Quadrate über diese Linien in einem gegebnen, unveränderlichen Verhältnisse stehn, z. B. $BA^2 : CA^2 : DA^2 = m : n : p$; so ist $BA^2 + CA^2 : DA^2 = m + n : p$., und mithin $BA^2 + CA^2 = DA^2 \times \frac{m+n}{p}$ oder eine Figur gegebner Gattung über DA beschrieben, gleich der Summe der Quadrate über die anderen Linien. Es ist dann also auch der Unterschied dieser Quadrate und der Figur gegebner Gattung über DA, gleich einem gegebnen Flächenraume, nemlich dem Flächenraume o, und deshalb der Ort der Punkte A eine Kreislinie, deren Mittelpunkt und Halbmesser, wie in Folgerung 2., bestimmt wird.

[LEHRSATZ 21.]

Zieht man aus der Spitze A eines gleichschenkligen Dreyecks ABC nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, oder nach einem Punkte g in deren Verlängerung, eine grade Linie, so ist stets der Unterschied der Quadrate aus dieser Linie und aus einem der gleichen Schenkel, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten auf der Grundlinie, BG, CG, oder auf der verlängerten Grundlinie, Bg, Cg. Fig. 38.

Da ein Perpendikel AD, aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, diese im Punkte D halbirt *, so *117.f 2.
geht für diesen Punkt das Rechteck aus den beyden Abschnitten in das Quadrat der halben Grundlinie, und also die Aussage des Lehrsatzes in folgende über, $AB^2 - AD^2 = BD^2$, welche vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes wahr ist. * *12. f. I.

Ieder andre Punkt G *in der Grundlinie* theilt diese überdem in zwey ungleiche Abschnitte, BG, GC, mit-

*II.f.1.α hin so, daſs $BG \times GC = BD^2 - DG^2$ iſt *, oder, da im Dreyeck BAG der Unterſchied dieſer Quadrate, dem Unterſchiede der Quadrate aus den Schenkeln AB, AG

* 16. 1. gleich iſt *, ſo, daſs iſt

$$BG \times GC = AB^2 - AG^2.$$

Für jeden Punkt *in der Verlängerung der Grundlinie*, haben wir eine in D gleich getheilte Linie BC, welcher ein Stück Cg angeſetzt, für die folglich $Bg \times gC = Dg^2 - DC^2$ iſt. Und da wiederum im Dreyeck CAg der Unterſchied dieſer Quadrate aus den Abſchnitten der Grundlinie, dem Unterſchiede der Quadrate aus

* 16. 1. den Schenkeln Ag und AC = AB gleich iſt *,

$$Bg \times gC = Ag^2 - AB^2.$$

Man nehme alſo den Punkt G in der Grundlinie ſelbſt, oder in deren Verlängerung, allemal iſt *das Rechteck aus dem Abſtande dieſes Punktes von den beyden Endpunkten B, C der Grundlinie, gleich dem Unterſchiede der Quadrate aus der Linie AG und einem der gleichen Schenkel*, nur mit dem Unterſchiede, daſs im erſten Fall der Schenkel *gröſser*, im zweyten *kleiner* als die Linie AG iſt; welches ſich aus der Natur des gleichſchenkligen

* I. 16. Dreyecks von ſelbſt verſteht *.

Folgerung. Das Quadrat einer graden Linie AG, welche durch die Spitze des gleichſchenkligen Dreyecks gezogen wird, iſt folglich, je nachdem ſie auf der Grundlinie, oder auf deren Verlängerung aufſteht,

$AG^2 = AB^2 - BG \times GC$ oder $Ag^2 = AB^2 + Bg \times gC$; Ausſagen, die man bequem in folgende zuſammenfaſst

$$AG^2 = AB^2 \mp BG \times GC$$

wo das *obere* oder das *untere* Zeichen gilt, je nachdem der Punkt G *in der Grundlinie* BC selbst, oder *in deren Verlängerung* liegt. Grade so ist

$$AB^2 = AG^2 \pm BG \times GC;$$

ein Satz, den wir schon oben gehabt haben *. *20Z3.2

Zusatz. Iede *Sehne eines Kreises, welche kein Durchmesser ist, z. B. AB*, bildet mit den beyden Halbmessern, die nach ihren Endpunkten gezogen werden, *ein gleichschenkliges Dreyeck ABC*, welches den Mittelpunkt zur Spitze, die Sehne selbst zur Grundlinie, und den Halbmesser zu Schenkeln hat. Durch unsern Lehrsatz wird mithin folgende artige *Eigenschaft dieser Sehnen* begründet: Taf. IV. Fig. 55.

1) Iede grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte C eines Kreises nach irgend einem Punkte O *in einer Sehne wie AB, gezogen ist*, theilt diese so in zwey Abschnitte AO, OB, dass $AO \times OB = CA^2 - CO^2$ ist. Und auf diese Art *wird auch der Durchmesser HI, der durch den Punkt O geht, (folglich jede Sehne durch O)* mittelst dieses Punktes eingetheilt. Denn giebt es gleich, da der Mittelpunkt C in HI liegt, alsdann kein gleichschenkliges Dreyeck, wie für die übrigen Sehnen, so ist doch HI im Punkte C gleich, im Punkte O ungleich getheilt, und deshalb gleichfalls das Rechteck $HO \times OI = CI^2 - CO^2$ *. *11.f.1α

2) Eine grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte o *in der Verlängerung einer Sehne wie AB* gezogen ist, schneidet dagegen auf ihr zwey Abschnitte Ao, Bo, so ab, dass $Ao \times oB = Co^2 - CA^2$

ist. Und *auch der Durchmesser, der durch den Punkt o geht, (folglich jede Sehne durch o)* wird mittelst des Punktes o auf diese Art eingetheilt, da dem in C gleich getheilten Durchmesser HI, in diesem Fall, ein Stück
*115.1.β Io angesetzt, folglich $Ho \times oI = Co^2 - CI^2$ ist *.

In beyden Fällen, der Punkt O liege in einer Sehne, oder in deren Verlängerung, *ist also immer das Rechteck aus den Abschnitten, die durch diesen Punkt gebildet werden, (oder noch bestimmter das Rechteck aus dem Abstand des Punktes O von den beyden Endpunkten A, B der Sehne), gleich dem Unterschiede der Quadrate aus dem Halbmesser und aus der Linie CO.*

3) Diese Linie CO selbst, und der Halbmesser CA, werden durch folgende Ausdrücke gegeben,

$$CO^2 = CA^2 \mp AO \times OB$$
$$CA^2 = CO^2 \pm AO \times OB$$

wo die obern oder die untern Zeichen gelten, je nachdem der Punkt O in der Sehne, oder in deren Verlängerung liegt.

[LEHRSATZ 22.]

Taf. III. Fig. 55. 1) *Wenn mehrere Sehnen insgesammt durch einen Punkt O im Kreise gehn, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche auf jeder Sehne durch diesen Punkt abgeschnitten werden, sowohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der halben Sehne gleich, welche mit dem Punkte O gleich weit vom Mittelpunkte absteht, z. B.* $AO \times OB = DO \times OE = OF^2$.

2) *Wenn dagegen die Verlängerungen mehrerer Sehnen insgesammt durch einen Punkt o ausserhalb des Kreises gehn, so sind die Rechtecke aus der ganzen schneidenden Linie und aus der Verlängerung, so wohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der Tangente gleich, welche vom Punkte o nach dem Kreise gezogen wird*, z. B. $Ao \times oB = Do \times oE = oG^2$.

Ist O der Mittelpunkt des Kreises, so sind alle Sehnen, welche durch diesen Punkt gehn, Durchmesser, die sich im Punkte O halbiren, mithin die Aussage 1 richtig. — Ist O nicht der Mittelpunkt, so ziehe man nach demselben die grade Linie OC. Für alle Sehnen, welche sich entweder selbst, oder verlängert in demselben Punkte O durchschneiden, ist diese Linie CO, und mithin der Unterschied der Quadrate des Halbmessers und dieser Linie, von gleicher Grösse. Da nun dieser Unterschied den Rechtecken $AO \times OB$, $DO \times OE$, $HO \times OI$ etc. dem vorigen Zusatz gemäss *. gleich ist, * 21. Z.
der Punkt O liege im Kreise oder ausserhalb des Kreises, so sind auch in beyden Fällen *alle diese Rechtecke unter sich gleich*.

Im *ersten Fall* wird eine Sehne GF, welche durch den Punkt O geht, und vom Mittelpunkte um CO absteht, vom Durchmesser durch O senkrecht durchschnitten und halbirt *, so dass $GO \times OF = OF^2$ ist. Und * II. 9.
da dieses Rechteck jedem der übrigen Rechtecke aus den beyden Abschnitten der Sehnen, die durch den

Punkt O gehn, gleich ist, so muss auch *jedes dieser Rechtecke dem Quadrate über OF gleich seyn.*

Im *zweyten Fall* ist, wenn man vom Punkte o aus eine Tangente oG am Kreise, und nach dem Berührungspunkte den Halbmesser CG zieht, CG auf oG
*II. 12. senkrecht *, daher $oG^2 = oC^2 - CG^2$ *, und folglich
* 12. *das Quadrat der Tangente oG, gleich dem Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder verlängerten Sehne, die durch den Punkt o geht*, indem jedes dieser Rechtecke, dem Unterschiede der Quadrate über Co und über dem Halb-
*21 Z. 2 messer CG, gleich ist *.

Folgerung 1. Da in Rechtecken von gleichem
4. f. 1. Inhalt, die Seiten verkehrt proportional sind, so ergeben sich hieraus unmittelbar folgende Sätze:

α) *Zwey Sehnen, welche einen Punkt O innerhalb der Kreislinie gemein haben, durchschneiden sich in diesem*
* E. 7. *Punkte verkehrt proportional* *, so dass sich verhält $AO : DO = OE : OB$;

β) und *die Hälfte der Sehne FG, welche vom Mittelpunkte um CO absteht* (oder die auf dem Durchmesser im Punkte O senkrecht steht) *ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten einer jeden solchen Sehne*, so dass sich verhält $AO : OF = OF : OB$.

γ) *Eben so werden zwey Sehnen, die sich verlängert in einem Punkte o ausserhalb des Kreises durchschneiden, durch die Kreislinie verkehrt proportional eingetheilt*, so dass sich verhält $Ao : Do = oE : oB$;

δ) und *die Tangente, welche von diesem Punkte o nach dem Kreise geht, ist zwischen der Verlängerung und* *der ganzen durchschneidenden Linie die mittlere Proportionallinie*, so daſs sich verhält Ao : oG = oG : oB.

Ueberhaupt werden alſo *zwey grade Linien, welche von Einem Punkte O nach der Kreislinie gehn, von dieſer ſtets ſo geſchnitten*, daſs die Entfernungen des Punktes O von den beyden Durchſchnittspunkten einer jeden dieſer Linien, *verkehrt proportional ſind* *, oder daſs die Rechtecke aus dieſen Entfernungen insgeſammt unter einander gleich ſind. Daſs ſich auf dieſe Eigenſchaften der Sehne und der Tangenten *Methoden* gründen laſſen, *zu drey gegebnen Linien die vierte*, oder *zu zwey die dritte Proportionallinie*, ſo wie *zwiſchen zwey gegebnen die mittlere Proportionallinie zu finden, fällt in die Augen.* * E. 7.

Folgerung 2. Iſt *von einem Punkte einer Sehne AB, eine grade Linie OF nach dem Kreiſe ſo gezogen, daſs* $OF^2 = OB \times OA$ *iſt; ſo iſt OF ein Perpendikel auf dem Durchmeſſer, der durch den Punkt O geht.* Denn verlängert man die Linie FO, bis wo ſie zum zweyten male den Kreis in G durchſchneidet, ſo iſt $OG \times OF = OB \times OA$, folglich $OF^2 = OG \times OF$ und alſo $OF = OG$; d. h. die Sehne GF wird im Punkte O halbirt, uud ſteht daher auf dem Durchmeſſer durch O ſenkrecht.

Von allen Sehnen die durch den Punkt O gehn, iſt dieſe Sehne FG (die auf dem Durchmeſſer durch O ſenkrecht ſteht) die kürzeſte. Denn unter allen Rechtecken, welche von gleichem Inhalt ſind, hat das Quadrat den kleinſten Umfang *. *12.Z.1.

Folgerung 3. α) *Ist von einem Punkte in der Verlängerung einer Sehne AB, eine grade Linie oG nach dem Kreise so gezogen, dass $oG^2 = oA \times oB$ ist; so berührt oG den Kreis im Punkte G.* Denn zieht man von o durch den Mittelpunkt des Kreises oH, so ist $oA \times oB$
* 22. 2. $= oH \times oI$ * und also $oG^2 = oH \times oI = oC^2 - CG^2$, weil dem in C halbirten Durchmesser HI, das Stück
*11 f. 1. β Io angesetzt ist *. Folglich muss das Dreyeck COG
* 14. bey G rechtwinklig * seyn, und daher oG den Kreis
* II. 12. im Punkte G berühren *.

Diese berührende Linie ist stets kleiner als die Hälfte der Summe aus den beyden Abschnitten Ao, Bo jeder Sehne,
*11. Z. 1. *die durch den Punkt o geht* *, und je zwey Abschnitte Ao, Bo einer Sehne zusammen genommen, sind stets kleiner als die beyden Abschnitte Ho, Io auf dem Durchmesser.

β) *Sind endlich nach irgend drey Punkten A, B, o einer graden Linie, von einem Punkte K grade Linien so gezogen, dass $Ko^2 = Ao \times Bo$ ist*, und man beschreibt durch AKB einen Kreis, so berührt oK diesen Kreis, vermöge α, und folglich *sind dann allemal die Winkel BKo = KAB,*
* II 24. *AKL = ABK* *, und als die Nebenwinkel der letztern KBo = AKo, mithin die Dreyecke KBo und AKo gleichwinklig.

Folgerung 4. α) *Liegen vier Punkte A, D, B, E so, dass, wenn man sie Paarweise durch grade Linie wie AB, DE verbindet, diese Linien sich entweder selbst in einem Punkte O, oder verlängert in einem Punkte o durchschneiden, und das Rechteck aus den Abschnitten AO, BO der einen, dem Rechteck aus den Abschnitten DO, EO* *der andern gleich iſt*, oder, was auf eins hinauskömmt, ſo, daſs die Entfernungen des Durchſchnittspunkts O von den beyden Punkten, die auf jeder dieſer Linien gegeben ſind, in verkehrtem Verhältniſs ſtehn; *ſo läſst ſich durch dieſe vier Punkte ſtets eine Kreislinie beſchreiben, und ein Kreis, der z. B. durch die drey Punkte A, B, C gezogen wird, muſs nothwendig auch durch den vierten E gehn.* Denn wer dieſes leugnen wollte, müſste behaupten daſs ein ſolcher Kreis die Linie DE nicht in E, ſondern in einem andern Punkte F durchſchnitte, da denn das Rechteck aus DO, FO dem Rechteck aus AO, BO, mithin, der Vorausſetzung gemäſs, dem Rechteck aus DO, EO gleich ſeyn müſste, welches nur dann möglich iſt, wenn FO = EO, und alſo F und E einerley Punkt ſind.

β) *Umgekehrt läſst ſich durch vier gegebne Punkte nur dann ein Kreis ziehn, wenn ſie entweder auf dieſe Art liegen, oder wenn ſie die Eckpunkte eines Rechtecks ſind.* Denn laufen unter den Linien, welche die vier Punkte verbinden, je zwey der gegenüberſtehenden parallel; ſo bilden ſie ein Parallelogramm, und um kein Parallelogramm, das Rechteck ausgenommen, läſst ſich ein Kreis beſchreiben *. Durchſchneiden ſich hingegen dieſe Linien, und die vier gegebnen Punkte lägen nicht auf die angezeigte Art, und doch in einem Kreiſe, ſo müſste eine grade Linie einem Kreis in drey verſchiedenen Punkten D, E, F ſchneiden können, welches unmöglich iſt. *II, 27ſt

γ) *Gehn überhaupt mehrere grade Linien durch Einen Punkt O, und es liegen entweder auf allen zu einerley,* *oder auf allen zu entgegengesetzten Seiten desselben* zwey *Punkte so, daſs die Rechtecke aus ihren Entfernungen vom Punkte O gleich sind; so liegen alle diese Punkte in einer Kreislinie*, und ein Kreis durch drey derselben beschrieben, geht auch durch alle übrigen. Und zwar liegt im ersten Fall der Punkt O auſserhalb, im zweyten innerhalb dieses Kreises. — Umgekehrt giebt dieses eine *Bedingung* ab, unter der allein ein Kreis durch gegebne Punkte gehn kann.

Alle drey Aussagen sind für die Theorie des Kreises von Wichtigkeit, und besonders wird uns der Satz α, in Verbindung mit Lehrsatz 23 und 26 im zweyten Buch, gleich im Folgenden sehr nützlich seyn.

Fig. 56. *Folgerung* 5. *Jedes Perpendikel, welches auf dem Durchmesser eines Kreises aufsteht, und vom Durchmesser bis zur Kreislinie reicht, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken, welche es auf dem Durchmesser abschneidet*, z. B. PM zwischen AP und PB, und *das Quadrat über dem Perpendikel ist dem Rechteck aus den Abschnitten des Durchmessers gleich*, $PM^2 = AP \times PB$; Aussagen, die schon in unserm Lehrsatz und in Folgerung 1. β) liegen, und die auch unmittelbar daraus folgen, daſs wenn man von dem Punkte M, wo das Perpendikel den Kreis durchschneidet, nach den Endpunkten des Durchmessers grade Linien MA, MB zieht, stets ein rechtwinkliges Dreyeck entsteht, worin der Durchmesser Hypotenuse, und MP ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ist *.

* 12. f. 2. β. γ.

Die Quadrate zweyer solcher Perpendikel stehn also auch zu einander in demselben Verhältniss, wie die Rechtecke aus den Abschnitten, z. B. $PM^2 : QN^2 = AP \times PB : AQ \times QB$; eine Eigenschat, worin der Kreis, wie wir in der Folge sehn werden, mit den übrigen Kegelschnitten übereinstimmt, nur dass für diese das Quadrat jedes Perpendikels grösser oder kleiner ist, als das Quadrat der beyden Abschnitte.

Durch Perpendikel welche man aus Punkten einer Linie auf eine grade Linie AB fällt, wird die Lage dieser Punkte, und mithin die Lage der ganzen Linie, gegen die grade Linie AB bestimmt *. Folglich dient *diese Eigenschaft der Perpendikel*, welche auf einem Durchmesser errichtet werden, *die Natur der Kreislinie in Beziehung auf ihren Durchmesser völlig zu bestimmen*, und wir können uns ihrer als *eines unterscheidenden Charakters der Kreislinie*, wodurch sie sich von allen andern Arten krummer Linien auszeichnet, bedienen, wie wir dieses besonders in dem Buche von den Kegelschnitten thun werden. — Bezeichnet man den Halbmesser der Kreislinie mit r, folglich den Durchmesser mit 2r, jedes Perpendikel mit y, und den Abschnitt des Durchmessers vom Anfangspunkte desselben A an, bis zum Perpendikel mit x, folglich den zweyten Abschnitt mit $2r - x$, (da denn natürlich die Zeichen y und x keinen festen unveränderlichen Werth haben, sondern einen Werth, der für jedes Perpendikel anders ist); so ist dieser Eigenschaft des Kreises gemäss $y^2 = x.(2r - x)$: und dieser Gleichung bedient man sich in der analytischen Geometrie als Charakter der Kreislinie, so wie umgekehrt mittelst der Natur des Kreises sich für jede solche Gleichung Linien darstellen lassen, welche zu einander das in der algebraischen Gleichung ausgedrückte Verhalten haben. Diese Linien darstellen, nennt man *eine Gleichung construiren*.

* I, 16, f.

Zusatz I. *Jede Sehne AM ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser und dem an ihr lie-*

genden Stücke AP, welches durch ein Perpendikel aus dem einen Endpunkt der Sehne auf dem Durchmesser, der durch den andern Endpunkt geht, abgeschnitten wird. Denn ist AB dieser Durchmesser, und man zieht MB, so ist AMB ein rechtwinkliges Dreyeck, worin AM, BM Katheten, folglich $AM^2 = AB \times AP$ und $BM^2 =$
*12.f.2α. $AB \times BP$ *, diese Sehnen also die mittleren Proportionallinien zwischen dem Durchmesser AB und den
*4.f.1. Abschnitten AP, BP sind *. — In einem der folgenden Lehrsätze wird dieser fruchtbare Satz noch be-
* 24. trächtlich erweitert werden *. Hier einige Folgerungen daraus.

α) Setzt man mit der Proportion

$$AM^2 : BM^2 = AP : BP$$

*V.4.δ. die identische $AM : BM = AM : BM$ zusammen *, so ergiebt sich daraus

$$AM^3 : BM^3 = AM \times AP : BM \times BP.$$

Diese letztern Rechtecke verhalten sich folglich wie die dritten Potenzen aus den Zahlausdrücken der Sehnen AM, BM, oder stehn im dreymal so hohen Ver-
* V. 6. hältniſs *.

*12.f.2.ε Grade so ist $AM^2 : PM^2 = AB : PB$ * und mithin $AM^3 : PM^3 = AB \times AM : PB \times PM$. (Gregor. a. St. Vincentio III. 91. 92.)

Auch verhält sich $PM^2 : AB \times PM = AB \times PM : AB^2$ indem die erstern und die letztern Rechtecke von gleicher Höhe sind, und sich daher wie ihre Grundlinien PM : AB verhalten. Nun ist $PM^2 = AP \times PB$ und
*12. f. 3. α. $AB \times PM = AM \times BM$ *. Folglich ist auch $AP \times PB$

: AM

$AM \times BM = AM \times BM : AC^2$, oder das Rechteck aus den beyden Abschnitten, das Rechteck aus den beyden Sehnen, und das Quadrat des Durchmessers sind in stetigem Verhältnifs (Greg. III. 81.)

β) *Zieht man von einem Punkt der Kreislinie aus mehrere Sehnen, AM, AN, AR, so verhalten sich die Quadrate derselben untereinander und zum Quadrat des Durchmessers, wie die Abschnitte AP, AQ, AS unter einander und zum Durchmesser AD.* Denn da $AM^2 = AB \times AP$, $AN^2 = AB \times AQ$, $AR^2 = AB \times AS$ ist, so verhält sich $AM^2 : AN^2 : AR^2 : AB^2 = AP : AQ : AS : AB$. Sind also z. B. die letztern Abschnitte stetig proportional, so sind es auch die Quadrate der Sehnen, und mithin die Sehnen selbst (Gregor III. 20).

Folglich verhalten sich auch hier, aus denselben Gründen wie in α, $AM^3 : AN^3 : AR^3 = AP \times AM : AQ \times AN : AR \times AS$, und auch diese Rechtecke stehn in dreymal so hohem Verhältnifs als die Sehnen AM, AN, AR. (Gregor III. 92.)

γ) *Berühren sich zwey Kreise im Punkte A*, so sind ihre Durchmesser Stücke derselbe graden Linie, die durch den Punkt A geht *. Fig. 57.

*II. 16. f. 1.

Sind daher DF, GI etc. Perpendikel auf diesem Durchmesser, welche den einen Kreis in E, H etc. den andern in F, I etc. durchschneiden, so verhält sich sowohl $AE^2 : AH^2 = AD : AG$, als auch $AF^2 : AI^2 = AD : AG$, und mithin sind die Quadrate der Sehnen im einen Kreise, mit den Quadraten der beyden Sehnen des andern Kreises, und also diese Sehnen untereinander proportional, oder $AE:AH = AF:AI$. (Greg. III. 18.)

Auch verhalten sich die Quadrate je zwey solcher Sehnen aus den verschiednen Kreisen $AF^2 : AE^2 : AD^2$ wie die Durchmesser der Kreise $AB : AC : AD$, weil $AF^2 = AD \times AB$ und $AE^2 = AD \times AC$ ist. Ist daher AD die dritte Proportionallinie zu den beyden Durchmessern, so verhält sich auch $AF^2 : AE^2 = AE^2 : AD^2$ und $AF : AE = AE : AD$, daher dann auch AE die mittlere Proportionallinie zwischen AD und AF ist. (Greg. III, 19.)

Fig. 58. Zusatz II. *Wenn sich mehrere Kreise im Punkte A berühren, und man zieht aus einem Punkte B ihrer gemeinschaftlichen Tangente grade Linien, welche diese Kreise durchschneiden, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche jeder der Kreise auf den durchschneidenden Linien abschneidet, von gleicher Grösse, z. B.* $BD \times BI = BE \times BH = BF \times BG$, *oder* $bf \times bg = bd \times be$. Denn jedes dieser Rechtecke ist dem Quadrat der berührenden Linie, AB^2 oder ab^2, gleich *. (Greg. III. 68.)

* 22. 2.

Beschreibt man daher um irgend einen Punkt B in der gemeinschaftlichen Tangente einen Kreis, der die sich berührenden Kreise in den Punkten F durchschneidet, und zieht durch diese Punkte F grade Linien, welche die Kreise zum zweyten male in Punkten G durchschneiden, so liegen alle diese Punkte G im Umfange eines mit dem erstern concentrischen Kreises. Denn die Rechtecke $BF \times BG$ und die Linien BF sind insgesammt gleich, folglich auch die Linien BG. (Greg. III. 56.)

Zusatz III. *Ist die Sehne IG dem Halbmesser des* Fig. 55.
Kreises gleich, und man zieht durch den einen Endpunkt derselben einen Durchmesser, durch den andern eine Tangente, die sich beyde in o schneiden, so wird GCI ein gleichseitiges Dreyeck, aus dessen Spitze Go nach der verlängerten Grundlinie geht. Folglich muss $Go^2 = Co \times Io + CG^2$, und da zugleich $Go^2 = Ho \times Io$ ist *, * 21.
$CG^2 = Ho \times Io - Co \times Io = HC \times Io$, folglich, da $HC = CG$ ist, auch $Io = CG$ seyn. *Die Tangente durchschneidet also in diesem Fall den verlängerten Durchmesser so, dass Io dem Halbmesser gleich*, folglich $Co = HI$, und da sich die rechtwinkligen Dreyecke CGI, IGH decken, *auch* $Go = GH$ *ist*, daher $GH^2 = Io \times Ho = IG \times (IG + HI) = 3. CG^2$ *wird.* (Greg. III. 22). * 22. 2.

Zusatz IV. α) *Sind von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises zwey schneidende Linien OBA, OED so nach dem Kreise gezogen, dass das Quadrat der einen Verlängerung EO, dem Rechteck aus der andern Sehne AB und ihrer Verlängerung BO gleich ist, so ist umgekehrt auch das Quadrat der zweyten Verlängerung BO dem Rechteck aus der erstern Sehne DE und ihrer Verlängerung EO gleich.* Denn ist $EO^2 = AB \times BO$, so ist auch, wenn man beyderseits BO^2 hinzufügt, $EO^2 + BO^2 = AB \times BO + BO^2 = BO \times AO = EO \times DO$ * $= EO^2 + EO \times DE$, und mithin $BC^2 = EO \times DE$. Ist also EO eine mittlere Proportionallinie zwischen AB, BO, so ist umgekehrt auch BO eine mittlere Proportionallinie zwischen DE und EO. * 22. 2.

β) *Sind dagegen die beyden Sehnen ſo gezogen, daſs die Rechtecke aus den Sehnen, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen gleich ſind, AB × DE = BO × EO ſo ſind dieſe Verlängerungen in verkehrter Ordnung genommen, zwiſchen den beyden Sehnen AB, DE zwey mittlere Pro-*
* V. 5. *portionallinien**. Denn iſt

$$\alpha)\ AB \times DE = BO \times EO, \text{ mithin } \frac{AB}{EO} = \frac{BO}{DE}, \text{ und}$$

man fügt AB × BO zu den gleichen Rechtecken hinzu, ſo wird AB × DO = AO × EO. Nun iſt,

$$EO \times DO = AO \times BO\ *,$$

* 22. 2. mithin, wenn man Gleiches durch Gleichem dividirt,

$$\frac{AB}{EO} = \frac{EO}{BO} = \frac{BO}{DE} \text{ vermöge } \alpha).$$

Betrachtet man alſo dieſe Brüche als Exponenten von Verhältniſſen, ſo ſind alle dieſe Verhältniſſe gleich,

$$AB : EO = EO : BO = BO : DE\ *$$

* V. 2. und folglich ſind die Verlängerungen EO, BO *zwey mittlere Proportionallinien zwiſchen den Sehnen AB,*
* V. 5. *DE**.

Auch folgt aus jenen Gleichheiten, daſs

$$\frac{AB^3}{EO^3} = \frac{AB}{EO} \times \frac{EO}{BO} \times \frac{BO}{DE} = \frac{AB}{DE} \text{ iſt, daſs mithin ſich}$$

verhält $AB : DE = AB^3 : EO^3$.

Anmerkung. Wäre es alſo nur möglich zwey gegebne grade Linien AB, DC ſo in einen Kreis als Sehnen zu legen, daſs die Rechtecke aus denſelben, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen bis zu ihrem Durchſchnittspunkte gleich wären; ſo hätte man *die Aufgabe, zu zwey gegebnen Linien AB, DE zwey*

dere Proportionallinien zu finden, und zugleich auch das be-
rühte *Delische Problem* von der *Verdopplung des Kubus* aufgelöst.
Dn man fände auf diese Art eine grade Linie EO, deren Kubus
zKubus von AB des Verhältniss zwey beliebiger Linien DE : AB
k, indem wir in der Streometrie sehn werden, dass die Wür-
fzweyer Linien sich wie die dritten Potenzen der Zahlausdrü-
cdieser Linien verhalten, grade so wie die Quadrate im Ver-
häiss der zweyten Potenzen dieser Zahlausdrücke stehn. Auf
je Aufgabe hat *Vieta* (Opera p. 242) dieses berühmte Problem
zückgeführt, doch auf einen langwierigeren und weniger ele-
gen Wege, als es hier geschehn ist.

Allein *zwey grade Linien auf die geforderte Art einem Kreis einschreiben, ist eine Forderung, welche die Kräfte der Elementaeometrie übersteigt.* Dieses läst sich nicht durch grade Linie ur Kreis allein, sondern nur durch Hülfe der Kegelschnitte oder ater Curven wissenschaftlich bewerkstelligen, und zwar aus ähnlien Gründen, aus denen wir die Unmöglichkeit auf diesem Wge einen Bogen oder Winkel in drey gleiche Theile zu theilededucirt haben *. *Mechanische Verfahren* und *Instrumente* dies zu bewerkstelligen, lassen sich indes mehrere erdenken. *II. 30. a. 2.

Noch einige andre Wege, dieses Problem aufzulösen, findet m in den Bemerkungen zu diesem Werke.

Zusatz V. *α) Ist in einem Dreyeck ABC, aus der Spze nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, grade Linie AG gezogen, und man nimmt in einem der Scenkel, z. B. in AB, einen Punkt E so, dass sich verhält B: AE = BG × CG : AG², und zieht GE; so ist allemal de Winkel AGE, gleich dem Winkel ACG des gegebnen Dreyecks.* Denn zieht man durch B eine Parallellinie mi EG, welche die verlängerte Linie AG im Punkte F urchschneidet, so theilen die beyden Parallellinien Fig. 59

* 7. EG, BF die Schenkel des Winkels A proportional,
*3. f. 2. so dafs sich verhält $BE : AE = FG : AG = FG \times AG : AG^2$. Die Verhältnisse der Rechtecke, $BG \times CG : AG^2$ und $FG \times AG : AG^2$ sind also demselben Verhältnifs, $BE : A$, mithin untereinander gleich, daher auch die Rechtecke
* V. 2. $BG \times CG$ und $FG \times AG$ gleich seyn müssen *. Da überdem BC und AF grade Linien sind, die sich im Punkte G schneiden, so liegen die vier Punkte A, B, F, G in
*(f. 4.) einer Kreislinie *, und da in dieser die Winkel F und
*II23Z1 C über derselben Sehne AB stehn, so sind sie gleich,
*I.25.21. also $\angle F = AGE^* = C$.

β) *Ist Ag nach einem Punkt in der verlängerten Grundlinie gezogen, und man nimmt auf der Verlängerung des Schenkels AB einen Punkt e so, dafs sich verhält $Be : Ae = Bg \times Cg : Ag^2$, und zieht ge, so ist, je nachdem e auf der Verlängerung über A oder über B hinaus liegt, der Winkel Age dem Winkel ACg, oder dessen Nebenwinkel ACB gleich.* Denn vermöge derselben Gründe sind, wenn man die vorige Construction wiederholt, die Rechtecke $Bg \times Cg$ und $Ag \times fg$ gleich, mithin A, B, C, f Punkte in einer Kreislinie, nur dafs die Winkel ACB und $f = Age$ im ersten Fall einander gegenüber, im zweyten hingegen auf derselben Sehne AB stehn, und daher f im ersten Fall dem Nebenwinkel von
* II. 27. ACB *, d. h. ACg, im zweyten aber dem Winkel ACB selbst gleich ist. Diese Lage des Punktes e richtet sich aber danach, *ob das Rechteck $Bg \times Cg$ gröfser oder kleiner als Ag^2 ist.* Im ersten Fall mufs der Punkt e in der Verlängerung über A, im zweyten in der Verlängerung über B hinaus liegen.

γ) Durch die umgekehrte Schlufsfolge erhellt auch *der umgekehrte Satz, dafs falls man GE oder ge fo zieht, dafs der Winkel AGE = ACG* oder *∠ Age im erften Fall = ACg, im zweyten = ACB ift, fich allemal verhält* $BE : AE = BG \times CG : AG^2$ *oder* $Be : Ae = Bg \times Cg : Ag^2$.

Diefe Ausfagen, eigentlich Zufätze zu Lehrfatz 20, find in *Simfons* Wiederherftellung von *Apollonius* ebnen Oertern, de zweyten Buchs drittes Lemma.

[LEHRSATZ 23.]

Wenn zwey Sehnen fich unter rechten Winkeln durchfchneiden, fo find ftets die Quadrate aus den vier Abfchnitten zufammengenommen dem Quadrat des Durchmeffers gleich. Fig. 60.

Durchfchneiden fich beyde Sehnen *im Mittelpunkte*, fo find fie Durchmeffer, mithin die vier Abfchnitte Halbmeffer. Durchfchneiden fie fich *rechtwinklig in einem Punkte des Umfangs*, fo bilden fie einen Winkel der auf einem Halbkreife fteht*, und folglich mit dem *II. 23 f. 2 Durchmeffer als Hypotenufe ein rechtwinkliges Dreyeck *. In diefen beyden Fällen liegt die Wahrheit des Satzes aus Lehrfatz 4. Zufatz 3. und durch den Pythagoreifchen Lehrfatz * am Tage. * 12.

Durchfchneiden fich hingegen die beyden Sehnen AB, DE *rechtwinklig in einem Punkte F, der* entweder *innerhalb* oder *aufserhalb des Kreifes liegt*, fo verbinde man ihre Endpunkte durch grade Linien AE, DB, und ziehe durch einen derfelben einen Durchmeffer DCG.

Im *ersten Fall*, wenn F im Kreise liegt, hat der Winkel DFB zu seinem Maasse die halbe Summe der
* II. 25. Bogen DB, AE *, welche seine Schenkel umspannen. Da er nun als ein rechter Winkel den vierten Theil der Kreislinie zu seinem Maasse hat, so müssen die Bogen DB + AE dem Halbkreise, folglich dem Bogen DB + BG gleich seyn. Mithin sind die Bogen AE und BG, also auch ihre Sehnen, untereinander gleich. Ueberdem ist, wenn man BG zieht, DBG ein Dreyeck im Halbkreise, folglich rechtwinklig. Es ist also vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes in den drey rechtwinkligen Dreyecken AFE, DFB, DBG, erstens $BG^2 = AE^2 = AF^2 + FE^2$, zweytens $DB^2 = DF^2 + FB^2$, und drittens $DG^2 = BG^2 + DB^2$, folglich $DG^2 = AF^2 + FE^2 + DF^2 + FB^2$. (Greg. III. 77)

Im *zweyten Fall*, wenn F *ausserhalb* des Kreises liegt, hat der Rechte Winkel F zu seinem Maasse den halben Unterschied der beyden Bogen BMD — AE, die
* II. 25. seine Schenkel umspannen *, daher der Unterschied dieser Bogen dem Halbkreise BMD — BG, mithin AE = BG seyn muss. Alles übrige ist wie im vorigen Fall. Auch hier haben wir wieder drey rechtwinklige Dreyecke AFE, BFD, GBD, und aus der Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes auf sie, folgt eben so wie vorhin,

$$DG^2 = AF^2 + BF^2 + DF^2 + EF^2;$$

so dass also in allen Fällen die Quadrate der abgeschnittnen Stücke zusammengenommen dem Quadrat des Durchmessers gleich sind.

Zusatz I. *Zieht man, falls beyde Sehnen sich im Kreise rechtwinklig durchschneiden, noch AD und EB, so sind in dem Viereck ABED die Quadrate von je zwey der gegenüberstehenden Seiten zusammengenommen untereinander, und mit dem Quadrat des Durchmessers von gleicher Grösse,* $AD^2 + EB^2 = AE^2 + DB^2 = DG^2$, indem sie vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes den Quadraten aus den vier Abschnitten der Sehnen, die sich in F rechtwinklig durchschneiden, gleich sind. Der *Inhalt des Vierecks AEBD ist gleich* $\frac{1}{2} AB \times DE$ *, oder wie wir im folgenden Buche sehn werden, vermöge des Ptolemäischen Lehrsatzes gleich $\frac{1}{2}$ AD × EB + $\frac{1}{2}$ AE × BD. (Greg. III. 75. 76.)(— *Liegt der Durchschnittspunkt F ausserhalb des Kreises*, so durchschneiden sich zwar die Linien AD, BE, und bilden mit AE, BD kein Viereck, aber dem ungeachtet gilt auch von ihren Quadraten dieser Zusatz. * 5.

Zusatz II. *Eine Sehne FG, welche mehrere parallele Sehnen DE rechtwinklig in den Punkten H, und den mit ihnen parallelen Durchmesser AB im Punkte K durchschneidet, theilt jede derselben so ein, dass* $DH \times HE + HK^2$ *stets von einerley Grösse, und zwar dem Rechteck* $AK \times KB$ *gleich ist.* Denn da der Durchmesser AB die Sehne FG, die auf ihn senkrecht steht, im Punkte K halbirt *, und diese von jeder der parallelen Sehnen in einem Punkte H ungleich getheilt wird; so ist stets $GH \times HF = KF^2 - KH^2$ *, und zugleich $GH \times HF = DH \times HE$ *, so wie $KF^2 = AK \times KB$ *, folglich $DH \times HE = AK \times KB - KH^2$ und $DH \times HE + KH^2 = AK \times KB$. (Greg. III. 72). Fig. 61. * II. 9. * II f. 1. α * 22. 1. * (f. 5.)

[LEHRSATZ 24.]

Fig. 62. *Wenn man auf dem Durchmesser AB eines Kreises, oder auf dessen Verlängerung, in einem willkührlichen Punkte D oder d ein Perpendikel errichtet, und zieht von dem einen Endpunkte des Durchmessers z. B. von A aus, grade Linien, welche die Kreislinie in Punkten F, das Perpendikel in Punkten G oder g durchschneiden, so sind die Rechtecke aus je zwey Abschnitten AF und AG gleich dem Rechtecke aus dem Durchmesser AB und dem Abschnitt AD desselben, der am Punkte A anliegt, und jene Rechtecke sind insgesammt untereinander gleich.*

Man ziehe FB, so ist der Winkel AFB ein Winkel im Halbkreise, mithin ein rechter, und so auch sein Nebenwinkel BFg. Ueberdem sind die Winkel bey D und d, der Voraussetzung gemäss rechte.

Für Perpendikel welche *auf dem Durchmesser selbst*, oder auf dessen *Verlängerung über B hinaus* aufstehn, sind daher die beyden Winkel D und F oder d und F, zusammengenommen zwey rechten gleich, daher sich um das Viereck BDGF oder BdgF ein Kreis beschreiben

*II. 27. lässt *, worin FG, BD oder gF, dB Sehnen sind, die sich verlängert im Punkte A durchschneiden, daher stets $AF \times AG = AB \times AD$, so wie $AF \times Ag = AB \times$

*22. f. 4. Ad ist *.

Für Perpendikel, welche auf der *Verlängerung des Durchmessers über A hinaus* errichtet sind, stehn [die Schenkel der rechten Winkel bey F' und d' über derselben Grundlinie Bg', daher auch in diesem Fall B,

F', d', g' Punkte in einer Kreislinie *, und F'g', Bd' * II. 26.
Sehnen ſind, die ſich jetzt aber innerhalb des Kreiſes im Punkte A durchſchneiden, ſo daſs auch für dieſen Fall ſtets $AF' \times Ag' = AB \times Ad'$ iſt.

Für ein Perpendikel, *welches im Endpunkte des Durchmeſſers B aufſteht*, und daher zugleich eine *Tangente des Kreiſes iſt*, iſt $A\gamma \times \gamma F = \gamma B^2$ *, überdem $A\gamma^2$ * 22. 2.
$= \gamma B^2 + AB^2$, folglich auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $A\gamma \times AF = AB^2$ *. * E. 3.

Wo alſo auch auf dem Durchmeſſer oder auf deſſen Verlängerung, das Perpendikel aufſtehe, und wie man auch aus dem Punkte A grade Linien nach dem Kreiſe und dem Perpendikel gezogen haben möge, immer iſt das Rechteck aus den beyden Abſchnitten einer ſolchen Linie AF, oder Ag, oder F'g, dem Rechteck $AB \times AD$, oder $AB \times Ad$ etc. gleich, daher auch *bey demſelben Kreiſe und für daſſelbe Perpendikel* (für die AB und AD von gegebner und unveränderlicher Gröſse ſind) *jene Rechtecke $AF \times AG$ etc. insgeſammt unter einander gleich ſeyn müſſen.*

Folgerung 1. *Steht das Perpendikel auf dem Durchmeſſer ſelbſt auf*, ſo durchſchneidet es die Kreislinie in irgend einem Punkte E, und dann iſt $AE^2 = AB \times AD$ *. Mithin *iſt* in dieſem Fall *jedes der Rechtecke $AF \times AG = AE^2$, und folglich die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwiſchen je zwey Abſchnitten AF und AG*; welches eine artige Verallgemeinerung der Ausſage in Lehrſatz 22 Zuſatz I iſt. *Wenn man folglich durch den einen Endpunkt irgend einer Sehne AE einen* * 22. Z. 1.

Durchmesser, und durch den andern ein Perpendikel auf diesem Durchmesser zieht, so ist die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwischen jeder andern Sehne, die durch den Punkt A geht, und dem an A anliegenden Stück derselben, das durch den Perpendikel abgeschnitten wird. (Hugenii Horol. Oscillat. p. 49. Edit. 1673.)

Fig. 63. α) Beschreibt man mit AE um A einen Kreis, welcher die Linien AF in Punkten H durchschneidet; so sind folglich auf ihnen allen von A aus drey stetig proportionale Stücke AG, AH, AF abgeschnitten, da $AE^2 = AH^2 = AG \times AF$ ist. (Greg. III. 39.)

Fig. 62. β) Zieht man FE, so entsteht ein Dreyeck FEG, aus dessen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, eine grade Linie EA so gezogen ist, daſs $EA^2 = GA \times FA$ ist. Folglich verhält sich stets $GE^2 : FE^2 = GA$
*20. Z. 5 $: FA$ *.

Folgerung 2. Verlängert man eine Sehne AF, bis sie in γ die Tangente durchschneidet, welche den Kreis im entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers durch A berührt; so ist *allemal der Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Sehne AF und der verlängerten Sehne Ag*, weil nach unserm Beweise $AF \times A\gamma = AB^2$ ist. Fällt man von F auf diesen Durchmesser das Perpendikel $F\delta$, so ist überdem $AF^2 =$
22, Z. 1. $AB \times A\delta$, und es verhält sich daher $A\delta : AF = AF : AB = AB : A\gamma$, oder *AF und AB sind zwey mittlere Proportionallinien zwischen $A\delta$ und $A\gamma$*; ein Satz worauf sich mechanische Vorrichtungen gründen lassen, um zu zwey

gegebnen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden *. (Greg. III. 17.) *22.Z42

Folgerung 3. *Wenn man durch einen gegebnen Punkt A willkührlich grade Linien zieht, und auf diesen zwey Punkte F und G so nimmt, dass ein Rechteck aus den Abschnitten AF, AG stets einerley Flächenraum, z. B. dem gegebnen Raume S gleich ist; so muss* 1) *falls der geometrische Ort des einen dieser Punkte G eine grade Linie EE' von gegebner Lage ist, der geometrische Ort des zweyten Punktes F eine Kreislinie von gegebner Grösse und Lage seyn*: und 2) *falls umgekehrt der Ort des Punkts F eine gegebne Kreislinie ist, die durch den gegebnen Punkt A geht, der geometrische Ort des zweyten Punktes G eine grade Linie von gegebner Lage seyn.* Man fälle nemlich *in Fall* 1 von A auf die gegebne Linie EE' ein Perpendikel AD, verwandle den gegebnen Raum S in ein Rechteck über AD, und nehme auf AD oder dessen Verlängerung, AB gleich der Höhe dieses Rechtecks, so dass AD × AB = S wird, und beschreibe dann um AB als Durchmesser *eine Kreislinie*; so, behaupte ich, ist diese der geometrische Ort der Endpunkte F. Denn erstens wird diese Kreislinie von jeder Linie die durch den Punkt A geht, die einzige Tangente AK ausgenommen, in A und einem zweyten Punkte F durchschnitten*; die Tangente aber steht auf dem Durchmesser AB senkrecht*, läuft folglich mit der gegebnen Linie EE' parallell *, und jede andre Linie durch A durchschneidet nothwendig auch EE' in irgend einem Punkte G, weil sonst durch einen Punkt A mit einer gegebnen Linie EE' verschiedne

*II. 12.
*II. 12.
* I. 21.

*I 24.Z2 Parallellinien möglich wären *. Zweytens ist für jede durchschneidende Linie nach unserm Lehrsatz AF × AG = AD × AB = S weshalb alle Punkte F der so beschriebnen Kreislinie die verlangte Eigenschaft haben, aber kein Punkt ausserhalb derselben. — Verwandelt man umgekehrt *in Fall* 2 den gegebnen Raum S in ein Rechteck über dem Durchmesser AB, nimmt AD der Höhe dieses Rechtecks gleich, und errichtet durch D auf AB ein Perpendikel EE'; so ist dieses der Ort der Punkte G, grade aus denselben Gründen. In diesem Fall darf man jedoch die Bestimmung nicht übersehn, *dass der gegebne Punkt A in der gegebnen Kreislinie liegen soll.* Denn ist dieses nicht der Fall, und liegt er innerhalb des Kreises, so werden wir in der Folge sehn, dass der Ort der Punkte G keine grade Linie, sondern gleichfalls eine Kreislinie ist *.

Cf. 24 f. 1 Anm.

Dieser interessante Satz wird in *Apollonius ebnen Oertern* I. 8 und 9 Fall 1. folgendermassen ausgedrückt: „Wenn aus einem gegebnen Punkte A, auf einer graden Linie zwey Stücke AF, AG abgeschnitten werden, welche ein gegebnes Rechteck enthalten, und der Endpunkt des einen Stücks G eine der Lage nach gegebne grade Linie EE' *berührt*, so berührt der Endpunkt F des andern Stücks einen der Lage nach gegebnen Umkreis"; ein Ausdruck der keine Nacachmung verdient. Die Analysis bey Simson in Fall 1 läuft darauf hinaus, dass wenn G ein Punkt in der gegebnen Linie EE' ist, und es soll AF × AG = S = AD × AB seyn, F, G, D, B Punkte in einer Kreislinie *, folglich wenn man FB zieht, die Winkel bey F und D gleich, und da D ein rechter ist, auch bey F stets rechte Winkel seyn müssen. Jeder solcher Winkel steht aber auf der gegebnen Linie AB; folglich ist der Ort der Punkte F eine Kreislinie über AB als Durch-

*22. f. 4

messer beschrieben *. Die Analysis in Fall 2 liegt am Tage. — Mehrere analoge Sätze, findet man im nächsten Buche. *II. 26. f. 2.

Zusatz I. α) *Nimmt man dagegen auf jeder Sehne AF, die aus einem gegebnen Punkte A im Umfange eines gegebnen Kreises gezogen wird, einen Punkt G so, dass das Rechteck aus den beyden Abschnitten einem gegebnen unveränderlichen Raum gleich ist, $AG \times GF = S$; so ist der geometrische Ort der Punkte G, eine Kreislinie, welche mit der gegebnen concentrisch ist.* Fig. 64. Denn ist G ein Punkt von der bedungenen Beschaffenheit, und man zieht durch ihn einen Durchmesser HI, so ist erstens $AG \times GF = HG \times GI$ *, und zweytens, * 22. 1. weil der Durchmesser in C gleich und in G ungleich getheilt ist, $HG \times GI = CI^2 - CG^2$ *. Mithin muss *11. f. 1. $AG \times GF = S = CI^2 - CG^2$ oder $CG^2 = CI^2 - S$ seyn. Nun aber ist der Kreis, also auch das Quadrat über dessen Halbmesser, CI^2, mithin auch CG gegeben und unveränderlich, und daher der Ort der Punkte G eine Kreislinie, die mit der Seite eines Quadrats $= CI^2 - S$ als *Halbmesser*, um den Mittelpunkt G beschrieben wird. Der Ort ist unmöglich, wenn $S < CI^2$ ist; da in der That jedes Rechteck aus den beyden Abschnitten einer Sehne kleiner als das Quadrat des Halbmessers seyn muss *. *11. Z. 1.

β) *Nimmt man auf den Verlängerungen der Sehnen AF, welche aus dem Punkte A in einer gegebnen Kreislinie gezogen sind, Punkte g so, dass die Rechtecke $Ag \times gF = S$ sind,* und zieht von g durch den Mittelpunkt gH'; so ist erstens $Ag \times gF = H'g \times gI'$ * $= S$, * 22. 2.

*11. f.) zweytens $H'g \times gI' = Cg^2 - CI'^2$ *, folglich $Cg^2 = S + CI'^2$, also wiederum *der Ort der Punkte* g *eine mit der gegebnen concentrische Kreislinie*, deren *Halbmesser* in diesem Fall die Seite eines Quadrats $S + CI^2$ ist, und die also den gegebnen Kreis einschliesst.

Diese brauchbaren Oerter, werden bey Apollonius nicht ausdrücklich aufgeführt. Man sieht leicht, dass der letztere Ort auch für den Fall gilt, wenn g auf der Verlängerung der Sehne über A hinaus liegt, und $Ag' \times g'F = S$ ist.

Zusatz II. α) Da für jedes Perpendikel auf dem Durchmesser AB oder auf dessen Verlängerung, erstens

* 12. nach dem Pythagoreischen Lehrsatze $AG^2 = AD^2 + GD^2$*, oder $AG \times AG = AD \times AD + GD^2$ und zweytens nach unserm jetzigen Lehrsatze $AG \times AF = AD \times AB$ ist; so muss, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, auch, *falls G im Kreise liegt*, also $AF > AG$ ist, $AG \times GF = AD \times DB \times GD^2$ seyn, *falls* hingegen *g ausserhalb des Kreises liegt*, also $AF < Ag$ ist, $Ag \times gF = gd^2 \pm Ad \times dB$, wo das obere Zeichen gilt, wenn d ausserhalb des Kreises liegt, das *untere*, wenn d noch im Kreise fällt, indem in diesem letztern Fall Ad^2 um das Rechteck $Ad \times dB$ kleiner als $Ad \times AB$, folglich dieses Rechteck noch von gd^2 abzuziehn ist.

β) Auf eine ähnliche Art ist im rechtwinkligen Dreyeck AFB, $AF^2 = AB^2 - FB^2$ oder $AF \times AF = AB \times AB - FB^2$ folglich $AF \times FG = AB \times BD - FB^2$, und $AF \times Fg = FB^2 \pm AB \times dB$, wo wieder das *obere* oder *untere* *untre* Zeichen gilt, je nachdem d *außerhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt.

γ) Zieht man daher von irgend *einem Punkte g außerhalb des Kreises* ein Perpendikel gd nach einem beliebigen Durchmesser AB oder nach dessen Verlängerung, und zugleich irgend eine den Kreis in H und I durchschneidende Linie; so ist immer, *falls* das Perpendikel gd auf dem Durhmesser selbst aufsteht, also d im Kreise liegt, $gd^2 - Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$ *, *falls* hingegen das Perpendikel gd auf der Verlängerung des Durchmessers aufsteht, $gd^2 + Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$. (Greg. III. 87.) — Ist *G ein Punkt im Kreise*, so ist $AD \times DB - GD^2 = AG \times GF = Hg \times gI$. (Apollonius ebne Oerter II. 8. 9. Zus.)

[LEHRSATZ 25.]

*Wenn man durch einen beliebigen Punkt M einer Sehne AH, oder durch irgend einen Punkt m in deren Verlängerung, eine grade Linie MD oder md parallel mit der Tangente AK, welche durch den einen Endpunkt A dieser Sehne geht, zieht, so werden auf jeder andern graden Linie, welche durch den Punkt A geht, und daher den Kreis in einem zweyten Punkte F, die Linie MD oder md hingegen in Punkten G oder g durchschneidet *, zwey Stücke AF und AG oder Ag so abgeschnitten, daß die Rechtecke AF $\times$ AG insgesammt dem Rechteck AH $\times$ AM, und daher auch untereinander gleich sind.* Fig. 62. *24.f.3.

Denn ist AB der Durchmesser, der durch den Endpunkt A der gegebnen Sehne AH geht, so steht die Tangente AK, und also auch jede der Linien MD und md, welche mit ihr parallel laufen, auf dem Durchmes-
*II. 12. ser AB, oder dessen Verlängerung senkrecht *. Die graden Linien, welche durch den Punkt A gezogen werden, durchschneiden folglich ein solches Perpendikel MD, wo es auch auf dem Durchmesser, oder dessen Verlängerung aufsteht, und durch welchen Punkt der Sehne A oder deren Verlängerung es folglich geht, stets so, dass die Rechteck AF × AG insgesammt untereinander, also auch insgesammt dem Rechteck AH ×
* 24. AM gleich sind *, so wie die Rechtecke AF × Ag alle untereinander und mit dem Rechteck AH × Am gleiche Grösse haben.

Diese Verallgemeinerung des vorigen Lehrsatzes, lässt sich auch leicht durch eine ähnliche Schlussfolge, wie jener, oder aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke beweisen. Da der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne macht, die durch den Berührungspunkt geht, den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten, z. B. KAm′ den Winkeln im Abschnitt *AEH*, und KAH den Winkeln im Abschnitt ABH, gleich ist; so lässt sich die Lage der Linien MD auch dadurch bestimmen, dass sie *die Sehne unter Winkeln durchschneiden, welche den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten gleich sind*, und so drückt Greg. a St. Vinc. III. 73 diesen Satz aus.

Folgerung. 1. *Werden von einem gegebnen Punkte A aus, willkührlich grade Linien gezogen, und auf jeder derselben von diesem Punkte an zwey Abschnitte AF und AG, so genommen, dass, (wenn man von den Punkten G mit ei-*

ner gegebnen Linie Q Parallellinien zieht, und dieſe eine der Gröſse und Lage nach gegebne grade Linie AH entweder ſelbſt, oder deren Verlängerung über H hinaus, in Punkten M durchſchneiden,) immer das Rechteck $AF \times AG = AH \times AM$ iſt; ſo iſt der **geometriſche Ort der Punkte** *F, eine der Lage und Gröſse nach gegebne* **Kreislinie.**

Denn zieht man durch den gegebnen Punkt A, parallel mit der gegebnen Linie Q, die Linie Kk, und beſchreibt zu dieſer Linie als Tangente und über AH als Sehne einen Kreis; ſo hat, unſerm Lehrſatz zu Folge, dieſe Kreislinie die Eigenſchaft, daſs wenn man aus A irgend eine Sehne AF, und aus irgend einem Punkte G auf ihr, oder auf ihrer Verlängerung, parallel mit der Tangente die Linie GM zieht, $AF \times AG = AH \times AM$ iſt. Folglich thut jeder Punkt F dieſer Kreislinie unſrer Bedingung genüge. Hingegen kein Punkt P, der nicht in ihr, und doch mit ihr zu einerley Seite der Tangente Kk liegt, weil ſonſt ſowohl $AG \times AP$ als auch $AG \times AF$ gleich $AM \times AH$, und doch AP gröſser oder kleiner als AF ſeyn müſste, welches unmöglich iſt.

Verlängert man AH über A hinaus, auf die entgegengeſetzte Seite der Tangente Kk, nimmt AH′ gleich AH, und auch hier auf die durch A gezognen Linien zwey Abſchnitte AF, AG ſo, daſs Parallellinien GM mit der Tangente Kk gezogen, auf AH′ Linien AM′ ſo abſchneiden, daſs $AF \times AG = aH' \times AM'$ iſt; ſo muſs der Ort der Punkte F ebenfalls eine über AH′ als Sehne zu Kk als Tangente beſchriebne Kreislinie ſeyn; welche folglich mit der erſtern gleich iſt, ſich mit ihr im Punkte

A berührt, und deren Mittelpunkt mit dem der erstern zu entgegengesetzten Seiten der Linie HH' liegt.

Deshalb ist es einerley ob die Abschnitte AF und AG *auf einerley*, oder *zu verschiedner Seite des Punktes A* genommen werden. Immer sind *zwey gleiche* im Punkte A sich berührende *Kreislinien*, von der erwähnten Beschaffenheit, der Ort Punkte F. Auf dieselbe Art gilt der Ort in Lehrsatz 24 Folg. 3 auch für den Fall, wenn AF und AG Abschnitte einer graden Linie sind, *die zu entgegengesetzten Seiten des Punktes A liegen.*

Uebrigens *bleibt der Ort der Punkte G* unter unsrer gegenwärtigen Voraussetzung gänzlich unbestimmt, da G jeden Punkt in jeder Sehne AF bedeutet. Kömmt aber eine zweyte Bedingung hinzu, so wird dadurch auch der Ort der Punkte G bestimmt. Noch einen andern Beweis für die Aussage in dieser Folgerung findet man in Zusatz. 1.

Folgerung. 2. Durchschneidet die Linie MD die Kreislinie in irgend einem Punkte E, und man zieht AE, so fallen die Punkte F und G beyde in E zusammen, und es ist $AE^2 = AM \times AH$. — Zieht man durch H eine Parallellinie mit der Tangente AK, so fallen die Punkte M und H zusammen, und es ist $AE \times A\gamma = AH^2$. *Man findet also zu zwey gegebnen Sehnen AH, AE, oder AF, AH, die von demselben Punkte A aus gezogen sind, die dritte Proportionallinie AM oder Aγ, wenn man durch den zweyten Endpunkt der Sehne,* welche die mittlere Proportionallinie seyn soll, *eine Parallellinie mit der Tangente durch den Punkt A zieht.*

Fig. 65. *Folgerung* 3. Zieht man von den beyden Endpunkten einer Sehne AH nach irgend einem Punkte im

Kreiſe grade Linien AE, HE, und parallel mit den Tangenten durch die Endpunkte der Sehne die Linien EM, EN, ſo iſt alſo $AE^2 = AH \times AM$ und $HE^2 = AH \times HN$. Daraus folgt

α) daſs ſich verhält $AE^2 : HE^2 = AM : HN$ und, wenn man dieſe gleichen Verhältniſſe beyde mit dem Verhältniſs AE : HE zuſammenſetzt *, $AE^3 : HE^3 = AM \times AE : HN \times HE$. Dieſe Rechtecke ſtehn alſo im dreyfachen Verhältniſſe der Sehnen AE, HE; eine Ausſage, denen in Lehrſatz 22, Zuſatz 1 analog. (Greg. III. 93.) * V. 6.

β) Da im Dreyeck HEM aus der Spitze E nach der verlängerten Grundlinie eine grade Linie EA geht, deren Quadrat gleich iſt dem Rechteck aus den Abſchnitten HA, MA auf der verlängerten Grundlinie, $AE^2 = HA \times MA$; ſo müſſen ſich die Quadrate über den Schenkeln dieſes Dreyecks, wie die Abſchnitte verhalten, oder $HE^2 : ME^2 = HA : MA$ *, und aus denſelben Gründen $AE^2 : NE^2 = AH : NH$. Folglich verhält ſich auch *erſtens* $HE^2 : ME^2 = HA \times LN : MA \times HN$ *. Nun aber iſt dem obigen zu Folge $HE^2 = HA \times HN$, alſo muſs auch $ME^2 = MA \times HN$ ſeyn *, und aus ähnlichen Gründen $NE^2 = NH \times AM$, mithin $ME^2 = NE^2$. *Die beyden mit den Tangenten parallel gezognen Linien EM, EN ſind alſo ſtets von gleicher Länge, und ſchneiden von der Sehne zwey Stücke AM, HN ſo ab, daſs $ME^2 = NE^2 = AM \times HN$ iſt*, (ein Satz den *Clairaut* als zwölfjähriger Knabe gefunden haben ſoll; Krafft Inſtit. geom. ſubl. §. 105.) * 20. Z. 5. * 3. f. 1. * V. 6.

γ) Iſt *zweytens*, zu Folge der erſten Proportion in β, $HE^2 : ME^2 = HA : MA$; ſo verhält ſich auch

*3. f. 1. $HE^2 : ME^2 = HA^2 : HA \times MA$ * oder, da Folgerung 2 gemäſs $HA \times MA = AE^2$ iſt, $HE^2 : ME^2 = HA^2 : AE^2$. Folglich ſind auch die Seiten dieſer Quadrate propor-
4. f. 3. tional $HE : ME = HA : AE$, und mithin iſt $AE \times HE = AH \times EM$. Folglich *muſs in jedem Dreyeck, welches einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, wenn man von der Spitze nach der Grundlinie eine Parallellinie EM mit einer der Tangenten durch die Endpunkte der Grundlinie zieht, das Rechteck aus den beyden Schenkeln AE, HE gleich ſeyn dem Rechteck aus der Grundlinie AH in dieſe Parallellinie EM.* (*Greg. III.* 70.)

Fig. 66. δ) *Zieht man hingegen in einem Dreyeck, welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, aus der Spitze E, durch den Punkt O, der in der Mitte der Grundlinie AH liegt, eine*
* 17. *Sehne EOF*, ſo iſt $AE^2 + EH^2 = 2\,AO^2 + 2\,EO^2$*, oder, da $AO^2 = AO \times OH = EO \times OF$*, und $EO \times OF + EO^2 = EO \times EF$ iſt, *ſtets* $AE^2 + EH^2 = 2\,EO \times EF$.

Fig. 67. *Folgerung* 4. *Wenn eine grade Linie AH der Gröſse und Lage nach gegeben iſt, und grade Linien MN, welche auf AH oder auf deren Verlängerung über H hinaus in Punkten M aufſtehn, und mit einer gegebnen Linie parallel laufen, werden jede von einer aus dem Punkte A gezognen graden Linie, ſo in einem Punkte E durchſchnitten, daſs das Quadrat über AE, dem Rechteck aus den Linien AH und AM gleich iſt,* $AE^2 = AH \times AM$; *ſo iſt der Ort der Durchſchnittspunkte E ſtets eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse.* Und zwar eine Kreislinie, die man findet, wenn man mit der gegebnen Linie Q, durch den gegebnen Punkt A eine Parallellinie

Kk zieht, und dann über der gegebnen Linie AH, als Sehne, einen Kreis beschreibt, den Kk im Punkte A berührt *. Denn nach Folgerung 2, hat jeder Punkt E in dieser Kreislinie die Eigenschaft, dass wenn man AE, und parallel mit der Tangente durch A, EM zieht, $AE^2 = AH \times AM$ ist: und kein Punkt F, der nicht in der Kreislinie liegt, kann diese Eigenschaft haben, weil sonst entweder eine grade Linie den Kreis in drey Punkten E, F, E durchschneiden, oder es eine Sehne geben müsste, die grösser als der Durchmesser wäre. *II. Afg. 16. 2.

Nimmt man auch auf der Verlängerung der gegebnen Linie AH über A hinaus solche Parallellinien, so wird für diese der Ort der Durchschnittspunkte E′ eine der vorigen gleiche Kreislinie, welche jene im Punkte A so berührt, dass die Mittelpunkte und die gleichen Abschnitte zu entgegengesetzten Seiten der verlängerten Linie AH liegen.

Apollonius ebne Oerter II. 3. Fall 1. Simsons Analysis führt dort den Beweis dieses Orts noch auf andre Sätze zurück. Gesetzt nemlich E′ sey ein solcher Punkt, für welchen $AE'^2 = AH' \times AM'$ ist, so muss, wenn man durch die drey Punkte E′, H′, M′ einen Kreis beschreibt, AE′ diesen Kreis im Punkte E′ berühren *; folglich, wenn man E′H′ zieht, der Winkel AE′H′, dem Winkel AM′E′, gleich seyn *. Nun sind für alle Parallellinien M′E′, die äussern Winkel AM′E′ zu einerley Seite der Linie AH′, von gleicher gegebner Grösse, nemlich gleich KAH oder kAH, mithin auch der Winkel AE′H′ von gegebner, unveränderlicher Grösse. Ieder der Durchschnittspunkte E′ ist also die Spitze eines Dreyecks AE′H′ welches über der gegebnen, unveränderlichen Grundlinie AH′ steht, und dessen Winkel an der Spitze E′, gleichfalls von gegebner Grösse ist, liegt mithin *22 f. 3 α *22 f. 3. β im Bogen, *entweder* des Kreisabſchnitts über AH′, welcher den gegebnen Winkel KAH faſst, oder des *Kreisabſchnitts* unter AH′ der den Nebenwinkel kAH faſst, mithin in einem *Kreiſe*, den man findet, wenn man über AH als Sehne und zu Kk als Tangente, einen Kreis beſchreibt.

Fig. 68. Zuſatz I. *Bleibt alles, wie im vorigen Fall, nur mit dem Unterſchied, daſs die Linien aus dem Punkte A gezogen, die parallelen Linien MN ſo in Punkten E durchſchneiden, daſs entweder* 1) *das Quadrat über AE um einen gegebnen Raum S gröſser oder kleiner als das Rechteck aus den Abſchnitteu AH, AM iſt,* $AE^2 = AH \times AM \pm S$; *oder daſs* 2) $AE^2 = S - AH \times AM$ *iſt; ſo iſt ebenfalls der* ***geometriſche Ort der Durchſchnittspunkte*** *E,* ***eine Kreislinie*** *von gegebner Gröſse und Lage.*

1) Geſetzt es ſind ME und AE zwey Linien, von der Beſchaffenheit, daſs $AE^2 = AH \times AM \pm S$ iſt; ſo muſs für den Fall des obern Zeichens AE^2 *gröſser*, im Fall des untern *kleiner* als das Rechteck AH × AM ſeyn, und daher muſs es in jenem Fall auf AE ſelbſt, in dieſem auf der Verlängerung von AE über E hinaus, einen Punkt von der Beſchaffenheit geben, daſs das Rechteck AE × AD = AH × AM iſt; und zugleich muſs in beyden Fälln AE × ED = S ſeyn. Dann liegen aber *erſtens* die vier Punkte E, D, H, M auf derſelben Kreis-
*22. f. 4. linie *, und zieht man DH, ſo ſind die Winkel ADH und AME von gleicher Gsöſse, weil entweder die Nebenwinkel von beyden, Winkel am Umfange ſind, die
* II. 23. auf demſelben Bogen ſtehn *, oder weil der Nebenwinkel von ADH dem Winkel AmE, in einem Vierecke, welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, gegenüberſteht,

oder umgekehrt *. Nun ist der Voraussetzung gemäss ME der gegebnen Linie AK parallel, also der Winkel AME immer von einerley Grösse; folglich auch ADH; und da überdem AH von gegebner unveränderlicher Grösse ist, so ist *der geometrische Ort der Punkte D eine Kreislinie*, welche über AH als Sehne, und zu AK als Tangente beschrieben wird, die mithin durch den Punkt A geht, und deren *Halbmesser* CA seyn mag. Nun liegen *zweytens* auf den Sehnen AD dieser Kreislinie, die insgesammt aus dem gegebnen Punkte A ausgehn, die Punkte E so, dass im Fall des *obern* Zeichens $AE \times ED = S$, im Fall des *untern* $AE \times Ed = S$ ist. Mithin muss vermöge des Orts in Lehrsatz 24 Zusatz 1, *der geometrische Ort der Punkte E, eine der vorigen concentrische Kreislinie*, und zwar *ihr Halbmesser CE* die Seite eines Quadrats seyn, welches im Fall des *obern* Zeichens gleich $CA^2 + S$ *, im Fall des *untern* $CA^2 - S$ ist *.— Nimmt man auch auf der Verlängerung der gegebnen Linie AH über A hinaus Parallellinien M′E′, so sind *zwey gleiche Kreise*, die im Fall des *obern* Zeichens sich duchschneiden, im Fall des *untern* aber um den doppelten Unterschied der beyden Halbmesser von einander abstehn, und in denen AH verlängert zwar gleiche, aber entgegengesetzt liegende Abschnitte bildet, *der Ort der Punkte E* *.

* II. 27.
*24 Z. 1. β
*24 Z. 1 α
*24. f. 1.

2) Soll $AE^2 = S - AH \times AM$ seyn, so müssen die Parallellinien MN so von den Linien AE durchschnitten werden, dass $AE^2 + AH \times AM = S$ ist, folglich $AE^2 < S$ seyn. In diesem Fall muss es also auf der Verlängerung jeder Linie AE, über A hinaus, einen Punkt

D' geben, der so liegt, dafs das Rechteck aus AE und ED' dem gegebnen Raume S gleich, oder $AE \times ED' = S$ ist, da denn $AE^2 + AH \times AM = AE \times ED'$, mithin, wenn man beyderseits AE^2 fortnimmt, $AH \times AM = AE \times AD'$ seyn mufs. Nimmt man daher auf der Verlängerung von AH über A hinaus, AH' gleich AH, so ist auch $AH' \times AM = AE \times AD'$, und da H'M und D'E grade Linien sind, die sich im Punkte A schneiden, so liegen die vier Punkte H', D', E, M in einer
* II. 23. Kreislinie, und es ist der Winkel $AD'H = AME$ *, mithin, von gegebner, unveränderlicher Gröfse: und da er über AH' steht, so mufs *der Ort der Punkte D'*, für Perpendikel, welche auf AH und deren Verlängerung über H hinaus genommen werden, eine *Kreislinie* seyn, die über AH' als Sehne, und zu Kk als Tangente beschrieben wird. Und da überdem $AE \times ED' = S$ ist, so wird zugleich *der Ort der Punkte E, eine mit jener concentrische Kreislinie*, deren *Halbmesser* C'E die Seite eines Quadrats ist, welches das Quadrat des erstern Halbmessers C'A um den Raum S übertrifft, oder $C'E^2 = C'A^2 + S$. Dieses wird auf dieselbe Art wie in Lehrsatz 24. Z. I. 2. bewiesen. — Für *alle* Parallellinien machen wiederum *zwey gleiche, sich schneidende, um C' und C beschriebne Kreislinien, den Ort der Punkte E aus.*

Apollonius ebne Oerter II. 3. Fall 2, wo jedoch dieser Ort etwas anders ausgedrückt wird. Unmittelbar auf ihn lassen sich mehrere ebne Oerter, die zu den Zusammengesetztesten gehören, mit Leichtigkeit zurückführen, welches ich im Folgenden Zusatz (den der, wer Lehrsatz 20 überschlagen hat, gleichfalls übergehe) wenigstens andeuten will.

Zusatz II. α) *Der Ort der Punkte E ist auch in dem Fall eine* g e g e b n e K r e i s l i n i e, *wenn der Anfang der parallelen Linien MN auf irgend einer andren, der Gröfse und Lage nach gegebnen Linie BL genommen wird, die nicht durch den Punkt A geht.* Denn man mache AH gleich und parallel BL, und ziehe durch B, parallel mit AK, die grade Linie BC; so schneidet jede der Linien MN, welche mit AK parallel laufen, auf beyden Linien und deren Verlängerungen, von B und C an gleiche Stücke ab, so dafs $BL \times BM = AH \times (AM' \pm AC) = AH \times AM' \pm AH \times AC$, wird, wo das Rechteck $AH \times AC$ ein gegebner Flächenraum P ist. Ist daher $AE^2 = BL \times BM \pm S$; so wird auch $AE^2 = AH \times AM' \pm S \pm P$, mithin dem vorigen Zusatz gemäfs, der Ort des Punktes E eine gegebne *Kreislinie* seyn. (Apollonius II. 3. Fall 3.) Fig. 69.

β) *Der Ort der Punkte E ist ferner auch dann* e i n e K r e i s l i n i e *von gegebner Lage und Gröfse, wenn die Linien AE die Parallellinien so durchschneiden, dafs eine Figur gegebner Gattung über AE beschrieben,* $AE^2 \times \frac{m}{q}$*, *entweder gleich ist dem Rechtecke aus irgend einer Linie BI, und dem Stück BM derselben, welches die Parallellinien auf ihr oder ihrer Verlängerung abschneiden,* $BI \times BM$: *oder gleich diesem Rechtecke vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum,* $BI \times BM \pm S$: *oder endlich einem gegebnen Raum weniger diesem Rechteck,* $S - BI \times BM$. Denn da die Figur über AE der Gattung nach gegeben ist, so ist ihr Verhältnifs zum Quadrat über AE, m : q, gegeben. Man nehme auf der gegebnen Linie BH oder *20. f. 1.

deren Verlängerung, einen Abschnitt so, daſs sich verhält $BI : BL = m : q$, so iſt BL gegeben, und $BI = BL \times \frac{m}{q}$. Setzt man dieſen Werth ſtatt BI, und dividirt dann beyderſeits durch $\frac{m}{q}$; ſo verwandeln ſich unſere Vorausſetzungn in folgende: $AE^2 = BL \times BM$; oder $AE^2 = BL \times BM \pm S$; oder $AE^2 = S - BL \times BM$. Und für alle drey iſt nach α) der Ort der Punkte E ein Kreis von gegebner Lage und Gröſse. (*Camerers* Bemerkungen zu *Apollonius* ebnen Oertern.)

γ) *Endlich iſt der Ort der Punkte E auch unter der Vorausſetzung* e i n e *K r e i s l i n i e von gegebner Lage und Gröſse, daſs, wenn zwey Punkte A, C und die graden Linien Q und BH der Lage, und die letztere auch der Gröſse nach, in einer Ebne, gegeben ſind; grade Linien von den Punkten A und C aus gezogen, ſich in den Punkten E ſo durchſchneiden, daſs eine mit Q durch E parallel gezogne Linie, auf BH, oder deren Verlängerung, ein Stück BM ſo abſchneide, daſs die Summe oder der Unterſchied zweyer Figuren gegebner Gattung über AE und CE beſchrieben, dem Rechteck aus den Abſchnitten BH und BM gleich iſt,* $AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = BH \times BM$. Denn da die Figuren über AE und CE der Gattung nach gegeben ſind, ſo iſt daſs Verhältniſs $m : n : q$ gegeben. Man nehme im Fall der Summe auf AC, im Fall des Unterſchieds auf deren Verlängerung zwey Abſchnitte CG, AG, und überdem eine Linie Ge ſo, daſs ſich verhält $m : n : q =$

CG : AG : Ge, so ist $AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = AE^2 \times \frac{CG}{Ge} + CE^2 \times \frac{BG}{Ge}$, und diese Summe ist nach Lehrsatz 20 Form. γ gleich $\frac{AC}{Ge} \times (AG \times CG \pm EG^2)$, also auch dieser Raum der Bedingung unserer Aussage gemäss, gleich BH × BM. Nun sind die Punkte A, C und G, mithin auch AC und das Rechteck $AG \times CG = R$ gegeben, überdem die Linie Ge, also auch der Raum $R \times \frac{AC}{Ge} = S$, und also ist $EG^2 \times \frac{AC}{Ge} = BH \times BM - S$ im Fall der Summe, oder $= S - BH \times BM$ im Fall des Unterschieds. Folglich sind dann vom gegebnen Punkte G aus, die Linien GE so gezogen, dass eine Figur gegebner Gattung über GE beschrieben, gleich ist dem Rechteck BH × BM vermindert um den gegebnen Raum S, oder umgekehrt, und daher vermöge β, der Ort der Punkte E *eine Kreislinie* von gegebner Lage und Grösse. (*Apollonius* II. 6. wo jedoch der Fall des Unterschieds übersehn ist, und dieser Ort in allen seinen Fällen 10 Seiten einnimmt. Auch ist er dahin einzuschränken, dass wenn im *Fall des Unterschieds die Figuren gegebner Gattung ähnlich sind*, es keinen Punkt G giebt, und der Ort der Punkte E keine Kreislinie, sondern eine der Lage nach gegebne *grade Linie* wird.

Ist die Summe oder der Unterschied der beyden Figuren gegebner Gattung, *vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum P*, dem Rechteck BH × BM, oder jene Summe oder Unterschied dem Raume P weniger diesem Rechteck gleich; so ändert dieses weiter nichts, als daſs statt des gegebnen Raums S, ein andrer gegebner Raum in die letzte Bestimmung mit eingeht, daher auch für diese Fälle der Ort der Punkte E eine Kreislinie ist, mit der eben erwähnten Einschränkung.

Ueberdem läſst dieser Ort sich grade so, wie der in den Folgerungen zu Lehrsatz 20 vorgetragne, *auch auf drey, vier, und jede beliebige Zahl von Punkten ausdehnen*: „Sind nemlich beliebig viel Punkte A, C, D, etc. in einer Ebne gegeben, und grade Linien aus ihnen gezogen durchschneiden sich insgesammt in einem Punkte E so, daſs die Summe oder der Unterschied von Figuren gegebner Gattung, über diese Linien beschrieben, dem Rechtecke $BH \times BM \pm S$ gleich ist; so ist der Ort der Punkte E *eine Kreislinie* von gegebner Lage und Gröſse, doch mit der erwähnten Einschränkung." (*Camerers* Bemerkungen zu *Apollonius ebnen Oertern*).

Anmerkung. Die Sätze in Folgerung 4 und in diesem Zusatze betreffen den Ort der Durchschnittspunkte E, worinn grade Linien, von einem gegebnen Punkte A aus gezogen, *Parallellinien* so durchschneiden, daſs das Quadrat über AE entweder allein, oder in Verbindung mit beständigen Gröſsen, durch ein veränderliches Rechteck bestimmt wird, dessen Gröſse zuletzt *von dem veränderlichen Abstande dieser Parallellinien vom gegebnen Punkte A abhängt.* — Der folgende Ort betrifft die Durchschnittspunkte E, worin grade Linien, von einem gegebnen Punkte A aus gezogen, *Sehnen eines gegebnen Kreises* so durchschneiden, daſs das Quadrat über AE *durch das Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder Sehne* bestimmt wird. Diesen Ort führe ich im folgenden Lehrsatz auf, um mit demselben nach *Simsons* Beyspiel diesen Haupttheil aus der Lehre der ebnen Oerter zu beschlieſsen.

[LEHRSATZ 26.]

1) *Wenn ein Kreis, mithin auch dessen Mittelpunkt C, und irgend ein zweyter Punkt A gegeben sind, gleich viel ob A innerhalb, oder ausserhalb, oder auf der Kreislinie liegt, und wenn grade Linien, vom Punkte A aus gezogen, sich mit den Sehnen BD dieses Kreises je zwey und zwey so in Punkten e durchschneiden, 1) dass entweder* $Ae^2 = Be \times De$, *oder, wenn S einen gegebnen Flächenraum bedeutet,* $Ae^2 = Be \times De \mp S$ *ist: und irgend einer dieser Punkte e liegt ausserhalb des Kreises, auf der Verlängerung einer Sehne; so ist stets der geometrische Ort aller solcher Punkte e eine grade Linie von gegebner Lage. — 2) Durchschneiden sie sich hingegen, unter übrigens gleichen Umständen, so, dass* $Ae^2 = S - Be \times De$ *ist; so ist der Ort der Punkte e eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse.* Fig. 71.

2) *Wenn aber von den graden Linien, die vom gegebnen Punkte A aus gezogen werden, irgend eine sich mit einer der Sehnen BD selbst, folglich innerhalb des Kreises, in einem Punkte E so durchschneidet, 1) dass entweder* $AE^2 = BE \times DE$, *oder* $AE^2 = BE \times DE \mp S$ *ist; so ist umgekehrt stets der geometrische Ort aller Punkte E, eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse: und durchschneiden sie sich 2) so, dass* $AE^2 = S - BE \times DE$ *ist; so ist der Ort aller Punkte E eine grade Linie von gegebner Lage.*

Da diesen Voraussetzungen gemäss der Punkte A und der Mittelpunkt des Kreises, C, gegeben sind, so ist auch die grade Linie AC der Lage und Grösse nach, und überdem der Halbmesser CG oder CM des Kreises der Grösse nach gegeben. Man ziehe von dem Punkte e oder E, welcher den Bedingungen des Satzes genüge thun möge, durch den Mittelpunkt die grade Linie eH, oder EH, von der der Kreis den Durchmesser FG abschneide.

1) *Liegt dieser Punkt e ausserhalb des Kreises, in der Verlängerung einer der Sehnen BD*, so ist $Be \times De =$
* 22. 2. $Fe \times Ge$* $= Ce^2 - CG^2$, weil in diesem Fall dem in C gleich getheilten Durchmesser CG, das Stück Ge
II. f. 1. angesetzt ist. Folglich muss *der ersten Voraussetzung*
β. gemäss, nach welcher $Ae^2 = Be \times De \mp S$ seyn soll, $Ae^2 = Ce^2 - CG^2 \mp S$, und also $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S$ seyn, wo das *obere* oder das *untre* Zeichen gilt, je nachdem Ae^2 um den gegebnen Raum S *kleiner* oder *grösser* als das Rechteck $Be \times De$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung durchschneiden folglich die vom Punkte A aus gezognen Linien, die verlängerten Sehnen so in Punkten e, dass in den Dreyecken CAe, die insgesammt über der gegebnen unveränderlichen Linie CA stehn, *der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln* gegeben und unveränderlich ist, nemlich gleich dem Quadrate des gegebnen Halbmessers, vermehrt oder vermindert um den gegebnen Raum S. Deshalb muss *der Ort der Durchschnittspunkte e*, als Spitzen dieser Dryecke, *ein Perpendikel auf der gegebnen*

gegebnen Linie CA *, und zwar *dasjenige Perpendikel seyn*, welches vom Punkte O, der in der Mitte der Grundlinie CA liegt, nach der Seite des kleinern Schenkels zu, um eine Linie Oh absteht, deren Grösse dadurch bestimmt wird, dass $2\,Oh \times CA = CG^2 \pm S$ oder $4\,CO \times Oh = CG^2 \pm S$ ist. Und daraus findet man Oh durch Construction grade wie in Lehrsatz 16 Folgerung 3. (*Apollonius ebne Oerter II.* 7. 8. 9.)

Ist aber der *zweyten Voraussetzung* gemäss $Ae^2 = S - Be \times De$, so muss $Ae^2 + Be \times De = S$ und folglich $Ae^2 + Ce^2 - CG^2 = S$, oder $Ae^2 + Ce^2 = S + CG^2$ seyn. Unter dieser Voraussetzung durchschneiden sich also die Schenkel der Dreyecke ACe, welche über der gegebnen Linie AC stehn, so, dass *die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln* einem gegebnen Flächenraum gleich ist, weshalb nun *der Ort der Durchschnittspunkte e* keine grade Linie, sondern *eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse wird* *. Und zwar, wenn man die Linie CA im Punkte O halbirt, so ist *O der Mittelpunkt* dieser Kreislinie, und *ihren Halbmesser Oe* findet man daraus, dass $Oe^2 = \frac{1}{2}(S + CG^2) - CO^2$ seyn muss *. (*Apollonius II.* 14.)

*17. f. 1.

*17. f. 1.

2) *Liegt der Durchschnittspunkt E in der Sehne BD selbst*, und also innerhalb des Kreises, so wird diese Sehne vom Durchmesser FG, der durch den Punkt E geht, so durchschnitten, dass $BE \times DE = FE \times GE$ * $= CG^2 - CE^2$ ist, indem der Durchmesser EG in diesem Fall im Punkte C gleich, und im Punkte E ungleich getheilt ist *.

*22. 1.

*11. f. 1.

Ist also nach der *ersten Voraussetzung* $AE^2 = BE \times DE \mp S$, so muss in diesem Fall $AE^2 = CG^2 - CE^2 \mp S$, und $AE^2 + CE^2 = CG^2 \mp S$ seyn. Also ist dann, nicht wie unter 1) der Unterschied, sondern *die Summe der Quadrate* aus den Linien AE, CE, welche von zwey gegebnen Punkten aus gezogen, sich durchschneiden, einem gegebnen Raume gleich, mithin *der Ort der Punkte E* jetzo *eine Kreislinie*, um einen Punkt O, der in der Mitte zwischen A und C liegt, als Mittelpunkt beschrieben, mit einem *Halbmesser OE*, für den $OE^2 =$
* 17. f. $\frac{1}{2}(CG^2 \mp S) - OC^2$ ist*. (*Apollonius* II. 11. 12. 13)

Ist aber *nach der zweyten Voraussetzung*, $AE^2 = S - BE \times DE$, so muss in diesem Fall $AE + BE \times DE = S$ oder $AE^2 + CG^2 - CE^2 = S$, und folglich $AE^2 - CE^2 = S - CG^2$ und umgekehrt $CE_2 - AE^2 = CG^2 - S$ seyn. Da also der *Unterschied der Quadrate* über den Schenkeln AE, CE einem gegebnen Raume gleich ist, so wird der *Ort der Punkte E* in diesem Fall *ein Perpendikel* auf *AC*, welches, wie in der ersten Voraussetzung unter 1) aus Lehrsatz 16. Folgerung 3. dadurch gegeben wird, dass $4\, CO \times OH = CG^2 - S$ seyn muss. (*Apollonius* II. 10.)

Bestimmung, im Fall der Ort eine grade Linie ist, und zwar 1) für Punkte e ausserhalb des Kreises. Da der Ort dieser Punkte das Perpendikel eh, und für dieses
* 16. 1. $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S = 4\, CO \times Oh = Ch^2 - Ah^2$ ist, so muss, wenn *S gleich null* ist, und *im Fall des obern Zeichens*, immer $Ce > Ae$ und $Ch > Ah$ seyn, folglich das Perpendikel zu der Seite von O, auf welcher

A liegt, aufstehn. Folglich, wenn O *ausserhalb* des Kreises liegt, oder $CA > 2\,CM$ ist, auch der Punkt h und das ganze Perpendikel eh nothwendig *ausserhalb des Kreises* fallen. Dasselbe findet *im Fall des untern Zeichens* statt, wenn $CG^2 > S$ ist, da hingegen, wenn $CG^2 < S$ ist, $Ce < Ae$ wird, unddas Perpendikel eh nach der Seite von C zufällt.

Da ferner der Halbmesser $CG = CM$ ist, muss auch $4\,CO \times Oh - CM^2 = \pm S$ seyn. *Ist A ein Punkt im Kreise*, so besteht der Halbmesser CM aus zwey gleichen Theilen CO, OA und einem dritten diesen angesetzten Stück AM, $CM = 2\,CO + AM$, und deshalb ist dann $CM^2 = 4\,CO \times OM + AM^2$*, folglich $4\,CO \times (Oh - CM) - AM^2 = \pm S$. Daher muss, wenn S gleich null ist, und im Fall des *obern* Zeichens, nothwendig $Oh > OM$, also *h ein Punkt ausserhalb des Kreises* seyn, welches im Fall des *untern* Zeichens nicht nöthig ist, da für dieses, nach Umständen, Oh kleiner oder grösser als OM seyn, und h innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen kann. — *Wenn A in der Kreislinie liegt*, ist $CM^2 = 4\,CO \times OA$, mithin $4\,CO \times (Oh - OA) = \pm S$. Ist folglich alsdann *S gleich null*, so muss Oh gleich OA seyn, also h in A fallen, und eh den Kreis im Punkte A berühren*. Im Fall des *obern* Zeichens liegt dagegen h *ausserhalb*, im Fall des *untern* innerhalb des Kreises. — *Wenn endlich A ausserhalb des Kreises* liegt, ist $CM = 2\,CO - AM$, folglich $CM^2 = 4\,CO^2 - 4\,CC \times AM + AM^2$* $= 4\,CO \times (AO - AM) + AM^2 = \pm 4\,CO \times OM + AM^2$, wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem M mit A oder mit C auf einerley Seite

* 11. f. 3.

* 22. 2.

* 8.

von O liegt, d. h. O ein Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises, und CA kleiner oder grösser als 2 CM ist. Wenn daher *S gleich null* oder *additiv* genommen wird, und O liegt im Kreise, so muss $4\ CO \times (Oh - OM) - AM^2 = 0$ oder S seyn, welches nur dann möglich ist, wenn $Oh > OM$, also h ein Punkt ausserhalb des Kreises ist. — *Folglich liegt, wenn S gleich null oder additiv ist, das Perpendikel eh, als Ort der Punkte e, unter allen Umständen ausserhalb des gegebnen Kreises*, nur dass es den Kreis in dem Fall, wenn S gleich null und A ein Punkt der Kreislinie ist, *berührt*.

2) *Für Punkte E innerhalb des Kreises*, für welche der Ort ein Perpendikel EH auf dem Durchmesser AE oder dessen Verlängerung ist, muss der Fusspunkt H

*I. 16. 1. immer *innerhalb* des Kreises liegen, weil $CH < CE$* und E ein Punkt im Kreise ist, und es ist für dasselbe $CE^2 - AE^2 = CH^2 - AH^2 = CM^2 - S = 4\ CO \times OH$. Ist also der gegebne Raum S dem Quadrate über dem Halbmesser des gegebnen Kreises gleich, $S = CM^2$, so ist $CA = AH$, H fällt in O, und das Perpendikel EH steht im Punkte O selbst auf. — Ist $S < CM^2$, so fällt H mit A auf einerley Seite von O, indem dann $CH > AH$ ist, und dann muss nothwendig O ein Punkt im Kreise, also $CA < 2\ CM$ seyn, und, wie wir eben gesehn haben, $CM^2 = 4\ CO \times OM + AM^2$ oder $CM^2 - AM^2 = 4\ CO \times OM$ seyn. Da nun $OM > OH$ ist, so muss in diesem Fall immer $CM^2 - AM^2 > CM^2 - S$ und daher $S > AM^2$ seyn. Wenn der gegebne Raum kleiner als dieses Quadrat ist, so giebt es keine Punkte

E welche den Voraussetzungen, die sich widersprechen, genüge thun könnten. — Ist endlich $S > CM^2$, so ist $AH > AC$ und der Punkt H fällt mit dem Mittelpunkte C zu einerley Seite des Punktes O; und in diesem Fall können die Punkte A und O auch ausserhalb des Kreises liegen.

Bestimmung im Fall der Ort eine Kreislinie ist. 1) Für *Punkte e ausserhalb* des Kreises, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $Ae^2 + Ce^2 = S + CM^2$ ist; und dann ist O der Mittelpunkt, und für den Halbmesser $2\,Oe^2 = S + CM^2 - 2\,CO^2$. Ist O ein Punkt im gegebnen Kreise; so muss immer $S > AM^2$ seyn, sonst ist der Ort unmöglich. Ist O ein Punkt ausserhalb des gegebnen Kreises, und $S < AM^2$, so liegen der Ort und der gegebne Kreis ganz ausserhalb einander; ist $S > AK^2$, so schliesst der Ort den gegebnen Kreis ringsum ein, und ist $S < AK^2$ aber $> AM^2$, so durchschneidet der Ort den gegebnen Kreis, da denn einige Punkte e ausserhalb, andre innerhalb des gegebnen Kreises liegen; daher sich daraus, dass ein Punkt e auf der Verlängerung der Sehne BD liegt, keineswegs schliessen lässt, dass auch alle andre Punkte e auf Verlängerungen der Sehnen BD liegen müssen.

2) Für *Punkte E innerhalb des* Kreises, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $AE^2 + CE^2 = CM^2 \mp S$ ist, und dann ist O der Mittelpunkt, und für den Halbmesser des Orts $2\,OE^2 = CM^2 - 2\,CO^2 \mp S$. In diesem Fall muss, wenn *S gleich null ist*, der Ort von dem gegebnen Kreise ringsum eingeschlossen werden. *Im Fall*

des obern additiven Zeichens durchschneiden sich der Ort und der gegebne Kreis, wenn O *ausserhalb* des gegebnen Kreises liegt; ist aber O ein Punkt *in diesem* Kreise, so wird, je nachdem OM gröser, gleich, oder kleiner als ON ist, der Ort ganz innerhalb des gegebnen Kreises fallen, oder ihn innerlich berühren, oder ihn schneiden. *Im Fall des untern subtractiven Zeichens* wird der Ort wiederum vom gegebnen Kreise eingeschlossen.

Anmerkung. Diese Bestimmungen lassen sich mit Hülfe der Aussagen in Lehrsatz 11, Folgerung 2 und Lehrsatz 17 auf eine ähnliche Art, als für den Fall, wenn der Ort eine grade Linie ist, entwickeln, weshalb ich aber auf Simsons Wiederherstellung von Apollonius ebnen Oertern verweisen muss, um mich hier nicht in zu grosse Weitläufigkeit zu verlieren.

Simson macht aus den Theilen dieses Orts acht verschiedne Sätze, und seine Entwicklung derselben nimmt 18 Seiten ein. In *Pappus* Bericht über den Inhalt der Ebnen Oerter des Apollonius, findet sich nur ein eingeschränkter Fall der ersten Voraussetzung unter 1) und selbst dieser ist durch die Abschreiber entstellt worden. Auch stimmt Lemma 33 aus *Euklids Porismen* (Pappus VII, 159) mit dem einfachsten Fall von 1) überein, indem dieser Lehnsatz aussagt, dass falls eh auf dem verlängerten Durchmessr LM so senkrecht steht, dass $Lh \times hM = Ch2$ ist, auch für jeden Punkt e in diesem Perpendikel, wenn man eL zieht, $Fe \times eG = Ce^2$ seyn muss.

Man sieht leicht, dass man die Aussage dieses Orts nach Art der vorigen Oerter noch erweitern und verallgemeinern kann, welches aber, wie es scheint, schon Simson für überflüssig gehalten hat. Ich endige daher mit diesem Satze nach Simsons Beyspiel diesen Haupttheil der Lehre von den Ebnen Oertern, den ich hier ziemlich ausführlich vorgetragen habe, weil theils meine Absicht, wo möglich, die Geometrie in ihrem ganzen Umfange, wie sie von Alten und Neuern behandelt worden ist, im Kurzen darzustellen, dieses erforderte, theils die Sätze an sich so nett und brauchbar sind, theils sehr gute Uebungen in der geometrischn Analysis, und Beyspiele von zusammenhängenderen geometrischen Untersuchungen an die Hand geben.

Auf *algebraischem Wege*, wo man die Eigenschaften der Curven lediglich aus ihrer Gleichung *, durch algebraische Mittel, *22. f. 5. und nicht wie hier durch Darstellung der Figur und durch geometrische Constructionen erforscht, läst sich indess schon manches von dem hier Vorgetragnen erleichtern, und überdem der Kreis noch auf allgemeinere Arten als Ort eines bestimmten Punktes darstellen, und die Bedingung, unter welcher ein Kreis allein der Ort von Punkten seyn kann, allgemein entwickeln, daher man die weitre Ausbildung dieser Lehre, billig der algebraischen Analysis vorbehält.

Ich wende mich nun zu den Aufgaben, welche zu diesem Buche gehören, werde hier aber nicht viel mehr als die unentbehrlichsten Constructionsarten, auf die ich mich zum Theil schon berufen habe, vortragen. Andre Aufgaben, und besonders den Gebrauch der aufgestellten Oerter in Auflösung geometrischer Aufgaben, verspare ich für das Buch des folgenden Theils, welches der geometrischen Analysis bestimmt ist.

AUFGABEN

welche zum dritten Buche gehören.

AUFGABE I.

Fig. 72. *Ein gegebnes Vieleck in ein Dreyeck von gleichem Inhalt zu verwandlen.*

Man ziehe eine Diagonale, z. B. AF, ſo, daſs dadurch von dem ganzen Vieleck ein Dreyeck AFG abgeſchnitten wird, und duch die Spitze G dieſes Dreyecks eine Parallellinie mit der Diagonale. Darauf verlängere man eine von den Seiten der Figur, welche an das abgeſchnittene Dreyeck anſtoſsen, z. B. AB, bis zu ihrem Durchſchnitt H mit der Parallellinie, und ziehe von dem andern Endpunkte der Diagonale die grade Linie FH, ſo erhält man ein Vieleck mit den Seiten FH, HB, welches eine Seite weniger als das Gegebene, und doch mit demſelben gleichen Inhalt hat.

Denn das ſo gebildete Dreyeck FHA ſteht mit dem abgeſchnittnen FGA über gleicher Grundlinie FA und zwiſchen gleichen Parallelen FA, GH, hat alſo mit
* 2. f. 2. demſelben gleichen Innhalt *, daher es ſich unbeſchadet des Flächenraums ſtatt des abgeſchnittenen Dreyecks ſetzen läſst. Der Conſtruction gemäſs liegen aber

BA und AH in grader Linie, folglich hat das letztere Vieleck *gleichen Inhalt*, aber *eine Seite weniger als das Gegebne*.

Fährt man auf diese Art fort, und schneidet z. B. durch die Diagonale BD wiederum ein Dreyeck BCD ab, für welches, wenn HB bis I verlängert wird, man ein Vieleck FHIDEF erhält, welches *zwey Seiten weniger* und *denselben Inhalt* als das Gegebne hat.

Da man nun dieses Verfahren so lange fortsetzen kann, bis man endlich auf ein *Dreyeck* kömmt, so läſst sich mittelst desselben jede gradelinige Figur von beliebig viel Seiten, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandeln.

Bemerkung 1. Oder überhaupt kann man mittelst dieser Methode *zu jeder gegebnen gradelinigen Figur, eine ihr gleiche Figur von einer beliebigen Seitenzahl, die geringer als die Seitenzahl der gegebnen Figur ist, bilden.* Mit gehöriger Vorsicht läſst sich dieses Verfahren selbst auf krummlinige Figuren übertragen *, und ist beym Ausmessen von unregelmäſsigen Flächenräumen oft von Nutzen. *5. Z. 2.

Bemerkung 2. *Hohle Winkel*, wie E, ändern bey diesem Verfahren nichts. Sie geben Diagonalen, wie DF, welche ausserhalb der Figur fallen, und schneiden Dreyecke wie DEF ab, welche dem Flächenraume der Figur an dem Raume mangeln den die Diagonale mit den übrigen Seiten umschliest. Die Parallele durch die Spitze E mit einer solchen Diagonale, durchschneidet die Seiten der Figur, z. B. die Seite ID der reducir- *I. E. 16

ten Figur in K. Zieht man FK, so sind die Dreyecke DEF, DKF gleich, und mithin hat dann das Vieleck HIKF, mit dem Vieleck HIDEF gleichen Inhalt, aber eine Anzahl von Seiten, die um eins kleiner ist.

Fig. 73. Bemerkung 3. α) Zieht man alle Diagonalen, durch welche man Dreyecke Schrittweise abschneidet, von demselben Winkelpunkt D aus, und schafft aus jedem Dreyeck die Seite weg, welche der Spitze D gegenüber steht, *so erhält das Dreyeck, auf welches man*
Fig. 74. *zuletzt kömmt, den Winkel D als Winkelpunkt.* — β) Zieht man dagegen alle Diagonale von einem Punkt in einer Seite der Figur ABCD aus, *so liegt eine Spitze des entstehenden Dreyecks in diesem Punkte der Seite.* — γ) Und auf dieselbe Art *läßt sich irgend ein anderer Punkt bestimmen, in welchem die Spitze,* und eine Seite der Figur, in welche *die Grundlinie des zu bildenden Dreyecks liegen soll,* dergleichen in practischen Büchern mit großer Umständlichkeit, und mit weit mehr Wortaufwand als die Sache verdient, gelehrt zu werden pflegt.

AUFGABE 2.

Ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu bilden, welches mit einem gegebenen Parallelogramm, oder Trapezoid, oder Dreyeck, gleichen Inhalt hat.

Taf. III. Fig. 6. 1) Ziehe von den Endpunkten der Grundlinie des gegebenen Parallelogramms, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien nach der gegenüberstehenden Seite, so entsteht ein Parallelogramm unter dem gegebenen Winkel, welches mit dem erstern gleichen Inhalt hat *. * 1

2) Theile die eine der nicht-parallelen Seiten des *Trapezoids*, z. B. CB, in zwey gleiche Theile im Punkte I, ziehe durch diesen Punkt eine Parallellinie mit der gegenüberstehenden Seite AD, und nach dieser von den Punkten A, D, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm unter dem gegebnen Winkel beschrieben, und hat mit dem Trapezoid gleichen Inhalt *. Fig. 14. * 6.

3) Im *Dreyeck* theile man eine der Seiten, z. B. LB, in zwey gleiche Theile im Punkte A, ziehe durch die gegenüberstehende Spitze mit LB eine Parallellinie, und nach dieser aus den Punkten L, B, unter dem gegebnen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm das Gesuchte. Taf. V. Fig. 75.

Folgerung. Da sich jedes Vieleck, der vorigen Aufgabe gemäfs, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandlen läfst, *so kann man* also auch *jedes Vieleck in ein Parallelogramm mit einem gegebnen Winkel verwandlen.* — Also auch in ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel, d. h. *in ein Rechteck.*

AUFGABE 3.

Ueber eine gegebne grade Linie MN ein Parallelogramm zu beschreiben, welches mit einem gegebnen Parallelogramm ABCD gleichen Inhalt hat, und unter gleichem Winkel enthalten ist. Fig. 76.

Man verlängere eine der Seiten des gegebnen Parallelogramms, z. B. AB, schneide auf der Verlängerung BE, gleich der gegebenen Linie MN, ab, und ziehe durch E und den Eckpunkt C eine grade Linie. Durchschneidet diese die verlängerte Seite AD des gegebnen Parallelogramms in einem Punkte F; so ist *DF die zweyte Seite des gesuchten Parallelogramms.* Und verlängert man die beyden andern Seiten des Gegebnen über C hinaus, und zieht durch E und F mit ihnen Parallellinien; so ist *die Ergänzung BGHI, welche auf diese Art entsteht, das gesuchte Parallelogramm.*

Denn da vermöge der Construction die Linien AE, DI, FH, und auch die Linien AF, BG, EH, parallel laufen, so sind die Vierecke welche auf diese Art gebildet werden, insgesammt gleichwinklige Parallelo-
*8. (1) gramme *. Ueberdem sind die Ergänzungs-Paral-
*8. (3) lelogramme ABCD und CGHI einander gleich *; so auch die gegenüberstehenden Seiten DF = CH und CI
* I. 34. = BE = MN *. Folglich ist CGHI das gesuchte Parallelogramm, welches über der gegebnen Linie MN = CI steht, und mit dem gegebnen Parallelogramm ABCD gleichwinklig und gleich grofs ist.

Folgerung 1. Auf die Art läſst sich also auch *ein gegebnes Rechteck in ein anderes, von gleicher Gröſse, welches über einer gegebnen Grundlinie steht, verwandeln.* Und zwar, da es mehrentheils nur darauf ankömmt, die Höhe dieses zweyten Rechtecks zu finden, und hierzu der erste Theil der Construction hinreicht; so verdient diese einfache Methode selbst vor der den Vorzug, die wir in den folgenden Aufgaben, mittelst Auffindung einer vierten Proportionallinie, werden kennen lernen.

Folgerung 2. Ferner läſst sich auf dieſe Art jedes *gegebne Dreyeck LMN, oder jedes Trapezoid in ein Parallelogramm von gleichem Inhalt, welches über eine gegebne Linie MN, und unter einem gegebnen Winkel W beſchrieben iſt*, und zwar insbeſondere, *in ein Rechteck über gegebner Grundlinie verwandeln.* Man verwandle zu dem Ende das gegebne Dreyeck oder Trapezoid in ein gleich groſses Parallelogramm, unter dem gegebnen Winkel *, oder in ein gleich groſses Rechteck, und verfahre dann wie unſere Conſtruction angiebt. Eine andre Methode lehrt Aufgabe 8. *Afg. 2. (2. 3.)

Folgerung 3. Endlich läſst ſich auch durch dieſes Verfahren *jedes gradelinige Vieleck in ein Parallelogramm unter einem gegebnen Winkel*, und zwar insbeſondere *in ein Rechteck, welches über eine gegebne Grundlinie MN ſtehet, verwandeln.* Dazu führen verſchiedne Wege. α) *Entweder* man verwandelt das Vieleck in Ein Dreyeck von gleichem Inhalt *, das Dreyeck in ein Rechteck*, und dieſes nach dem eben gelehrten Verfahren in ein gleich groſses Rechteck, welches über der gegebnen Linie MN ſteht*. — β) *Oder* man zerſchneidet die gegebne vielſeitige Figur, entweder in lauter Dreyecke, oder in Trapezoide *, verwandelt jeden dieſer Theile einzeln in Rechteck *, und dieſe in gleich groſse Rechtecke über der gegebnen Seite MN*, trägt dann die zweyten Seiten aller dieſer Rechtecke in

*Afg. 1.
*Afg. 2.
* f. 1.
*6. Z. 2.
*Afg. 2
* f. 1.

eine grade Linie zusammen, und beschreibt über sie als Grundlinie, und mit MN als Höhe, ein Rechteck;
* E. 5. so erhält man das gesuchte Rechteck *.

Auf dieselbe Art läſst sich *über eine gegebne Linie MN ein Rechteck bilden, welches der Summe oder dem Unterschiede zweyer Vielecke R, S gleich ist*, je nachdem man die Rechtecke über MN, denen beyde Vielecke einzeln gleich sind, zu entgegengesetzter oder zu einerley Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie MN, neben oder auf einander legt.

Anmerkung 1. Die Geometer des Mittelalters hatten für diese Construction ein eignes Kunstwort: *Applicatio.* Doch bezeichnet im weitläufigen Sinn *applicare figuram ad lineam* oder *secundum lineam* überhaupt das Beschreiben einer Figur über eine
*Afg. 12 a. bestimmte Linie *.

Anmerkung 2. Da der Zahlausdruck eines Rechtecks das Produkt aus den Zahlausdrücken der Grundlinie und Höhe ist, z. B. AB × AD, und umgekehrt der Zahlausdruck der Höhe aus dem des Inhalts und der Grundlinie durch Division gefunden
* 6. a. wird, $h = \frac{i}{g}$ *; so ist im Fall der ersten Folgerung, der Zahlausdruck der gesuchten Höhe DF des zweyten Rechtecks,

$$DF = \frac{AB \times AD}{BE}$$

Ein solcher Zahlausdruck läſst sich daher in Linien darstellen, d. h. *construiren*, wenn man das Rechteck, dessen Zahlausdruck AB x AD, d. h. welcher aus den Seiten AB und AD beschrieben
* 4. ist *, in ein gleich groſses Rechteck über die Grundlinie BE verwandelt; und dieses berechtigt uns in geometrischen Untersuchungen einen solchen Ausdruck durch: *Höhe eines Rechtecks, welches über der Grundlinie BE steht, und mit dem Rechteck*

AB x *AD gleichen Inhalt hat*, zu übersetzen, wie wir das z. B. in der Auslegung des 20sten Lehrsatzes gethan haben.

Anmerkung 5. Da das, was bey den Zahlausdrücken der Linien und Flächen *Division* ist, in der geometrischen Darstellung sich durch diese Construction bewerkstelligen läfst; so übertrugen die ältern Mathematiker das Kunstwort für dieses Verfahren auch auf die Division, und sagten z. B. *numerum applicare ad numerum*, um das Dividiren einer Zahl durch eine andre anzuzeigen *. *4. A. 2.

Aufgabe 4.

1) *Eine gegebne grade Linie AB in beliebig viel gleiche Theile zu theilen.*

2) *Eine gegebne grade Linie AB, entweder mehrern gegebnen Linien P, Q, R, oder einer gegebnen eingetheilten Linie MN, proportional einzutheilen.*

1) Gesetzt man soll die grade Linie AB in 5 gleiche Theile theilen; so ziehe man durch den Endpunkt A dieser Linie, unter einem beliebigen Winkel gegen dieselbe, und in gehöriger Länge, eine andre grade Linie, trage auf diese eine beliebige Linie AC fünfmal nebeneinander auf, und ziehe, vom letzten Endpunkt G dieser Theile, nach dem Endpunkte B eine grade Linie GB. Dann schneidet, behaupte ich, eine Parallellinie mit GB, die durch den ersten Theilpunk C gezogen wird, auf der gegebnen Linie AB den fünften Theil AI ab, und trägt man AI fünfmal nebeneinander, oder zieht man durch alle fernern Theilpunkte D, E, F, mit GB Parallellinien, so wird AB auf Fig. 77.

die verlangte Art, das heifst in fünf gleiche Theile eingetheilt.

Denn da vermöge diefer Conftruction die Parallellinien CI, DK etc. die Schenkel AB, AG des Winkels A durchfchneiden, fo theilen fie diefe Schenkel einan-
*7. Z. 2. der proportional *. Sind alfo, der Conftruction gemäfs, die Stücke AC, CD etc. insgefammt unter einander gleich, und jedes fünfmal in der Linie AG enthalten; fo müffen auch die Stücke AI, IK etc. untereinander gleich, und jedes der fünfte Theil der gegebnen Linie AB feyn. Mithin ift diefe in fünf gleiche Theile getheilt.

Fig. 78. 2) Soll die grade Linie AB den gegebnen Linien P, Q, R, in diefer angegebnen Folge proportional ge-
* E. 8. theilt werden *, fo trage man auf eine grade Linie, welche durch den einen Endpunkt A der gegebnen, unbeftimmt gezogen ift, die gegebnen Linien P, Q, R in der verlangten Folge nebeneinander, fo dafs AC = P, CD = Q, DE = R wird, ziehe durch die beyden Endpunkte B, E der gegebnen Linie, und der letzten aufgetragenen, eine grade Linie BE, und mit ihr parallel durch die Punkte C und D Parallellinien, fo wird durch diefe Parallelen die Linie AB auf die verlangte Art, das heifst nach dem Verhältnifs der Linien P, Q, R, in der verlangten Ordnung eingetheilt. Denn wegen des Parallelismus der Linien CI, DK, EB, verhalten fich die Theile AI, IK, KB des einen Schenkels, wie die übereinftimmenden Theile AC, CD, DE des andern Schenkels

kels *; und diese Theile sind vermöge der Construction den gegebnen Linien P, Q, R gleich. * 7.

Soll endlich die grade Linie AB einer gegebnen eingetheilten Linien MN proportional getheilt werden, so verfährt man mit den Theilen, welche auf dieser Linie gegeben sind, grade so, wie hier mit den gegebnen Linien P, Q, R.

Noch andre Methoden beyde Aufgaben aufzulösen, werden wir im folgenden Buche kennen lernen.

Bemerkung 1. Man sieht leicht dass diese Construction sich auch auf den Fall ausdehnen läſst, wenn die gegebne Linie nur ein bestimmter Theil der einzutheilenden werden soll, z. B. der erste, der mit dem Theil AC der eingetheilten, gegebnen Linie übereinstimmt *. Denn in diesem Fall ziehe man durch die übereinstimmenden Punkte B und C eine grade Linie, und mit dieser durch die Punkte D und E Parallellinien; so theilen diese, wegen des Parallelismus der Linien durch C, D, E, die verlängerte AB, der gegebnen Linie proportional ein *. *E. 8. α. * 7.

Bemerkung 2. Da ferner nicht blos die Schenkel eines Winkels, sondern je zwey grade Linien, welche Parallellinien durchschneiden, von diesen proportional eingetheilt werden *; so sieht man leicht, dass man *diese Constructionen auch dahin abändern kann*, dass man durch die Theilpunkte * der eingetheilten Linie AG oder AE, willkührlich Parallellinien zieht, und dann um irgend einen Punkt T in der äussersten Pa- Fig. 78 *7. Z. 2. *E. 8. α.

rallellinie, mit der einzutheilenden Linie als Halbmesser, einen Kreisbogen beschreibt, der die andre äusserste Parallellinie im Punkte V durchschneide. Zieht man TV, so ist diese Linie der gegebnen gleich, und auf die verlangte Art (z. B. in 5 gleiche Theile) eingetheilt, und man kann dann ihre Eintheilung durch einen Zirkel unmittelbar auf die gegebne Linie übertragen.

Zu *Theilungen von Linien in gleiche Theile*, mittelst dieser Construction, dient ein besonderes *Instrument*, worauf eine Menge Parallellinien in gleichen Entfernungen von einander eingegraben sind, und welches uns der Mühe überhebt, jedesmal erst gleiche willkührliche Theile aufzutragen, und durch die Theilpunkte Parallellinien zu ziehn.

Auf dieselbe Art findet man auf den Verlängerungen einer gegebnen Linie AB die Punkte, welche mit ihr eine Linie bilden, die einer gegebnen AE so proportional eingetheilt ist, dass AB mit einem der mittlern Theile CD übereinstimmt. Man ziehe nemlich durch alle Theilpunkte willkührlich Parallellinien, trage zwischen die beyden durch C und D die gegebne Linie AB ein, und verlängere sie, bis sie von allen jenen Parallellinien durchschnitten ist. — Dann hat man die verlangte eingetheilte Linie.

Zusatz I. *Um ein gegebnes Dreyeck durch Linien aus der Spitze in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, oder in Theile, welche zu einander ein gegebnes Ver-*

hältnifs haben einzutheilen, theile man die Grundlinie nach der verlangten Art ein, und ziehe aus der Spitze grade Linien nach allen Theilpunkten.

Denn das gegebne Dreyeck wird dadurch in kleine Dreyecke getheilt, die insgefammt auf derfelben graden Linien ftehn, und deren Spitze in einem Punkte liegen, folglich in Dreyecke von gleicher Höhe *. Solche Dreyecke verhalten fich aber wie ihre Grundlinien *; daher das gegebne Dreyeck dann auf die verlangte Art eingetheilt ift.

* E. 2.
* 5. f. 1.

Zufatz II. *Um ein gegebnes Parallelogramm durch Parallellinien mit einer der Seiten in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, oder in Theile, welche zu einander ein gegebnes Verhältnifs haben, einzutheilen*, theile man die zweyte, an jener anftofsende Seite auf die verlangte Art ein, und ziehe durch die Theilpunkte Parallellinien mit der erftern Seite.

Denn die kleinen Parallelogramme, welche auf diefe Art entftehn *, liegen insgefammt zwifchen zwey Parallellinien; haben alfo gleiche Höhe *, verhalten fich folglich wie ihre Grundlinien *, und das gegebne Parallelogramm ift daher auf die verlangte Art eingetheilt.

* I. 34. f. 1
* E. 3.
* 5. f. 1.

AUFGABE 5.

1) *Eine gegebne grade Linie BC, nach einem gegebnen Zahlverhältniffe m : n. einzutheilen.*

2) *Auf der Verlängerung einer gegebnen graden Linie BC so einen Punkt g zu bestimmen, daſs die beyden Abschnitte Bg, Cg, in dem gegebnen Zahlverhältnisse m : n stehn.*

Das gegebne Zahlverhältniſs m : n sey welches es wolle, so läſst es sich jedesmal leicht in ein Linearverhältniſs verwandeln. Denn man braucht zu dem Ende nur aus einer willkührlichen Linie zwey Linien P, Q, grade so zusammenzusetzen, wie die beyden Zahlen m und n aus der Einheit zusammengesetzt sind. Alsdann verhält sich m : n = P : Q und P und Q sind bekannte Linien.

1) Nun soll *im ersten Fall der Aufgabe* die gegebne Linie BC selbst nach dem Verhältnisse m : n, folglich den Linien P und Q proportional eingetheilt werden; welches durch das Verfahren der vorigen Aufgabe geleistet wird *.

*Afg. 4. (2).

Fig. 79.

2) *Im zweyten Fall* soll auf der Verlängerung der gegebnen Linie BC ein Punkt g so gefunden werden, daſs sich verhalte Bg : Cg = m : n = P : Q. Die beyden Abschnitte Bg, Cg sind in diesem Fall um die gegebne Linie BC von einander verschieden, können also nicht im Verhältniſs der Gleichheit stehn; und würde dieses gefordert, so wäre die Aufgabe in diesem Fall unmöglich. Ueberdem muſs, je nachdem m gröſser oder kleiner als n ist, auch Bg gröſser oder kleiner als Cg seyn, mithin der gesuchte Punkt g auf der Verlängerung der Linie BC über C oder über B hinaus liegen. Alles dieses zeigt auch die folgende Construction.

Gesetzt nemlich, es sey $m > n$, so verhält sich $Bg : Cg : Bg - Cg = m : n : m - n = P : Q : P - Q$*, oder $P - Q : P = BC : Bg$. Man ziehe daher durch B eine grade Linie unter einem willkührlichen Winkel gegen BC, trage auf sie von B aus, $BE = P$, und vom Endpunkte E dieser Linie, rückwärts $EF = Q$ auf, (so dass $BF = P - Q$ wird) und ziehe FC so schneidet eine Parallellinie mit FC, durch E gezogen, auf der Verlängerung von B über C hinaus den gesuchten Punkt g ab. Denn wegen des Parallelismus dieser Linien verhält sich $BC : Bg : Cg = BF : BE : EF$* $= P - Q : P : Q$,* folglich $Bg : Cg = m : n$.

* V. 4. β.

* 7. 2.

Ist dagegen $m < n$, mithin auch $P < Q$ und $BE < EF'$, so fällt der Punkt F' über B hinaus, auf dem Stück der willkührlich gezognen Linie, welche mit dem erstern gegen B auf entgegengesetzte Art liegt, und zieht man nun CF', und mit ihr durch E eine Parallellinie, so durchschneidet auch diese die Linie BC, nur auf der entgegengesetzten Verlängerung, über B hinaus.

Sollte endlich $m = n$, folglich auch $P = Q$ und $BE = EF$ seyn, so müssten die Punkte B und F, mithin auch die Linien FC und BC zusammen fallen. Eine Parallellinie durch E mit FC, wäre also in diesem Fall auch mit BC parallel, durchschnitte folglich BC auf beyden Seiten verlängert, nie, und es ist dann kein Durchschnittspunkt g möglich.

Wollte man sich indess vorstellen, dass zwey Parallellinien sich in einer unendlichen Entfernung (d. h. aber *gar nicht*) durchschneiden, so rückt in diesem Fall der Punkt g ins Unendliche fort. Ein Kreis mit einem Halbmesser Ag beschrieben, gienge dann in einen Kreis, mit einem unendlich grofsen Halbmesser beschrieben, d. h. in eine grade Linie über, und so würden durch diese blos eingebildete Idee in Lehrsatz 20 die Fälle, wo ein Ort, der, falls m und n ungleich sind ein Kreis ist, wenn m und n gleich sind, in eine grade Linie übergeht, auf jenen Hauptfall zurückgebracht; und dieses Verallgemeinern ist überhaupt eine der vorzüglichsten Anwendungen, die der Mathematiker von diesen blofs eingebildeten Ideen des Unendlichen macht. Doch gehört dieses mehr in die algebraische Analysis, als hierher.

Zusatz. Sind in einer graden Linie mehrere Punkte, z. B. B, D, C gegeben, und man sucht auf ihr oder ihrer Verlängerung einen Punkt G, der so liegt, dafs die Entfernung desselben von den gegebnen Punkten zu einander in gegebnem Verhältnifs stehn sollen, z. B. $Bg : Cg : Dg = m : n : p$; so ist dieses nicht für jedes Verhalten, sondern nur unter gewissen Bedingungen möglich. Denn es mufs dann z. B. sich verhalten $Bg - Cg : Cg - Dg$ d. h. $BC : CD = m - n : n - p$, welches eine besondre Bedingung für das gegebne Verhältnifs $m : n : p$ an die Hand giebt.

Anmerkung. Dieses ist die vollständige Auflösung einer Aufgabe, auf die wir uns in den Folgerungen und Zusätzen zu Lehrsatz 20 durchgehends berufen haben. Das dort Vorgetragene, beruht gröfstentheils auf ihr, und besonders wird hieraus die *Auslegung* S. 326. 2, ganz deutlich werden. *Apollonius* ebne Oerter II. Lemma 9.)

Die Aufgabe *von einer gegebnen Linie BC einen bestimmten Theil*, z. B den sechsten *abzuschneiden*, oder *sie um diesen Theil zu verlängern*, ist nur ein besondrer Fall, dieser Allgemeinern,

AUFGABE 6.

Wenn ein Winkel A, und ein Punkt B gegeben sind, durch diesen Punkt eine grade Linie so zu ziehn, dass durch die Schenkel des Winkels auf ihr zwey Stücke BC, BD abgeschnitten werden, die in einem gegebnen Verhältniss stehn, sich nemlich wie die gegebnen Linien P : Q verhalten. Fig. 80.

Liegt der gegebne Punkt B *zwischen den beyden Schenkeln des gegebnen Winkels*, so ziehe man durch ihn eine Parallellinie mit dem einen Schenkel AH, welche den andern im Punkte E durchschneide, nehme auf diesem ein Stück ED so, dass AE, ED, den gegebnen Linien P, Q proportional sind, und ziehe DB, so ist diess die verlangte Linie. *Afg. 2. Denn wegen des Parallelismus der Linie EB, AH, durchschneidet sie auch den zweyten Schenkel in irgend einem Punkte C *, und zwar so, dass sich verhält AE : ED = CB : BD = P : Q*. *I. 24 Z. 3. * 7.

Liegt der gegebne Punkt B *ausserhalb des Winkels*, so ziehe man durch ihn und einen beliebigen Punkt E des einen Schenkels eine grade Linie, nehme auf ihr ein Stück BF, so dass BE, BF den gegebnen Linien P, Q, proportional sind *, und ziehe durch F eine Parallellinie mit jenem Schenkel, welche den zweyten Schenkel in irgend einem Punkte D schneiden muss *; so ist DB die verlangte Linie. Denn wegen des Parallelismus der Linie FD, AE, durchschneidet sie den ersten Schenkel AE nothwendig in irgend einem Punkte C *, und zwar so, dass sich verhält BC : BD = BE : BF = P : Q.

*Afg. 2. *I. 24 Z. 3. *I. 24 Z. 3.

(*Gregorius a St. Vinc. I. 28. 29*). Man sieht leicht, daſs ſich dieſe Aufgaben noch auf mannigfaltige Art abändern laſſen, z. B. wenn eine Parallellinie mit dem einen Schenkel gegeben iſt, die Linie durch den Punkt B ſo zu ziehn, daſs die Abſchnitte derſelben zwiſchen den beyden parallelen Linien, und zwiſchen B und dem andern Schenkel, in dem Verhältniſſe von P zu Q ſtehn; eine Aufgabe, die grade ſo aufgelöſt wird (Greg. I. 25.)

Zuſatz. *Um durch den Punkt B eine grade Linie ſo zu ziehn, daſs ſie auf den Schenkeln des gegebnen Winkels zwey Stücke AC, AD abſchneide, die ſich wie P zu Q verhalten*, trage man auf den einen Schenkel AE = P, auf den andern AF = Q auf, ziehe EF, und damit parallel durch B, CD. Denn dann verhält ſich wegen des
* 7. Parallelismus dieſer Linien, AC : AD = AE : AF* = P : Q. (Greg. I. 30.)

AUFGABE 7.

Fig. 82. *Zu drey gegebnen Linien P, Q, R, die vierte Proportionallinie zu finden*

Man bilde einen willkührlichen Winkel K, und trage von der Spitze K aus, auf dem einen Schenkel deſſelben die erſte und zweyte der gegebnen Linien, P = KA, Q = KB, und auf dem andern Schenkel die dritte Linie R = KC auf, verbinde dann die Endpunkte A, C der erſten und dritten durch eine grade Linie, und ziehe mit dieſer durch den Endpunkt B der zweyten eine Parallellinie BX. Das Stück KX, welches dieſe Parallellinie auf dem zweyten Schenkel abſchneidet, iſt die geſuchte vierte Proportionallinie.

Denn da die Parallellinien die beyden Schenkel einander Proportional eintheilen, so verhält sich KA : KB = KC : KX *, mithin P : Q = R : KX. *7. Z. 1.

Bemerkung 1. So wie sich, unbeschadet des vierten Glieds, die mittlern Glieder jeder Proportion vertauschen lassen, so ist es auch für diese Construction ganz gleichgültig, ob man die zweyte oder die dritte der gegebnen Linien, mit der ersten auf demselben Schenkel legt. Nur dass man immer *durch den Endpunkt der erstern Linie*, und der, welche auf dem andern Schenkel liegt, *die grade Linie ziehn muss*, durch welche die Lage der Parallellinie bestimmt wird.

Zieht man *durch die Endpunkte der beyden Linien, welche in der Proportion die mittlern Glieder ausmachen*, eine grade Linie BC, und mit dieser durch den Endpunkt der ersten eine Parallellinie AY, so verhält sich KA : KB = KY : KC und *man erhält daher eine vierte Linie KY, welche mit den drey andern*, nicht, wie unsere Aufgabe verlangt, direkt, sondern *verkehrt proportional* ist: und eine solche Linie lässt sich daher auf diese Art immer ganz leicht finden. Eine andre Methode dazu haben wir in Aufgabe 3 kennen gelernt. * *Afg3f1

Bemerkung 2. Ferner ist es nicht nöthig, dass man die drey gegebnen Linien auf den Schenkeln zu einerley Seite des Punktes K, oder überhaupt von diesem Winkelpunkte an auftrage; vielmehr kann man sie ganz willkührlich legen, wenn nur die übereinstimmenden Endpunkte der Linien P, R in zwey Parallellinien fallen. Denn auch in diesem Fall schneiden zwey durch die Endpunkte der Linie Q mit jenen parallel gezogne Linien, vermöge Lehrsatz 7*, vom gegenüberstehenden Schenkel ein Stück ab, welches zu den drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie ist. Allein die oben angegebne Construction ist von allen die einfachste.

*7. Z. 2

Bemerkung 3. Auch Lehrsatz 13. Folgerung 2 führt auf ein ganz *bequemes Verfahren*, *zu drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie zu finden*, welches ich dem Leser selbst zu entwickeln überlasse. Eben so unsere Sätze über den Kreis, besonders Lehrsatz 24 und 25, aus denen leichte und artige Methoden folgen.

Bemerkung 4. Diese Construction ist übrigens für die geometrische Darstellung dasselbe, was die sogenannte *Regel de Tri* für die Arithmetik ist, und für sie nicht weniger wichtig. In so fern man einen jeden Ausdruck wie folgenden $\frac{AB \times AD}{DE}$ als vierte Proportionalgröße zu den Linien DE, AB, AD ansehn kann*, dient dieses Verfahren, ähnliche Ausdrücke noch auf eine andre Art in Lineargrößen anzugeben, d. i. *zu construiren*, und bey geometrischen Untersuchungen noch auf eine andre Art *zu übersetzen*, als wir dieses im Vorigen gethan haben *; nemlich durch *vierte Proportionallinie zu den drey Linien DE, AB, AD;* eine Auslegung, die indess vermöge Lehrsatz 4 Folgerung 1. in der That mit der erstern zusammen fällt.

* V. 3. α

* Afg. 3. a. 2.

AUFGABE 8.

Ein gegebnes Parallelogramm, oder ein gegebnes Dreyeck oder ein gegebnes Trapezoid, in eine Figur von einer dieſer drey Gattungen zu verwandeln, welche mit der gegebnen gleichen Inhalt hat, und entweder über einer gegebnen Grundlinie MN ſteht, oder eine gegebne Höhe hat.

Alle einzelnen Aufgaben, welche in dieſer allgemeinen enthalten ſind, laſſen ſich *durch Auffindung einer vierten Proportionallinie* auflöſen, und mithin auf die vorige Aufgabe zurückführen, ſind aber, wie ſie hier ausgedrückt werden, unbeſtimmt. Denn der Inhalt des Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe beſtimmt, der Inhalt des Dreyecks durch die Hälfte dieſes Produkts *, und der Inhalt des Trapezoids durch das Produkt aus der Höhe in die halbe Summe beyder Grundlinien *. Sollen folglich zwey Figuren dieſer Gattungen gleichen Inhalt haben, ſo müſſen zwey ſolche Produkte gleich ſeyn, wodurch eine Proportionalität zwiſchen den Grundlinien und Höhen beyder gegeben wird *. Nun aber ſind von der gegebnen Figur, die Grundlinie und die Höhe bekannt, und von der zweyten ſoll entweder die Grundlinie oder die Höhe gegeben ſeyn. Folglich kennt man in dieſer Proportion drey Glieder, und ſucht man aus ihnen, nach der vorigen Aufgabe, die vierte Proportionallinie, ſo findet man auch der geſuchten Figur Grundlinie oder Höhe, wodurch jedoch dieſe Figur nicht völlig beſtimmt wird.

* 5.
* 6.
* V. 3.

Nach diesem Fingerzeig entwickle und löse der Anfänger selbst die einzelnen Aufgaben auf, die in dieser allgemeinen enthalten sind. Hier, zum Beyspiel, nur ein Paar.

Fig. 75. *Das gegebne Parallelogramm ABCD in ein Parallelogramm über die gegebne Grundlinie CI zu verwandeln.* Man suche die Höhe DK des gegebnen Parallelo-
* E. 3. gramms *, und zu CI, CB, DK die vierte Proportionallinie, so ist diese die Höhe des gesuchten Parallelo-
*5. f. 2. gramms *, und errichtet man auf CI ein Perpendikel, trägt darauf IL, dieser Höhe gleich, und zieht durch L eine Parallellinie mit CI, so schneiden je zwey Parallellinien durch C und I ein Parallelogramm ab, welches der Aufgabe genüge thut. Diese Aufgabe ist also *unbestimmt*, weshalb unzählige Parallelogramme ihr genüge leisten. Bestimmt wird sie, so bald noch der Winkel gegeben ist, unter dem dieses Parallelogramm beschrieben werden soll, wie in Aufgabe 3., und dieses ist, wenn nach Rechtecken gefragt wird, immer der Fall.

Hätte *das Parallelogramm ABCD in ein Dreyeck über CI verwandelt werden sollen*, so sey die Höhe des gesuchten Dreyecks h. Dann wird der Inhalt des Parallelogramms ausgedrückt durch $BC \times DK$, des Dreyecks
* 5. durch $\frac{1}{2} CI \times h$ *, und da beyde gleich seyn sollen, muss $BC \times DK = \frac{1}{2} CI \times h$ seyn, folglich sich verhalten
*V. 3. 7 $\frac{1}{2} CI : BC = DK : h$ *. Man suche also die vierte Proportionallinie zu $\frac{1}{2}$ CI, BC, DK, schneide auf dem Perpendikel auf CI, dieser Linie gleich IM ab, und ziehe durch M mit CI eine Parallellinie; so ist die Pa-

rallellinie der Ort der Spitze des gesuchten Dreyecks*, *2. Z.
und die Aufgabe ebenfalls unbestimmt, etc.

AUFGABE 9.

Zu zwey gegebnen Linien P, Q, als äussere Glieder einer Proportion, zwey andre Linien Y, X, deren Unterschied oder deren Summe einer gegebnen Linie N gleich ist, als mittlere Glieder der Proportion zu finden.

Man ziehe willkührlich zwey Linien, welche sich Fig. 60.
im Punkte F rechtwinklig durchschneiden.

Im Fall des Unterschieds trage man zu entgegengesetzten Seiten des Punktes F auf die eine dieser Linien FA = P und FB = Q, und auf die zweyte Linie FH = N. Halbire AB und FH, und errichte auf beyden Linien in den halbirenden Punkten Perpendikel. Der Punkt C, wo diese Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt eines Kreises, der mit AC als Halbmesser beschrieben, auf der zweyten Linie die beyden gesuchten Linien FD, FE abschneidet.

Denn da dieser Kreis vermöge der Construction durch die Punkte A und B geht, so sind AB, DE Sehnen, die sich im Punkte F durchschneiden, folglich
FA : FE = FD : FB *: und da das Perpendikel aus dem *22.f.1α.
Mittelpunkte C die Sehne DE halbirt, auch EF = HD und mithin FD — FE = FH = N.

Im Fall der Summe trage man FA = P und FB = Q zu einerley Seite des Punktes F auf, und verfahre im

übrigen wie vorhin. Durchschneidet dann die Kreislinie, die durch A und B geht, die zweyte Linie in den Punkten D, E, so sind jetzt AB, DE Sehnen, die verlängert im Punkte F sich durchschneiden, folglich wie-
22.f.1γ derum FA : FE = FD : FB, jetzt aber FD + FE = FH = N.

In diesem Fall wird jedoch der Kreis die zweyte Linie nur dann durchschneiden, wenn die Summe der beyden Abschnitte FE + FD = N grösser ist, als das Zweyfache der Tangente, die aus F am Kreise gezo-
*22f.3.α gen wird *; oder, da das Quadrat dieser Tangente
* 22. 2. gleich ist dem Rechteck FA × FB *, nur dann, wenn $N^2 > 4 \cdot FA \times FB$ ist. Ist N kleiner, so wird die Aufgabe unmöglich.

Bemerkung 1. Da das Rechteck aus der mittlern von vier Proportionallinien, stets dem Rechteck aus den äussern gleich, mithin in diesem Fall $(N - FE) \times FE = P \times Q$ ist; so läuft diese Aufgabe auf eins mit folgender hinaus: „*Ein Rechteck von gegebnem Inhalt, zu beschreiben, wenn entweder der Unterschied, oder die Summe zweyer anliegenden Seiten desselben gegeben ist.* Noch eine andre Form und Auflösung derselben, findet sich in Aufgabe 18.

Bemerkung 2. Wo es überhaupt auf Gleichheit von Rechtecken ankömmt, wird diese Constructionsart vermittelst des Kreises, mehrentheils mit Vortheil gebraucht werden.

Zusatz. Sind die beyden gegebnen Linien P und Q gleich, so geht die gesuchte Proportion, in diese $P : X = Y : P$, und daher unsere Aufgabe (da es gleichgültig ist, ob die gesuchten Linien innere oder äussere Glieder in der Proportion ausmachen, in folgende über:

Wenn eine mittlere Proportionallinie P, und von den beyden andern proportionalen Linien, entweder die Summe, oder der Unterschied N gegeben sind, diese Linien selbst zu finden.

Oder: *Ein gegebnes Quadrat P^2 in ein Rechteck zu verwandeln, von dessen beyden anliegenden Seiten die Summe oder der Unterschied N gegeben ist.*

Oder endlich: *Auf einer gegebnen graden Linie N, oder auf deren Verlängerung einen Punkt, so zu bestimmen, dass das Rechteck aus den beyden Abschnitten, einem gegebnen Quadrate P^2 gleich sey.*

Diese drey Aufgaben fragen, nur unter verschiedner Gestalt, nach ein und dasselbe, und sind ein einzelner Fall unserer allgemeinern Aufgabe. Dadurch dass für sie die gegebnen Linien $P = FA$, und $Q = FB$ gleich sind, wird die Construction in beyden Fällen beträchtlich vereinfacht.

Im Fall des Unterschieds beschreibe über $FH = N$ Fig. 89. als Durchmesser einen Kreis, welchen $FA = P$ berührt, und ziehe von A durch den Mittelpunkt eine grade Linie, welche den Kreis in D und E durchschneide, so sind AD, AE die gesuchten Linien. Denn es ist $AD \times AE = AF^2 = P^2$ und $AD = AE + N$.

Im Fall der Summe beschreibe über $FH = N$ einen Halbkreis, ziehe mit FH in einer Entfernung gleich P, eine Parallellinie, und fälle vom Punkte, wo sie den Kreis durchschneidet, ein Perpendikel IK auf den Durchmesser, so schneidet dieses auf dem Durchmesser die beyden verlangten Abschnitte FK, KH ab. Denn es ist $FK \times KH = IK^2 = P^2$, und $FK + KH = EH = N$.

AUFGABE 10.

Wenn zwey Rechtecke, aus den Linien A, B und P, Q, gegeben sind, eine Linie zu finden, zu welcher sich eine Seite des einen Rechtecks, wie der Inhalt beyder Rechtecke zu einander verhält.

Gesetzt es sey X die Linie, zu welcher die Seite A in dem Verhältnisse des Inhalts beyder Rechtecke steht, $A \times B : P \times Q = A : X$; so ist das erste Verhält-
3. f. 2. nifs auch gleich dem Verhältnifs $A \times B : X \times B$; folglich, da die Vorderglieder gleich sind, müssen es auch
V. 3. ε die Hinterglieder seyn, $P \times Q = X \times B$, oder es muss
V. 3. γ sich verhalten $B : P = Q : X$.

Man suche also zu der einen Seite des einen, und zu den beyden Seiten des andern Rechtecks die vierte
Afg. 7. Proportionallinie, so verhält sich zu dieser die andre Seite des erstern, wie der Inhalt beyder Rechtecke, oder $A : X = A \times B : P \times Q$.

Bemerkung. Auf diese Art findet man *zwey Linien, die im zusammengesetzten Verhältniss zweyer Paar*
* V. 6. *gegebner Linien stehn*, $A : X = (A : P) + (B : Q)$*. Sind die gegebnen Verhältnisse gleich, so ist $A : X = 2 (A : P) = A^2 : P^2$ und $A : P = P : X$, da denn diese Auflösung in

in die übergeht, welche wir in Aufgabe 12 für diesen Fall haben werden. *. *12. f. 2.

AUFGABE II.

*Zwey Linien darzustellen, deren Verhältniss aus den gegebnen Verhältnissen dreyer Paar Linien A, B, C und P, Q, R zusammengesetzt ist, oder die sich wie die Produkte dreyer Linien, zu den Produkten dreyer andrer Linien * verhalten.* * E. 6.

Gesetzt Y und X sind die beyden gesuchten Linien, so soll sich verhalten $Y:X = A \times B \times C : P \times Q \times R$ oder $= \frac{B \times C}{P} : \frac{Q \times R}{A}$*. Setzt man folglich $Y = \frac{B \times C}{P}$ *V. 1. β. und $X = \frac{Q \times R}{A}$, so erhält man gewiss zwey Linien in dem gesuchten Verhältniss, und von diesen Linien ist dann die *Eine* die vierte Proportionallinie zu P, B, C, und die *Andre* die vierte Proportionallinie zu A, Q, R *. *Afg. 7. B. 3.

Zusatz I. Soll, wie in der vorigen Aufgabe, eine der gegebnen Linien, z. B. A, das Vorderglied des gesuchten Verhältnisses seyn, . sich folglich verhalten $A \times B \times C : P \times Q \times R = A : X = A \times B \times C : X \times B \times C$*; *V. 1. β. so muss, wegen Gleichheit der Vorderglieder, $P \times Q \times R = X \times B \times C$, mithin $B \times C : Q \times R = P : X$ seyn. Denkt man sich daher eine Linie Z so, dass sich verhalte $B : Z = P : X$ mithin auch $B \times C : Z \times C = P : X$, so muss diese Linie so beschaffen seyn, dass $Q \times R = Z \times C$ *, * V. 3. α. folglich $C : Q = R : Z$ ist. — Sucht man daher zu C, Q, R die vierte Proportionallinie Z, und dann zu B, Z, P abermals die vierte Proportionallinie, so erhält man die gesuchte Linie X, zu welcher A in dem verlangten Verhältnisse steht.

Zusatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel Verhältnisse gegeben seyn, und *man sucht ein Verhältniss G : X, welches aus allen diesen gegebnen Verhältnissen zusammengesetzt ist*, so findet man dieses durch fortgesetzte Auffindung vierter Proportionallinien a, b, c etc., z. B.

$$A : P = G : a$$
$$B : Q = a : b$$
$$C : R = a : X$$

so ist, wenn man zusammensetzt $G : X = (A : P) \dotplus$
* V. 4. δ. $(B : Q) \dotplus (C : R) = A \times B \times C : P \times Q \times R$*.

AUFGABE 12.

Fig. 82. *Zu zwey gegebnen Linien P, Q die dritte Proportionallinie zu finden.*

Diese Aufgabe fordert eine stetige Proportion zu denken, worin die mittlern Glieder beyde der zwey-
* V. 5. ten gegebnen Linie gleich sind *, und zu dieser die vierte Proportionallinie zu finden. Man wiederhole daher die Construction der siebenten Aufgabe, nur dass man jetzt Q = KB auf beyde Schenkel des Winkels K auftrage, und man ziehe AB′ und damit parallel BC, so ist KC die gesuchte dritte Proportionallinie. Denn es verhält sich KA : KB = KB : KC.

Fig. 88. *Oder* setze auf dem Endpunkte von P = AD die zweyte Linie Q = DF senkrecht, ziehe AF, und errichte

darauf im Punkte F ein Perpendikel. Wenn dieſes die verlängerte AD im Punkte B durchſchneidet, ſo iſt BD die dritte geſuchte Proportionallinie. Denn es iſt dann $AD : DF = DF : DB$ *. *12 f. 2. δ

Oder beſchreibe einen Kreis, trage P und Q von demſelben Punkte A aus als Sehnen hinein, und ziehe vom Endpunkt der einen eine Parallellinie mit der Tangente durch A, ſo iſt das Stück AM oder $A\gamma$, welches dieſe Parallellinie auf der andern, oder auf deren Verlängerung abſchneidet, die dritte Proportionallinie zu den beyden Sehnen *. Fig. 62, *24. f. 1

Und ſolcher Auflöſungen mehrere; die ſich ohne Schwierigkeit aus unſern Sätzen über den Kreis ausheben laſſen.

Folgerung 1. Da zu den Zahlausdrücken der beyden Linien KA, KB die dritte Proportionalzahl $\frac{KB^2}{KA}$ iſt *, ſo muſs dieſes auch der Zahlausdruck für die dritte Proportionallinie KC ſeyn. Folglich dient dieſe Conſtruction *einen ſolchen Ausdruck* in Lineargröſsen anzugeben, d. i. *zu conſtruiren*: und man iſt umgekehrt berechtigt bey geometriſchen Unterſuchungen einen ſolchen Ausdruck *durch dritte Proportionallinie zu den Linien KA und KB* zu überſetzen. Fig. 83. *V. 3. α.

Folgerung 2. Setzt man die gleichen Verhältniſſe in dieſer ſtetigen Proportion zuſammen *, ſo ſieht man, daſs ſich verhalte $KA : KC = 2 (KA : KB) = KA^2 : KB^2$, d. h. *daſs das Verhältniſs der erſten zur dritten Pro-* * V. 9.

portionallinie noch einmal so hoch, als das Verhältniss der ersten zur zweyten, oder dem Verhältnisse der zweyten Potenzen aus den Zahlausdrücken dieser Linien, mithin *dem Verhältnisse der Quadrate über diese Linien, gleich*
*4.Z.2. *ist* *.

α) *Um folglich zwey Linien zu bilden, die sich wie zwey gegebne Quadrate verhalten*, braucht man nur zu den Seiten dieser Quadrate die *dritte Proportionallinie* zu finden;

β) und umgekehrt *findet man die Seiten zweyer Quadrate, die sich wie zwey gegebne Linien verhalten*, wenn man zwischen diesen beyden Linien die mittlere Pro-
*Afg. 13 portionallinie bildet *; wichtige Bemerkungen, von denen wir im folgenden Buche häufig Gebrauch machen werden.

Folgerung 3. Fährt man in der angegebnen Construction fort, trägt ferner KC' auf den zweyten Schenkel auf, und zieht C'D parallel mir B'C, so ist wiederum KD die dritte Proportionallinie zu KB und KC; trägt man weiter KD' auf den andern Schenkel und zieht D'E parallel mit C'D, eben so KE die dritte Proportionallinie zu KC und KD u. s. f.

Auf diese Art läſst sich folglich *eine ganze Reihe stetig proportionaler Linien KA, KB, KC, KD etc. bilden*, wo jede die dritte Proportionallinie zu den beyden vorhergehenden, und die mittlere Proportionallinie zwischen der nächst vorhergehenden und folgenden ist, so daſs sich verhält KA : KB = KB : KC = KC : KD = KD : KE etc.

Setzt man diese stetigen Verhältnisse Schrittweise zusammen *, so erhält man * V. 6.

$$KA : KC = 2\,(KA : KB) = KA^2 : KB^2$$

$$KA : KD = 3\,(KA : KB) = KA^3 : KB^3$$

$$KA : KE = 4\,(KA : KB) = KA^4 : KB^4 \text{ etc.}$$

Man wird daher durch diese Construction im Stande gesetzt *Linien zu bilden, welche sie wie irgend zwey Potenzen von gleichem Grade aus den Zahlausdrücken zweyer gegebner Linien KA, KB verhalten.*

Allein wenn zwey Linien, wie KA, KE gegeben sind, die Linie KB zu finden, so dass KA : KE sich z. B. wie $KA^4 : KB^4$ verhielte, dazu erhalten wir durch diese Construction kein Mittel.

Anmerkung 1. Andere Mittel eine ganze Reihe solcher stetig proportionaler Linien zu bilden, giebt Lehrsatz 24. Folgerung 1, und Lehrsatz 25. Folgerung 3 an die Hand, und wer diese Construction interessant findet, wird sie ohne Schwierigkeit daraus entwickeln können. Die leichteste Methode verspare ich für das folgende Buch.

Anmerkung 2. *Um ein gegebnes Quadrat in ein Rechteck, oder in ein Dreyeck etc. über gegebner Grundlinie zu verwandeln*, muss man auf eine ähnliche Art, wie in Aufgabe 8, zur gegebnen Grundlinie und zur Seite des gegebnen Quadrats eine dritte Proportionallinie suchen. Dieses drückt z. B. *Tacquet* folgendermassen aus: *ad datam rectam AB, datae rectae M quadratum facile est applicare, inveniendo rectis AB, M tertiam proportionalem CD et rectangulum ABCD construendo. Est enim dato quadrato M2 aequale rectangulum, ad rectam AB applicatum**. Fig. 83. *Afg. 3. a. 1.

AUFGABE 13.

1) *Zwischen zwey gegebnen graden Linien P und Q eine mittlere Proportionallinie zu finden, und* Fig.

2) *zwischen einer graden Linie AB und einem gegebnen Abschnitt derselben AD, eine mittlere Proportionallinie darzustellen.*

1) Man trage die beyden gegebnen Linien auf eine willkührlich gezogne grade Linie nebeneinander, AD = P und DB = Q, beschreibe um die Summe beyder AB als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte auf AB im Punkte D ein Perpendikel. Durchschneidet dieses den Kreisbogen im Punkte E, *so ist DE die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn es verhält sich dann vermöge der Natur des Kreises AD : DE = DE :
*22. f. 1 α DB *.

2) Soll zu AB und dem Abschnitt AD dieser Linie, die mittlere Proportionallinie gefunden werden, so beschreibe man wiederum um die ganze Linie AB als Durchmesser einen Kreis, errichte in D das Perpendikel DE, und ziehe von Punkte E, wo dieses die Kreislinie durchschneidet, nach A eine Sehne AE, *so ist diese Sehne die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn vermöge der Natur des Kreises verhält sich dann AD : AE
*22. Z. 1 = AE : AB *.

Oder man beschreibe um AB irgend einen beliebigen Kreisabschnitt, ziehe durch A *eine Tangente* an demselben, da mit durch D eine Parallellinie, und nach dem Punkte F, wo diese den Kreisbogen durchschneidet AF, so ist AF, die gesuchte mittlere Proportio-
*25. f. 3. nallinie *.

Oder man beschreibe um den übrigen Theil DB der gegebnen Linie, als Sehne, oder Durchmesser, einen Kreis, und ziehe an diesen vom Punkte A aus *eine Tangente AG*, so ist AG die gesuchte mittlere Proportionallinie *. *22f.1 δ

Folgerung. Die mittlere Proportionallinie zwischen zwey Linien, kann nie grösser seyn, als die Hälfte der Summe beyder Linien. Denn kein Perpendikel auf dem Durchmesser, das bis an die Kreislinie reicht, kann grösser seyn als der Halbmesser. Und so folgt auch aus der Construction, dieser aus der Arithmetik bekannte Satz.

Bemerkung 1. Da zu den Zahlausdrücken zweyer Linien P, Q die mittlere Proportionalzahl $\sqrt{(P \times Q)}$ ist *, so muss diese auch der Zahlausdruck * V, 5. für die mittlere Proportionallinie M seyn. *Ein Ausdruck, wie $\sqrt{(P \times Q)}$, d. i. eine Quadratwurzel, läßt sich* daher mittelst des Verfahrens in dieser Aufgabe in Lineargrösen darstellen, und folglich durch Verbindung derselben mit den Verfahren der vorigen Aufgaben, jede *reine Quadratische Gleichung construiren.* Was die *Construction einer unreinen quadratischen Gleichung* betrifft, so verspare ich sie für die Bemerkungen am Ende der Planimetrie.

Bemerkung 2. Ist M die mittlere Proportionallinie zwischen P und Q, so verhält sich $P : M = M : Q$, und $P : Q = P^2 : M^2 = M^2 : Q^2$, wie wir schon in der vorigen Aufgabe bemerkt haben *. *Afg. 12 f. 2.

α) *Sind vier Linien proportional, $A : B = C : D$, und man nimmt zwischen den ersten A, B und zwischen den letzten C, D mittlere Proportionallinien M, N, so sind auch*

diese mit den Vordergliedern, und eben so mit den Hintergliedern der gegebnen Proportion, proportional. Denn es verhält sich $A:B = A^2:M^2 = M^2:B^2$ und $C:D = C^2:N^2 = N^2:D^2$. Wenn also die vordern Verhältnisse gleich sind, so sind es auch die hintern, $A^2:M^2 =$
*4. f. 2. $C^2:N^2$, also auch $A:M = C:N$ *: oder $M:B = N:D$, oder $A:M = N:D$.

β) *Grade so sind in gleichen Verhältnissen $A:B = C:D$ die dritten Proportionallinien P, Q mit den Vordergliedern, und folglich auch mit den Hintergliedern proportional.* Denn es verhält sich $A^2:B^2 = A:P$ und
*Afg. 12 f. 2. $C^2:D^2 = C:Q$ *, mithin $A:P = C:Q$ und $A:C = B:D = P:Q$.

γ) Da *im Kreise* die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen einer verlängerten Sehne und der
*22. f. 1 δ Verlängerung ist, $AE:AG = AG:AF$ *, so *verhält sich immer $AE:AF = AE^2:AG^2$*: und auf diese Art lassen sich andere brauchbare Sätze mittelst dieser Bemerkung aus unsern Lehrsätzen ableiten.

Bemerkung 3. Sucht man erst zwischen zwey gegebnen Linien P, Q, die mittlere Proportionallinie M, und fährt dann fort zwischen P, M und zwischen M, Q mittlere Proportionallinien zu suchen, so erhält man zwischen P, Q, 2 + 1, d. i. *drey*, und fährt man mit diesen wieder eben so fort, 4 + 3, d. i. *sieben mittlere Proportionallinien* u. s. f. Aber *auf zwey, vier oder fünf mittlere Proportionallinien kömmt man durch diese Construction nicht.* Jene geben *Constructionen von Wurzeln des vierten, achten, sechzehnten Grades* u. s. f.

Diese würden Constructionen von Wurzeln des dritten, fünften Grads, u. s. f. an die Hand geben; allein zu solchen Constructionen reicht die Elementargeometrie nicht hin. Man lese deshalb Lehrsatz 22 Zusatz 4, Lehrsatz 24. Folgerung 2, und die Bemerkungen am Ende dieses Werkes nach.

AUFGABE 14.

Eine gegebne gradelinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Dieses geschieht durch Auffindung *mittlerer Proportionallinien*, und also durch die Verfahren der vorigen Aufgabe, durch welche man jedesmal die Seite des gesuchten Quadrats, und zwar auf verschiednen Wegen, finden kann.

α) Bey einem gegebnen *Rechteck* ABCD, suche zwischen den beyden anliegenden Seiten AB, BC die mittlere Proportionallinie M, so ist $M^2 = AB \times BC$ *, folglich das gesuchte Quadrat. Fig. 84.

*14. f. 3.

β) Bey einem gegebnen *Parallelogramm*, suche eben so zwischen der Grundlinie, g, und Höhe, h; — bey einem gegebnen *Dreyeck* zwischen der Grundlinie, g, und halben Höhe, $\frac{1}{2}$ h; — und bey eine gegebnen *Trapezoid* zwischen der halben Summe beyder Grundlinien, $\frac{1}{2}(G + g)$, und der Höhe, h, die mittlere Proportionallinie M, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats. Denn es ist dann M^2 im ersten Fall gleich gh, im zweyten $\frac{1}{2}$ gh, im dritten $\frac{1}{2}(G + g)$ h,

und dieſes ſind die Zahlausdrücke für den Inhalt der
*5. u. 6. drey gegebnen Figuren *.

γ) *Andere unregelmäſsige Vielecke* verwandle man
*Afg. 1. erſt in ein groſses Dreyeck *, ſo laſſen auch ſie ſich nach β in ein Quadrat von gleichem Inhalt umbilden. Und dieſes iſt eine von den Conſtructionen, auf die wir uns in den Folgerungen zu Lehrſatz 20, und bey den fernern geometriſchen Oertern, oft bezogen haben.

Folgerung. Iedes gradelinige Vieleck läſst ſich alſo im eigentlichen geometriſchen Sinn quadriren.

Anmerkung. Der Ausdruck *eine Figur quadriren* oder *die Quadratur einer Figur* finden, läſst ſich im *geometriſchen* oder im *arithmetiſchen* Sinn nehmen. In *jenem*, welcher der eigentliche und urſprüngliche iſt, bedeutet er: ein *Quadrat geometriſch darſtellen, welches mit der Figur gleichen Inhalt hat*, und das können wir bey jedem gradelinigen Vieleck vermittelſt dieſer Conſtruction bewerkſtelligen. In *dieſem, dem arithmetiſchen Sinn*, bedeutet er: „*einen Zahlausdruck für den Inhalt der Figur*
* 4. Z. *in Flächeneinheiten (Quadraten*) finden, wenn man den Zahlausdruck gewiſſer Linien, in ihr in Lineareinheiten kennt.*" Aus der geometriſchen Quadratur folgt daher leicht die arithmetiſche, nicht aber umgekehrt; denn das bilden eines Quadrats dem gefundnen Zahlausdruck gemäſs, darf man wohl kaum eine geometriſche Conſtruction nennen. — Man ſieht hieraus, was *die Quadratur des Kreiſes*, und *die Quadratur der Curven* ſagen will. — Die arithmetiſche Quadratur iſt im Grunde nichts anders als die *Berechnung der Figur*, d. h. die Beſtimmung des Zahlausdrucks für ihren Inhalt, aus dem Zahlausdruck der Seiten, und da dieſes für die Anwendung das eigentlich brauchbare und wichtige iſt, ſo pflegt man, mit ſeltnen Ausnahmen, dieſe Beſtimmung des Inhalts, oder die arithmetiſche Quadratur zu verſtehn, wenn man von Quadratur des Kreiſes oder der Curven ſpricht.

AUFGABE 15.

Ein Quadrat zu bilden, welches der Summe *zweyer oder mehrerer gegebner Quadrate gleich ist.* Fig. 85.

α) Man beschreibe einen rechten Winkel A, trage auf seine Schenkel die Seiten der beyden gegebnen Quadrate $AB = M$ und $AC = N$ auf, und ziehe BC, so ist diese Linie die Seite des Quadrats, welches den beyden Quadraten über M und über N zusammengenommen gleich ist. Denn BAC ist vermöge der Construction ein rechtwinkliges Dreyeck, folglich dem Pythagoreischen Lehrsatz zu folge $BC^2 = AB^2 + AC^2 = M^2 + N^2$ *. * 12.

β) Soll das gesuchte Quadrat *den drey Quadraten* über M, N, P gleich seyn, so errichte man aufs neue im Punkte C auf AC ein Perpendikel, trage auf dieses $CD = P$ auf, und ziehe BD, so ist $BD^2 = BC^2 + CD^2 = M^2 + N^2 + P^2$, also BD die Seite des gesuchten Quadrats.

γ) Grade so fährt man fort, wenn man ein Quadrat sucht, welches vier, oder fünf oder mehreren gegebenen Quadraten zusammengenommen gleich ist, indem man Schrittweise die Seiten der Quadrate sucht, welchem vier, fünf, sechs u. s. f. der gegebnen Quadrate zusammengenommen gleich sind.

Zusatz I. Auf diese Art lassen sich also auch Schrittweise *Seiten von Quadraten finden, welche den doppelten, dreyfachen, vierfachen Inhalt u. s. f. eines gegebnen Quadrats M^2 haben*, dergleichen die sogenannte *Flächenseite des Visirstaabs zum Messen cylindrischer Gefäße*, oder Fig. 86.

von Tonnen angiebt. Zu dem Ende trage man auf beyde Schenkel des rechten Winkels, AB und AB' gleich M, d. i. gleich der Seite des gegebnen Quadrats auf; so wird BB' die Seite des doppelten Quadrats, $2\,M^2$. Mit dieser schneide man von A aus, A2 = BB' ab, so ist B2 die Seite des dreyfachen Quadratr $3\,M^2$. Schneidet man mit dieser wieder A3 = B2 ab, und zieht B3, so erhält man die Seite des vierfachen Quadrats $4\,M^2$, mit der man wieder A4 abschneide, u. s. f. Und so erhält man einen Maasstab AE, vermöge dessen man den Inhalt jedes gegebnen Quadrats sogleich, aus dessen Seite, mit dem Inhalt des bekannten Quadrats M^2, vergleichen kann. Man fasse die Seite mit dem Zirkel, und trage sie auf AE von A aus auf. Schneidet sie da z. B. die Länge A5 ab, so ist der Inhalt jenes Quadrats das Fünffache vom Inhalt des Bekannten. Kleinere Abtheilungen in Hälften, Viertel etc., lassen sich mittelst der folgenden Aufgabe finden.

Zusatz II. Wollte man ein Quadrat haben, welches das Zwanzigfache eines gegebnen ist, so suche man erst das doppelte Quadrat, aus diesem das Vierfache, und aus diesem sammt dem Gegebnen, das Fünffache. Aus den Fünffachen findet man das Zehnfache, und aus diesem das Zwanzigfache.

AUFGABE 16.

Fig. 87. *Ein Quadrat zu bilden, welches dem Unterschiede zweyer oder mehrerer gegebnen Quadrate gleich ist.*

α) Man beſchreibe wiederum einen rechten Winkel A, trage auf den einen Schenkel deſſelben die Seite des kleinern Quadrats N = AC auf, und beſchreibe mit der Seite des gröſsern M, als Halbmeſſer, um D als Mittelpunkt, einen Kreisbogen. Schneidet dieſer den andern Schenkel in B, ſo iſt AB die Seite des geſuchten Quadrats. Denn das ſo beſchriebne Dreyeck iſt rechtwinklig, und deshalb $AB^2 = BC^2 - AC^2 =$ * $M^2 - N^2$. *12. f. 1.

β) Soll das geſuchte Quadrat dem Unterſchiede zweyer Quadrate N^2 und P^2 von M^2 gleich ſeyn, ſo ſuche man wieder auf dieſelbe Art den Unterſchied von AB^2 und P^2 u. ſ. f., ſo daſs man alſo auf dieſe Art *beliebig viel Quadrate, von einem Gegebnen, welches gröſser iſt als alle zuſammmengenommen, abziehn kann.*

Zuſatz. Auf dieſelbe Art bildet *man ein rechtwinkliges Dreyeck, wenn die Hypotenuſe M und eine der Katheten N gegeben ſind*; welches ſich auch folgendermaaſsen bewerkſtelligen läſst: beſchreibe über die Hypotenuſe M einen Halbkreis, und um ihren Endpunkt, mit der gegebnen Kathete N einen Kreisbogen. Wo dieſer den Halbkreis durchſchneidet, da iſt die Spitze des geſuchten rechtwinkligen Dreyecks. Denn der Halbkreis iſt der Ort der Spitze *, und der angegebne Punkt der, welcher durch die gegebne Gröſse der Kathete beſtimmt wird. *II. 26. f. 2.

So kann man folglich *rechtwinklige Dreyecke beſchreiben, wovon die eine Kathete die Hälfte, oder das Drittel, oder das Viertel der Hypotenuſe iſt* etc.

Anmerkung. Da sich jedes Vieleck in ein Quadrat ver-
*Afg.14. wandeln läſst *, so findet man mittelst des Verfahrens in dieser und der vorigen Aufgabe ohne Schwierigkeit *ein Quadrat, welches die Summe oder dem Unterschiede gegebner gradeliniger Figuren gleich ist;* Constructionen, auf die wir uns im letzten Theil des dritten Buchs mehreremal bezogen haben.

AUFGABE 17.

Fig. 88. *Ein Quadrat zu beschreiben, zu welchem ein gegebnes Quadrat M^2, in dem Verhältnisse zweyer gegebnen Linien P, Q steht.*

Nimmt zwischen den gegebnen Linien P, Q die mittlere Proportionallinie V, so verhält sich $P : Q =$
*13.B.2. $P^2 : V^2$ *. Folglich stehn die Quadrate über P und V in demselben Verhältniſs als das gegebne und das gesuchte Quadrat, weshalb auch ihre Seiten proportional
*4. f.3. sind *. Mithin ist die Seite des gesuchten Quadrats die vierte Proportionallinie zu P, V und AB.

Diese beyden Operationen lassen sich indeſs ineinander ziehn, und auf solche geschickte Zusammenziehungen beruht die Eleganz geometrischer Auflösungen, wozu häufig, wie auch hier, geometrische Theoreme den Weg zeigen.

Trage z. B. auf eine beliebige Linie AD = P und AB = Q auf, beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in D ein Perpendickel, welches den Kreisbogen in F durchschneide, und ziehe AF, so verhält sich
*12.f.28 $AF^2 : AB^2 = AD : AB$ *. Trägt man daher auf AF von A aus, die Seite M des gegebnen Quadrats auf, AG = M, zieht FB, und damit parallel GH; so ist GH die Seite des gesuchten Quadrats. Denn wegen des

Parallelismus dieser Linien verhält sich AF : AB = AG : AH, d. h. = M : AH, mithin auch $M^2 : AH^2 = AF^2 : AB^2 =$ * P : Q. *4. f. 3.

Noch andre Constructionen lassen sich aus Lehrs 12. Folg. 2. δ, ε; und Lehrsatz 22, Zusatz 1. β, γ; und nicht minder elegante von ganz andrer Art, aus Lehrsatz 25. Folg. 3, Lehrsatz 20. Zusatz 5, und aus dem schönen Ort am Kreise in Lehrsatz 20. Zusatz 7 herleiten, welches ich dem Leser, dem dieses Vergnügen machen wird, selbst überlasse.

AUFGABE 18.

Eine gegebne grade Linie AB so zu verlängern, dass das Rechteck aus der verlängerten Linie AF, und der Verlängerung BF, dem Rechteck aus zwey gegebnen Linien P und Q gleich, oder $AF \times BF = P \times Q$ *sey.* Fig. 90.

Nimm zwischen P und Q die mittlere Proportionallinie M, so soll $AF \times BF = M^2$ seyn. Beschreibt man folglich über AB einen Halbkreis, so kömmt es darauf an, eine berührende Linie so zu ziehn, dass die verlängerte AB ein Stück von ihr, gleich M, abschneidet. Zu dem Ende ziehe durch B eine Tangente, mache BD = M, und schneide vom Mittelpunkte C aus, auf der verlängerten AB, CF = CD ab, so ist BF die gesuchte Verlängerung.

Denn zieht man CD, welche Linien den Kreis in E durchschneide, und EF, so decken sich die beyden Dreyecke CBD, CEF, daher EF auf dem Halbmesser CE in seinem Endpunkte senkrecht steht, also den Kreis berührt *, und überdem gleich BD, d. i. gleich M, folglich $M^2 = AF \times BF$* ist. * II. 12. * 22. 2.

Fig. 83. Zusatz. *Soll die gegebne grade Linie AB selbst so eingetheilt werden, dass das Rechteck aus ihren beyden Stücken $AD \times BD$ dem gegebnen Rechteck $P \times Q$ gleich sey,* so beschreibe man wiederum über AB einen Halbkreis, ziehe mit AB eine Paralellinie, in einer Entfernung, gleich der mittlern Proportionallinie M, und fälle vom Durchschnittspunkt derselben mit der Kreislinie, ein Perpendikel auf dem Durchmesser, so theilt dieser die
* 22. 1. Linie AB* auf die verlangte Art ein; wobey aber erfordert wird, dass M nicht grösser als $\frac{1}{2}$ AB sey.

Anmerkung. Beyde Aufgaben werden auf diese Art durch eine leichtere Construction als in Aufg. 9, wo wir sie schon einmal, nur unter einer andern Form gehabt haben, aufgelöst.

AUFGABE 19.

Eine gegebne grade Linie BH, so in zwey Theile BF, FH einzutheilen, dass das Quadrat des einen Theils, gleich sey dem Rechteck aus dem andern Theile und einer gegeben Linie P, oder $BF^2 = P \times FH$.

Nimm auf die Verlängerung von HB, BA gleich P, so soll $BF^2 = AB \times FH$, und folglich, wenn man beyderseits $AB \times BF$ hinzufügt, $AF \times FB = AB \times BH$ seyn. Nun aber sind AB, BH gegeben; folglich tritt hier der Fall der vorigen Aufgabe ein.

Beschreibe also über AH einen Halbkreis, so ist das Perpendikel BD die mittlere Proportionallinie zwi-
Afg. 13. schen AB, BH, und beschreibt man um AB einen Halbkreis, welcher CD in E durchschneidet, und errichtet

richtet in E das Perpendikel EF auf diese Linie, so wird $EF^2 = AF \times FB$, und mithin ist F der gesuchte Punkt, der BH auf die verlangte Art eintheilt.

Anmerkung. Im Fall die gegebne Linie P, gleich der einzutheilenden BH ist, wird $BF^2 = BH \times FH$, oder das Quadrat des einen Theils ist dann gleich dem Rechteck aus dem andern Theil und der ganzen Linie; oder die beyden Theile und die ganze Linie bilden eine stetige Proportion. Von dieser *Eintheilung einer Linie nach stetigem Verhältniss*, werden wir im folgenden Buche einige interessante Eigenschaften und Anwendungen kennen lernen.

AUFGABE 20.

Eine grade Linie AB, in welcher ein Punkt E gegeben ist, aufs neue so in einem Punkte D einzutheilen, dass $AD^2 = ED \times DB$ sey. Fig. 91.

Vermöge dieser Fordrung muss der Punkt D so liegen, dass, wenn durch B und F ein Kreis beschrieben wird, die Tangente aus D nach der Kreislinie gezogen, gleich AD ist *. * 12. 2.

Man halbire daher EB im Punkte G, errichte in G ein Perpendikel, nehme GK gleich GA, und beschreibe um CKB einen Kreis *. Vom Punkte H, wo AK diese Kreislinie durchschneidet, fälle man auf AB ein Perpendikel HD, so theilt dieses die Linie AB auf die verlangte Art ein. * II. Afg. 12

Denn weil AEK vermöge der Construction ein rechtwinkliges, gleichschenkliches Dreyeck ist, sind die Winkel A, K der Hälfte eines rechten Winkels gleich *. Eben so gross sind mithin in den rechtwink- * I. 31. f. 2.

ligen Dreyecken ADH, KIH die Winkel bey H, folglich diese Dreyecke beyde gleichschenklig, AD = DH, und HI = IG, weshalb das Perpendikel HI im Mittelpunkte auf FG aufstehn, und ein Halbmesser
* II. 12. seyn muss. Daher ist HD eine Tangente *; folglich $DH^2 = AD^2 = DC \times DB$, folglich AB auf die verlangte Art eingetheilt. (Greg. I. 73.)

Diese und die beyden vorigen, so wie alle ähnlichen Aufgaben, lassen sich nach Anleitung des Zusatzes zu Aufgabe 9 noch auf ganz verschiedene Art ausdrücken, welche ich dem Leser überlasse.

AUFGABE 21.

Fig. 92. *Von einem gegebnen Punkte A ausserhalb eines Kreises eine grade Linie so zu ziehn, dass sie von der Kreislinie, zweyen gegebnen Linien P, Q proportional eingetheilt werde.*

Gesetzt es sey AEF die gesuchte Linie, so soll sich verhalten P : Q = AE : EF, folglich auch P : P + Q = AE : AF. Zieht man nun von A die Tangente
*II Afg 14. AG *, so ist AS die mittlere Proportionallinie zwischen
*22.f.16 AE und AE *. Man suche daher zwischen P und P + Q
*Afg. 12. die mittlere Proportionallinie M *, so muss sich verhalten P : M = AE : AG. Nun sind P, M und AG gegeben. Man suche daher zu M, P und AG die vierte Proportionallinie, und beschreibe mit ihr um A einen Kreisbogen. Wo dieser den gegebnen Kreis durchschneidet, da ist der Punkt E, durch den AE gezogen, die verlangte Linie giebt.

Denn verhält ſich $AG : AE = M : P$, ſo iſt auch $AG^2 : AE^2 = M^2 : P^2$. Und da AG und M mittlere Proportionallinien, erſtere zwiſchen AF, AE, letztere zwiſchen $P + Q$ und P ſind; ſich mithin verhält $AF : AE = AG^2 : AE^2$, und $P + Q : P = M^2 : P^2$; ſo verhält ſich auch $AF : AE = P + Q : P$ und $FE : AE = Q : P$.

Beſtimmung. Geht ABD durch den Mittelpunkt des Kreiſes, ſo iſt AB die kleinſte, AD die gröſste von allen Linien, die von A aus nach dem Kreiſe gezogen werden können *, und daher hat von allen ähnlichen Verhältniſſen, das der Abſchnitte $AB : BD$ den gröſsten Exponenten *. Folglich darf $\frac{Q}{P}$ nicht gröſser als $\frac{BD}{AB}$ ſeyn, ſonſt iſt die Aufgabe unmöglich. (Greg. III. 46.) * II. 15. * V. 1. 2.

AUFGABE 22.

Das Verhältniſs zwiſchen der Seite AB und der Diagonale AC eines Quadrats zu finden. Fig. 93.

Beſchreibe um C mit der Seite BC als Halbmeſſer einen Kreis, ſo berührt die Seite AB dieſe Kreislinie, denn ſie ſteht auf dem Endpunkte des Halbmeſſers CB ſenkrecht *. Daher verhält ſich $AD : AB = AB : AE$, und AD iſt derſelbe Theil von AB, als AB von AE oder $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$*. Nun aber iſt AE gleich $2\,CD + AD$, folglich auch $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{2\,AB + AD} = \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}$*. In dem * II. 12. * V. 1. 2. * Afg 19. Z. 2.

letzten Ausdruck läſst ſich für $\frac{AD}{AB}$ dieſer Ausdruck ſelbſt wieder ſetzen, da denn $\frac{AD}{AB} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AD}{AB}}}$ wird, und da ſich der Stuffenbruch, der ſo entſteht, immer wieder mit dem Bruch $\frac{AD}{AB}$ endigt, ſo kann man mit dieſer Subſtitution ohne Ende fortfahren, daher der Exponent $\frac{AD}{AB}$ durch einen Stufenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}},$$

der ohne Ende fortläuft, gegeben wird. Es läſst ſich alſo AD nicht in Theilen von AB ausdrücken, und beyde Linien ſind incommenſurabel *. Mithin auch die Diagonale und die Seite des Quadrats, da die Diagonale AC gleich AB + AD iſt, und alſo, wenn man die Seite AB als Einheit annimmt, der Zahlausdruck der Diagonale AC, $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$ wird; ein Ausdruck, deſſen Werth ſich nie genau in Zahlen darſtellen läſst, weil er ohne Ende fortgeht, und dem man ſich nur nähern kann, ohne ihn je völlig zu erreichen.

*Afg. 19

Anmerkung. Auf diesem Wege wird die Incommensurabilität zwischen der Diagonale und der Seite eines jeden Quadrats, die wir übrigens schon oben dargethan haben *, noch evidenter. Zugleich ist dieses ein unterrichtendes Beyspiel der leichtesten Methode, wie sich die Incommensurabilität von Ausdehnungen, in geometrischen Untersuchungen erweisen läßt. * 12. Z.