Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Aufgaben welche zum dritten Buche gehören.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

AUFGABEN

welche zum dritten Buche gehören.

AUFGABE I.

Fig. 72. *Ein gegebnes Vieleck in ein Dreyeck von gleichem Inhalt zu verwandlen.*

Man ziehe eine Diagonale, z. B. AF, ſo, daſs dadurch von dem ganzen Vieleck ein Dreyeck AFG abgeſchnitten wird, und duch die Spitze G dieſes Dreyecks eine Parallellinie mit der Diagonale. Darauf verlängere man eine von den Seiten der Figur, welche an das abgeſchnittene Dreyeck anſtoſsen, z. B. AB, bis zu ihrem Durchſchnitt H mit der Parallellinie, und ziehe von dem andern Endpunkte der Diagonale die grade Linie FH, ſo erhält man ein Vieleck mit den Seiten FH, HB, welches eine Seite weniger als das Gegebene, und doch mit demſelben gleichen Inhalt hat.

Denn das ſo gebildete Dreyeck FHA ſteht mit dem abgeſchnittnen FGA über gleicher Grundlinie FA und zwiſchen gleichen Parallelen FA, GH, hat alſo mit demſelben gleichen Innhalt *, daher es ſich unbeſchadet des Flächenraums ſtatt des abgeſchnittenen Dreyecks ſetzen läſst. Der Conſtruction gemäſs liegen aber

* 2. f. 2.

BA und AH in grader Linie, folglich hat das letztere Vieleck *gleichen Inhalt*, aber *eine Seite weniger als das Gegebne.*

Fährt man auf diese Art fort, und schneidet z. B. durch die Diagonale BD wiederum ein Dreyeck BCD ab, für welches, wenn HB bis I verlängert wird, man ein Vieleck FHIDEF erhält, welches *zwey Seiten weniger* und *denselben Inhalt* als das Gegebne hat.

Da man nun dieses Verfahren so lange fortsetzen kann, bis man endlich auf ein *Dreyeck* kömmt, so läſst sich mittelst desselben jede gradelinige Figur von beliebig viel Seiten, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandeln.

Bemerkung 1. Oder überhaupt kann man mittelst dieser Methode *zu jeder gegebnen gradelinigen Figur, eine ihr gleiche Figur von einer beliebigen Seitenzahl, die geringer als die Seitenzahl der gegebnen Figur ist, bilden.* Mit gehöriger Vorsicht läſst sich dieses Verfahren selbst auf krummlinige Figuren übertragen *, und *5. Z. 2. ist beym Ausmessen von unregelmäſsigen Flächenräumen oft von Nutzen.

Bemerkung 2. *Hohle Winkel*, wie E, ändern bey *I. E. 16 diesem Verfahren nichts. Sie geben Diagonalen, wie DF, welche auſserhalb der Figur fallen, und schneiden Dreyecke wie DEF ab, welche dem Flächenraume der Figur an dem Raume mangeln den die Diagonale mit den übrigen Seiten umschlieſst. Die Parallele durch die Spitze E mit einer solchen Diagonale, durchschneidet die Seiten der Figur, z. B. die Seite ID der reducirten Figur in K. Zieht man FK, so sind die Dreyecke DEF, DKF gleich, und mithin hat dann das Vieleck HIKF, mit dem Vieleck HIDEF gleichen Inhalt, aber eine Anzahl von Seiten, die um eins kleiner ist.

Fig. 73. Bemerkung 3. α) Zieht man alle Diagonalen, durch welche man Dreyecke Schrittweise abschneidet, von demselben Winkelpunkt D aus, und schafft aus jedem Dreyeck die Seite weg, welche der Spitze D gegenüber steht, *so erhält das Dreyeck, auf welches man*
Fig. 74. *zuletzt kömmt, den Winkel D als Winkelpunkt.* — β) Zieht man dagegen alle Diagonale von einem Punkt in einer Seite der Figur ABCD aus, *so liegt eine Spitze des entstehenden Dreyecks in diesem Punkte der Seite.* — γ) Und auf dieselbe Art *läſst sich irgend ein anderer Punkt bestimmen, in welchem die Spitze*, und eine Seite der Figur, in welche *die Grundlinie des zu bildenden Dreyecks liegen soll*, dergleichen in practischen Büchern mit grosser Umständlichkeit, und mit weit mehr Wortaufwand als die Sache verdient, gelehrt zu werden pflegt.

AUFGABE 2.

Ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu bilden, welches mit einem gegebenen Parallelogramm, oder Trapezoid, oder Dreyeck, gleichen Inhalt hat.

Taf. III. Fig. 6. 1) Ziehe von den Endpunkten der Grundlinie des gegebenen Parallelogramms, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien nach der gegenüberstehenden Seite, so entsteht ein Parallelogramm unter dem gegebenen Winkel, welches mit dem erstern gleichen Inhalt hat *. * 1

2) Theile die eine der nicht-parallelen Seiten des *Trapezoids*, z. B. CB, in zwey gleiche Theile im Punkte I, ziehe durch diesen Punkt eine Parallellinie mit der gegenüberstehenden Seite AD, und nach dieser von den Punkten A, D, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm unter dem gegebnen Winkel beschrieben, und hat mit dem Trapezoid gleichen Inhalt *. Fig. 14. * 6.

3) Im *Dreyeck* theile man eine der Seiten, z. B. LB, in zwey gleiche Theile im Punkte A, ziehe durch die gegenüberstehende Spitze mit LB eine Parallellinie, und nach dieser aus den Punkten L, B, unter dem gegebnen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm das Gesuchte. Taf. V. Fig. 75.

Folgerung. Da sich jedes Vieleck, der vorigen Aufgabe gemäfs, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandlen läfst, *so kann man* also auch *jedes Vieleck in ein Parallelogramm mit einem gegebnen Winkel verwandlen.* — Also auch in ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel, d. h. *in ein Rechteck.*

AUFGABE 3.

Ueber eine gegebne grade Linie MN ein Parallelogramm zu beschreiben, welches mit einem gegebnen Parallelogramm ABCD gleichen Inhalt hat, und unter gleichem Winkel enthalten ist. Fig. 76.

Man verlängere eine der Seiten des gegebnen Parallelogramms, z. B. AB, schneide auf der Verlängerung BE, gleich der gegebenen Linie MN, ab, und ziehe durch E und den Eckpunkt C eine grade Linie. Durchschneidet diese die verlängerte Seite AD des gegebnen Parallelogramms in einem Punkte F; so ist *DF die zweyte Seite des gesuchten Parallelogramms.* Und verlängert man die beyden andern Seiten des Gegebnen über C hinaus, und zieht durch E und F mit ihnen Parallellinien; so ist *die Ergänzung BGHI, welche auf diese Art entsteht, das gesuchte Parallelogramm.*

Denn da vermöge der Construction die Linien AE, DI, FH, und auch die Linien AF, BG, EH, parallel laufen, so sind die Vierecke welche auf diese Art gebildet werden, insgesammt gleichwinklige Parallelo-
*8. (1) gramme *. Ueberdem sind die Ergänzungs-Paral-
*8. (3) lelogramme ABCD und CGHI einander gleich *; so auch die gegenüberstehenden Seiten DF = CH und CI
* I. 34. = BE = MN *. Folglich ist CGHI das gesuchte Parallelogramm, welches über der gegebnen Linie MN = CI steht, und mit dem gegebnen Parallelogramm ABCD gleichwinklig und gleich grofs ist.

Folgerung 1. Auf die Art läfst sich also auch *ein gegebnes Rechteck in ein anderes, von gleicher Gröfse, welches über einer gegebnen Grundlinie steht, verwandeln.* Und zwar, da es mehrentheils nur darauf ankömmt, die Höhe dieses zweyten Rechtecks zu finden, und hierzu der erste Theil der Construction hinreicht; so verdient diese einfache Methode selbst vor der den Vorzug, die wir in den folgenden Aufgaben, mittelst Auffindung einer vierten Proportionallinie, werden kennen lernen.

Folgerung 2. Ferner läſst ſich auf dieſe Art jedes *gegebne Dreyeck LMN*, *oder jedes Trapezoid in ein Parallelogramm von gleichem Inhalt*, *welches über eine gegebne Linie MN*, *und unter einem gegebnen Winkel W beſchrieben iſt*, und zwar insbeſondere, *in ein Rechteck über gegebner Grundlinie verwandeln.* Man verwandle zu dem Ende das gegebne Dreyeck oder Trapezoid in ein gleich groſses Parallelogramm, unter dem gegebnen Winkel *, oder in ein gleich groſses Rechteck, und verfahre dann wie unſere Conſtruction angiebt. Eine andre Methode lehrt Aufgabe 8. *Afg. 2. (2. 3.)

Folgerung 3. Endlich läſst ſich auch durch dieſes Verfahren *jedes gradelinige Vieleck in ein Parallelogramm unter einem gegebnen Winkel*, und zwar insbeſondere *in ein Rechteck*, *welches über eine gegebne Grundlinie MN ſtehet*, *verwandeln.* Dazu führen verſchiedne Wege. α) *Entweder* man verwandelt das Vieleck in Ein Dreyeck von gleichem Inhalt *, das Dreyeck in ein Rechteck *, und dieſes nach dem eben gelehrten Verfahren in ein gleich groſses Rechteck, welches über der gegebnen Linie MN ſteht *. — β) *Oder* man zerſchneidet die gegebne vielſeitige Figur, entweder in lauter Dreyecke, oder in Trapezoide *, verwandelt jeden dieſer Theile einzeln in Rechteck *, und dieſe in gleich groſse Rechtecke über der gegebnen Seite MN *, trägt dann die zweyten Seiten aller dieſer Rechtecke in

*Afg. 1.
*Afg. 2.
* f. 1.
*6. Z. 2.
*Afg. 2
* f. 1.

eine grade Linie zusammen, und beschreibt über sie als Grundlinie, und mit MN als Höhe, ein Rechteck;
* E. 5. so erhält man das gesuchte Rechteck *.

Auf dieselbe Art läßt sich *über eine gegebne Linie MN ein Rechteck bilden, welches der Summe oder dem Unterschiede zweyer Vielecke R, S gleich ist*, je nachdem man die Rechtecke über MN, denen beyde Vielecke einzeln gleich sind, zu entgegengesetzter oder zu einerley Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie MN, neben oder auf einander legt.

Anmerkung 1. Die Geometer des Mittelalters hatten für diese Construction ein eignes Kunstwort: *Applicatio.* Doch bezeichnet im weitläufigen Sinn *applicare figuram ad lineam* oder *secundum lineam* überhaupt das Beschreiben einer Figur über eine
*Afg. 12 a. bestimmte Linie *.

Anmerkung 2. Da der Zahlausdruck eines Rechtecks das Produkt aus den Zahlausdrücken der Grundlinie und Höhe ist, z. B. AB × AD, und umgekehrt der Zahlausdruck der Höhe aus dem des Inhalts und der Grundlinie durch Division gefunden
* 6. a. wird, $h = \frac{i}{g}$ *; so ist im Fall der ersten Folgerung, der Zahlausdruck der gesuchten Höhe DF des zweyten Rechtecks,

$$DF = \frac{AB \times AD}{BE}$$

Ein solcher Zahlausdruck läßt sich daher in Linien darstellen, d. h. *construiren*, wenn man das Rechteck, dessen Zahlausdruck AB x AD, d. h. welcher aus den Seiten AB und AD beschrieben
* 4. ist *, in ein gleich großes Rechteck über die Grundlinie BE verwandelt; und dieses berechtigt uns in geometrischen Untersuchungen einen solchen Ausdruck durch: *Höhe eines Rechtecks, welches über der Grundlinie BE steht, und mit dem Rechteck*

AB x AD gleichen Inhalt hat, zu übersetzen, wie wir das z. B. in der Auslegung des 20sten Lehrsatzes gethan haben.

Anmerkung 5. Da das, was bey den Zahlausdrücken der Linien und Flächen *Division* ist, in der geometrischen Darstellung sich durch diese Construction bewerkstelligen läßt; so übertrugen die ältern Mathematiker das Kunstwort für dieses Verfahren auch auf die Division, und sagten z. B. *numerum applicare ad numerum*, um das Dividiren einer Zahl durch eine andre anzuzeigen *. *4. A. 2.

Aufgabe 4.

1) *Eine gegebne grade Linie AB in beliebig viel gleiche Theile zu theilen.*

2) *Eine gegebne grade Linie AB, entweder mehrern gegebnen Linien P, Q, R, oder einer gegebnen eingetheilten Linie MN, proportional einzutheilen.*

1) Gesetzt man soll die grade Linie AB in 5 gleiche Theile theilen; so ziehe man durch den Endpunkt A dieser Linie, unter einem beliebigen Winkel gegen dieselbe, und in gehöriger Länge, eine andre grade Linie, trage auf diese eine beliebige Linie AC fünfmal nebeneinander auf, und ziehe, vom letzten Endpunkt G dieser Theile, nach dem Endpunkte B eine grade Linie GB. Dann schneidet, behaupte ich, eine Parallellinie mit GB, die durch den ersten Theilpunk C gezogen wird, auf der gegebnen Linie AB den fünften Theil AI ab, und trägt man AI fünfmal nebeneinander, oder zieht man durch alle fernern Theilpunkte D, E, F, mit GB Parallellinien, so wird AB auf Fig. 77.

die verlangte Art, das heifst in fünf gleiche Theile eingetheilt.

Denn da vermöge diefer Conftruction die Parallellinien CI, DK etc. die Schenkel AB, AG des Winkels A durchfchneiden, fo theilen fie diefe Schenkel einander proportional *. Sind alfo, der Conftruction gemäfs, die Stücke AC, CD etc. insgefammt unter einander gleich, und jedes fünfmal in der Linie AG enthalten; fo müffen auch die Stücke AI, IK etc, untereinander gleich, und jedes der fünfte Theil der gegebnen Linie AB feyn. Mithin ift diefe in fünf gleiche Theile getheilt.

*7, Z. 2.

Fig. 78. 2) Soll die grade Linie AB den gegebnen Linien P, Q, R, in diefer angegebnen Folge proportional getheilt werden *, fo trage man auf eine grade Linie, welche durch den einen Endpunkt A der gegebnen, unbeftimmt gezogen ift, die gegebnen Linien P, Q, R in der verlangten Folge nebeneinander, fo dafs AC = P, CD = Q, DE = R wird, ziehe durch die beyden Endpunkte B, E der gegebnen Linie, und der letzten aufgetragenen, eine grade Linie BE, und mit ihr parallel durch die Punkte C und D Parallellinien, fo wird durch diefe Parallelen die Linie AB auf die verlangte Art, das heifst nach dem Verhältnifs der Linien P, Q, R, in der verlangten Ordnung eingetheilt. Denn wegen des Parallelismus der Linien CI, DK, EB, verhalten fich die Theile AI, IK, KB des einen Schenkels, wie die übereinftimmenden Theile AC, CD, DE des andern Schenkels

* E. 8.

kels *; und diese Theile sind vermöge der Construction den gegebnen Linien P, Q, R gleich. * 7.

Soll endlich die grade Linie AB einer gegebnen eingetheilten Linien MN proportional getheilt werden, so verfährt man mit den Theilen, welche auf dieser Linie gegeben sind, grade so, wie hier mit den gegebnen Linien P, Q, R.

Noch andre Methoden beyde Aufgaben aufzulösen, werden wir im folgenden Buche kennen lernen.

Bemerkung 1. Man sieht leicht dass diese Construction sich auch auf den Fall ausdehnen lässt, wenn die gegebne Linie nur ein bestimmter Theil der einzutheilenden werden soll, z. B. der erste, der mit dem Theil AC der eingetheilten, gegebnen Linie übereinstimmt *. Denn in diesem Fall ziehe man durch die *E. 8. α übereinstimmenden Punkte B und C eine grade Linie, und mit dieser durch die Punkte D und E Parallellinien; so theilen diese, wegen des Parallelismus der Linien durch C, D, E, die verlängerte AB, der gegebnen Linie proportional ein *. * 7.

Bemerkung 2. Da ferner nicht blos die Schenkel eines Winkels, sondern je zwey grade Linien, welche Parallellinien durchschneiden, von diesen proportional eingetheilt werden *; so sieht man leicht, dass man *diese Constructionen auch dahin abändern kann*, dass man durch die Theilpunkte * der eingetheilten Linie AG oder AE, willkührlich Parallellinien zieht, und dann um irgend einen Punkt T in der äussersten Pa- Fig. 78 *7. Z. 2. *E. 8. α rallellinie, mit der einzutheilenden Linie als Halbmesser, einen Kreisbogen beschreibt, der die andre äusserste Parallellinie im Punkte V durchschneide. Zieht man TV, so ist diese Linie der gegebnen gleich, und auf die verlangte Art (z. B. in 5 gleiche Theile) eingetheilt, und man kann dann ihre Eintheilung durch einen Zirkel unmittelbar auf die gegebne Linie übertragen.

Zu *Theilungen von Linien in gleiche Theile*, mittelst dieser Construction, dient ein besonderes *Instrument*, worauf eine Menge Parallellinien in gleichen Entfernungen von einander eingegraben sind, und welches uns der Mühe überhebt, jedesmal erst gleiche willkührliche Theile aufzutragen, und durch die Theilpunkte Parallellinien zu ziehn.

Auf dieselbe Art findet man auf den Verlängerungen einer gegebnen Linie AB die Punkte, welche mit ihr eine Linie bilden, die einer gegebnen AE so proportional eingetheilt ist, dass AB mit einem der mittlern Theile CD übereinstimmt. Man ziehe nemlich durch alle Theilpunkte willkührlich Parallellinien, trage zwischen die beyden durch C und D die gegebne Linie AB ein, und verlängere sie, bis sie von allen jenen Parallellinien durchschnitten ist. — Dann hat man die verlangte eingetheilte Linie.

Zusatz I. *Um ein gegebnes Dreyeck durch Linien aus der Spitze in eine beliebige Anzahl gleicher Theile*, oder *in Theile, welche zu einander ein gegebnes Ver-*

hältniſs haben einzutheilen, theile man die Grundlinie nach der verlangten Art ein, und ziehe aus der Spitze grade Linien nach allen Theilpunkten.

Denn das gegebne Dreyeck wird dadurch in kleine Dreyecke getheilt, die insgeſammt auf derſelben graden Linien ſtehn, und deren Spitze in einem Punkte liegen, folglich in Dreyecke von gleicher Höhe *. * E. 2.
Solche Dreyecke verhalten ſich aber wie ihre Grundlinien *; daher das gegebne Dreyeck dann auf die verlangte Art eingetheilt iſt. * 5. f. 1.

Zuſatz II. *Um ein gegebnes* P a r a l l e l o g r a m m *durch Parallellinien mit einer der Seiten in eine beliebige Anzahl* g l e i c h e r *Theile, oder in Theile, welche zu einander ein gegebnes Verhältniſs haben, einzutheilen*, theile man die zweyte, an jener anſtoſsende Seite auf die verlangte Art ein, und ziehe durch die Theilpunkte Parallellinien mit der erſtern Seite.

Denn die kleinen Parallelogramme, welche auf dieſe Art entſtehn *, liegen insgeſammt zwiſchen zwey Parallellinien; haben alſo gleiche Höhe *, verhalten ſich folglich wie ihre Grundlinien *, und das gegebne Parallelogramm iſt daher auf die verlangte Art eingetheilt. * I. 34. f. 1 * E. 3. * 5. f. 1.

AUFGABE 5.

1) *Eine gegebne grade Linie BC, nach einem gegebnen Zahlverhältniſſe m : n, einzutheilen.*

2) *Auf der Verlängerung einer gegebnen graden Linie BC so einen Punkt g zu bestimmen, dass die beyden Abschnitte Bg, Cg, in dem gegebnen Zahlverhältnisse m : n stehn.*

Das gegebne Zahlverhältnifs m : n sey welches es wolle, so läfst es sich jedesmal leicht in ein Linearverhältnifs verwandeln. Denn man braucht zu dem Ende nur aus einer willkührlichen Linie zwey Linien P, Q, grade so zusammenzusetzen, wie die beyden Zahlen m und n aus der Einheit zusammengesetzt sind. Alsdann verhält sich m : n = P : Q und P und Q sind bekannte Linien.

1) Nun soll *im ersten Fall der Aufgabe* die gegebne Linie BC selbst nach dem Verhältnisse m : n, folglich den Linien P und Q proportional eingetheilt werden; welches durch das Verfahren der vorigen Aufgabe geleistet wird *.

* Afg. 4. (2).

Fig. 79. 2) *Im zweyten Fall* soll auf der Verlängerung der gegebnen Linie BC ein Punkt g so gefunden werden, dafs sich verhalte Bg : Cg = m : n = P : Q. Die beyden Abschnitte Bg, Cg sind in diesem Fall um die gegebne Linie BC von einander verschieden, können also nicht im Verhältnifs der Gleichheit stehn; und würde dieses gefordert, so wäre die Aufgabe in diesem Fall unmöglich. Ueberdem mufs, je nachdem m gröfser oder kleiner als n ist, auch Bg gröfser oder kleiner als Cg seyn, mithin der gesuchte Punkt g auf der Verlängerung der Linie BC über C oder über B hinaus liegen. Alles dieses zeigt auch die folgende Construction.

Gesetzt nemlich, es sey $m > n$, so verhält sich $Bg : Cg : Bg - Cg = m : n : m - n = P : Q : P - Q$*, oder $P - Q : P = BC : Bg$. Man ziehe daher durch B eine grade Linie unter einem willkührlichen Winkel gegen BC, trage auf sie von B aus, $BE = P$, und vom Endpunkte E dieser Linie, rückwärts $EF = Q$ auf, (so dass $BF = P - Q$ wird) und ziehe FC so schneidet eine Parallellinie mit FC, durch E gezogen, auf der Verlängerung von B über C hinaus den gesuchten Punkt g ab. Denn wegen des Parallelismus dieser Linien verhält sich $BC : Bg : Cg = BF : BE : EF$* $= P - Q : P : Q$,* folglich $Bg : Cg = m : n$.

* V. 4. β.

* 7. 2.

Ist dagegen $m < n$, mithin auch $P < Q$ und $BE < EF'$, so fällt der Punkt F' über B hinaus, auf dem Stück der willkührlich gezognen Linie, welche mit dem erstern gegen B auf entgegengesetzte Art liegt, und zieht man nun CF', und mit ihr durch E eine Parallellinie, so durchschneidet auch diese die Linie BC, nur auf der entgegengesetzten Verlängerung, über B hinaus.

Sollte endlich $m = n$, folglich auch $P = Q$ und $BE = EF$ seyn, so müssten die Punkte B und F, mithin auch die Linien FC und BC zusammen fallen. Eine Parallellinie durch E mit FC, wäre also in diesem Fall auch mit BC parallel, durchschnitte folglich BC auf beyden Seiten verlängert, nie, und es ist dann kein Durchschnittspunkt g möglich.

Wollte man sich indess vorstellen, dass zwey Parallellinien sich in einer unendlichen Entfernung (d. h. aber *gar nicht*) durchſchneiden, ſo rückt in dieſem Fall der Punkt g ins Unendliche fort. Ein Kreis mit einem Halbmeſſer Ag beſchrieben, gienge dann in einen Kreis, mit einem unendlich groſsen Halbmeſſer beſchrieben, d. h. in eine grade Linie über, und ſo würden durch dieſe blos eingebildete Idee in Lehrſatz 20 die Fälle, wo ein Ort, der, falls m und n ungleich ſind ein Kreis iſt, wenn m und n gleich ſind, in eine grade Linie übergeht, auf jenen Hauptfall zurückgebracht; und dieſes Verallgemeinern iſt überhaupt eine der vorzüglichſten Anwendungen, die der Mathematiker von dieſen bloſs eingebildeten Ideen des Unendlichen macht. Doch gehört dieſes mehr in die algebraiſche Analyſis, als hierher.

Zuſatz. Sind in einer graden Linie mehrere Punkte, z. B. B, D, C gegeben, und man ſucht auf ihr oder ihrer Verlängerung einen Punkt G, der ſo liegt, daſs die Entfernung deſſelben von den gegebnen Punkten zu einander in gegebnem Verhältniſs ſtehn ſollen, z. B. $Bg : Cg : Dg = m : n : p$; ſo iſt dieſes nicht für jedes Verhalten, ſondern nur unter gewiſſen Bedingungen möglich. Denn es muſs dann z. B. ſich verhalten $Bg - Cg : Cg - Dg$ d. h. $BC : CD = m - n : n - p$, welches eine beſondre Bedingung für das gegebne Verhältniſs $m : n : p$ an die Hand giebt.

Anmerkung. Dieſes iſt die vollſtändige Auflöſung einer Aufgabe, auf die wir uns in den Folgerungen und Zuſätzen zu Lehrſatz 20 durchgehends berufen haben. Das dort Vorgetragene, beruht gröſstentheils auf ihr, und beſonders wird hieraus die *Auslegung* S. 326. 2, ganz deutlich werden. *Apollonius* ebne Oerter II. Lemma 9.)

Die Aufgabe *von einer gegebnen Linie BC einen beſtimmten Theil*, z. B den ſechſten *abzuſchneiden*, oder *ſie um dieſen Theil zu verlängern*, iſt nur ein beſondrer Fall, dieſer Allgemeinern,

AUFGABE 6.

Wenn ein Winkel A, und ein Punkt B gegeben Fig. 80.
ſind, durch dieſen Punkt eine grade Linie ſo zu ziehn, daſs durch die Schenkel des Winkels auf ihr zwey Stücke BC, BD abgeſchnitten werden, die in einem gegebnen Verhältniſs ſtehn, ſich nemlich wie die gegebnen Linien P : Q verhalten.

Liegt der gegebne Punkt B *zwiſchen den beyden Schenkeln des gegebnen Winkels*, ſo ziehe man durch ihn eine Parallellinie mit dem einen Schenkel AH, welche den andern im Punkte E durchſchneide, nehme auf dieſem ein Stück ED ſo, daſs AE, ED, den gegebnen Linien P, Q proportional ſind, und ziehe DB, ſo iſt *Afg. 2.
dieſes die verlangte Linie. Denn wegen des Parallelismus der Linie EB, AH, durchſchneidet ſie auch den zweyten Schenkel in irgend einem Punkte C *, und *I.24Z3,
zwar ſo, daſs ſich verhält AE : ED = CB : BD = P : Q*. * 7.

Liegt der gegebne Punkt B *auſserhalb des Winkels*, ſo ziehe man durch ihn und einen beliebigen Punkt E des einen Schenkels eine grade Linie, nehme auf ihr ein Stück BF, ſo daſs BE, BF den gegebnen Linien P, Q, proportional ſind *, und ziehe durch F eine *Afg. 2.
Parallellinie mit jenem Schenkel, welche den zweyten Schenkel in irgend einem Punkte D ſchneiden muſs *; *I24 Z 3
ſo iſt DB die verlangte Linie. Denn wegen des Parallelismus der Linie FD, AE, durchſchneidet ſie den erſten Schenkel AE nothwendig in irgend einem Punkte C *, und zwar ſo, daſs ſich verhält BC : BD = BE *I.24Z.3
: BF = P : Q.

(*Gregorius a St. Vinc. I. 28. 29*). Man sieht leicht, daſs sich diese Aufgaben noch auf mannigfaltige Art abändern lassen, z. B. wenn eine Parallellinie mit dem einen Schenkel gegeben ist, die Linie durch den Punkt B so zu ziehn, daſs die Abschnitte derselben zwischen den beyden parallelen Linien, und zwischen B und dem andern Schenkel, in dem Verhältnisse von P zu Q stehn; eine Aufgabe, die grade so aufgelöst wird (Greg. I. 25.)

Zusatz. *Um durch den Punkt B eine grade Linie so zu ziehn, daſs sie auf den Schenkeln des gegebnen Winkels zwey Stücke AC, AD abschneide, die sich wie P zu Q verhalten*, trage man auf den einen Schenkel AE = P, auf den andern AF = Q auf, ziehe EF, und damit parallel durch B, CD. Denn dann verhält sich wegen des
* 7. Parallelismus dieser Linien, AC : AD = AE : AF* = P : Q. (Greg. I. 30.)

AUFGABE 7.

Fig. 82. *Zu drey gegebnen Linien P, Q, R, die vierte Proportionallinie zu finden*

Man bilde einen willkührlichen Winkel K, und trage von der Spitze K aus, auf dem einen Schenkel desselben die erste und zweyte der gegebnen Linien, P = KA, Q = KB, und auf dem andern Schenkel die dritte Linie R = KC auf, verbinde dann die Endpunkte A, C der ersten und dritten durch eine grade Linie, und ziehe mit dieser durch den Endpunkt B der zweyten eine Parallellinie BX. Das Stück KX, welches diese Parallellinie auf dem zweyten Schenkel abschneidet, ist die gesuchte vierte Proportionallinie.

Denn da die Parallellinien die beyden Schenkel einander Proportional eintheilen, ſo verhält ſich $KA : KB = KC : KX$ *, mithin $P : Q = R : KX$. *7.Z.1.

Bemerkung 1. So wie ſich, unbeſchadet des vierten Glieds, die mittlern Glieder jeder Proportion vertauſchen laſſen, ſo iſt es auch für dieſe Conſtruction ganz gleichgültig, ob man die zweyte oder die dritte der gegebnen Linien, mit der erſten auf demſelben Schenkel legt. Nur daſs man immer *durch den Endpunkt der erſtern Linie*, und der, welche auf dem andern Schenkel liegt, *die grade Linie ziehn muſs*, durch welche die Lage der Parallellinie beſtimmt wird.

Zieht man *durch die Endpunkte der beyden Linien, welche in der Proportion die mittlern Glieder ausmachen*, eine grade Linie BC, und mit dieſer durch den Endpunkt der erſten eine Parallellinie AY, ſo verhält ſich $KA : KB = KY : KC$ und *man erhält daher eine vierte Linie KY, welche mit den drey andern*, nicht, wie unſere Aufgabe verlangt, direkt, ſondern *verkehrt proportional* iſt: und eine ſolche Linie läſst ſich daher auf dieſe Art immer ganz leicht finden. Eine andre Methode dazu haben wir in Aufgabe 3 kennen gelernt. * *Afg3f1

Bemerkung 2. Ferner iſt es nicht nöthig, daſs man die drey gegebnen Linien auf den Schenkeln zu einerley Seite des Punktes K, oder überhaupt von dieſem Winkelpunkte an auftrage; vielmehr kann man ſie ganz willkührlich legen, wenn nur die übereinſtimmenden Endpunkte der Linien P, R in zwey Parallellinien fallen. Denn auch in dieſem Fall ſchneiden

zwey durch die Endpunkte der Linie Q mit jenen pa-
7. Z. 2 rallel gezogne Linien, vermöge Lehrsatz 7, vom gegenüberstehenden Schenkel ein Stück ab, welches zu den drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie ist. Allein die oben angegebne Construction ist von allen die einfachste.

Bemerkung 3. Auch Lehrsatz 13. Folgerung 2 führt auf ein ganz *bequemes Verfahren, zu drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie zu finden*, welches ich dem Leser selbst zu entwickeln überlasse. Eben so unsere Sätze über den Kreis, besonders Lehrsatz 24 und 25, aus denen leichte und artige Methoden folgen.

Bemerkung 4. Diese Construction ist übrigens für die geometrische Darstellung dasselbe, was die sogenannte *Regel de Tri* für die Arithmetik ist, und für sie nicht weniger wichtig. In so fern man einen jeden Ausdruck wie folgenden $\frac{AB \times AD}{DE}$ als vierte Proportio-
* V. 3. α nalgröße zu den Linien DE, AB, AD ansehn kann*, dient dieses Verfahren, ähnliche Ausdrücke noch auf eine andre Art in Lineargrößen anzugeben, d. i. *zu construiren*, und bey geometrischen Untersuchungen noch auf eine andre Art *zu übersetzen*, als wir dieses im Vo-
* Afg. 3. rigen gethan haben *; nemlich durch *vierte Proportio-*
a. 2. *nallinie zu den drey Linien DE, AB, AD;* eine Auslegung, die indess vermöge Lehrsatz 4 Folgerung 1. in der That mit der erstern zusammen fällt.

AUFGABE 8.

Ein gegebnes Parallelogramm, oder ein gegebnes Dreyeck oder ein gegebnes Trapezoid, in eine Figur von einer dieſer drey Gattungen zu verwandeln, welche mit der gegebnen gleichen Inhalt hat, und entweder über einer gegebnen Grundlinie MN ſteht, oder eine gegebne Höhe hat.

Alle einzelnen Aufgaben, welche in dieſer allgemeinen enthalten ſind, laſſen ſich *durch Auffindung einer vierten Proportionallinie* auflöſen, und mithin auf die vorige Aufgabe zurückführen, ſind aber, wie ſie hier ausgedrückt werden, unbeſtimmt. Denn der Inhalt des Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe beſtimmt, der Inhalt des Dreyecks durch die Hälfte dieſes Produkts *, und der Inhalt des Trapezoids durch das Produkt aus der Höhe in die halbe Summe beyder Grundlinien *. Sollen folglich zwey Figuren dieſer Gattungen gleichen Inhalt haben, ſo müſſen zwey ſolche Produkte gleich ſeyn, wodurch eine Proportionalität zwiſchen den Grundlinien und Höhen beyder gegeben wird *. Nun aber ſind von der gegebnen Figur, die Grundlinie und die Höhe bekannt, und von der zweyten ſoll entweder die Grundlinie oder die Höhe gegeben ſeyn. Folglich kennt man in dieſer Proportion drey Glieder, und ſucht man aus ihnen, nach der vorigen Aufgabe, die vierte Proportionallinie, ſo findet man auch der geſuchten Figur Grundlinie oder Höhe, wodurch jedoch dieſe Figur nicht völlig beſtimmt wird.

* 5.
* 6.
* V. 3.

Nach dieſem Fingerzeig entwickle und löſe der Anfänger ſelbſt die einzelnen Aufgaben auf, die in dieſer allgemeinen enthalten ſind. Hier, zum Beyſpiel, nur ein Paar.

Fig. 75. *Das gegebne Parallelogramm ABCD in ein Parallelogramm über die gegebne Grundlinie CI zu verwandeln.* Man ſuche die Höhe DK des gegebnen Parallelogramms *, und zu CI, CB, DK die vierte Proportionallinie, ſo iſt dieſe die Höhe des geſuchten Parallelogramms *, und errichtet man auf CI ein Perpendikel, trägt darauf IL, dieſer Höhe gleich, und zieht durch L eine Parallellinie mit CI, ſo ſchneiden je zwey Parallellinien durch C und I ein Parallelogramm ab, welches der Aufgabe genüge thut. Dieſe Aufgabe iſt alſo *unbeſtimmt*, weshalb unzählige Parallelogramme ihr genüge leiſten. Beſtimmt wird ſie, ſo bald noch der Winkel gegeben iſt, unter dem dieſes Parallelogramm beſchrieben werden ſoll, wie in Aufgabe 3., und dieſes iſt, wenn nach Rechtecken gefragt wird, immer der Fall.

* E. 3.
*5. f. 2.

Hätte *das Parallelogramm ABCD in ein Dreyeck über CI verwandelt werden ſollen*, ſo ſey die Höhe des geſuchten Dreyecks h. Dann wird der Inhalt des Parallelogramms ausgedrückt durch $BC \times DK$, des Dreyecks durch $\frac{1}{2} CI \times h$ *, und da beyde gleich ſeyn ſollen, muſs $BC \times DK = \frac{1}{2} CI \times h$ ſeyn, folglich ſich verhalten $\frac{1}{2} CI : BC = DK : h$ *. Man ſuche alſo die vierte Proportionallinie zu $\frac{1}{2}$ CI, BC, DK, ſchneide auf dem Perpendikel auf CI, dieſer Linie gleich IM ab, und ziehe durch M mit CI eine Parallellinie; ſo iſt die Pa-

* 5.
* V. 3. 7

rallellinie der Ort der Spitze des gesuchten Dreyecks*, und die Aufgabe ebenfalls unbestimmt, etc. *2. Z.

AUFGABE 9.

Zu zwey gegebnen Linien P, Q, als äußere Glieder einer Proportion, zwey andre Linien Y, X, deren Unterschied oder deren Summe einer gegebnen Linie N gleich ist, als mittlere Glieder der Proportion zu finden.

Man ziehe willkührlich zwey Linien, welche sich im Punkte F rechtwinklig durchschneiden. Fig. 60.

Im Fall des Unterschieds trage man zu entgegengesetzten Seiten des Punktes F auf die eine dieser Linien FA = P und FB = Q, und auf die zweyte Linie FH = N. Halbire AB und FH, und errichte auf beyden Linien in den halbirenden Punkten Perpendikel. Der Punkt C, wo diese Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt eines Kreises, der mit AC als Halbmesser beschrieben, auf der zweyten Linie die beyden gesuchten Linien FD, FE abschneidet.

Denn da dieser Kreis vermöge der Construction durch die Punkte A und B geht, so sind AB, DE Sehnen, die sich im Punkte F durchschneiden, folglich FA : FE = FD : FB *: und da das Perpendikel aus dem Mittelpunkte C die Sehne DE halbirt, auch EF = HD und mithin FD — FE = FH = N. *22.f.1.

Im Fall der Summe trage man FA = P und FB = Q zu einerley Seite des Punktes F auf, und verfahre im

übrigen wie vorhin. Durchschneidet dann die Kreislinie, die durch A und B geht, die zweyte Linie in den Punkten D, E, so sind jetzt AB, DE Sehnen, die verlängert im Punkte F sich durchschneiden, folglich wie-
22.f.1γ derum $FA:FE = FD:FB$, jetzt aber $FD + FE = FH = N$.

In diesem Fall wird jedoch der Kreis die zweyte Linie nur dann durchschneiden, wenn die Summe der beyden Abschnitte $FE + FD = N$ grösser ist, als das Zweyfache der Tangente, die aus F am Kreise gezo-
*22f.3.α gen wird *; oder, da das Quadrat dieser Tangente
* 22. 2. gleich ist dem Rechteck $FA \times FB$ *, nur dann, wenn $N^2 > 4 . FA \times FB$ ist. Ist N kleiner, so wird die Aufgabe unmöglich.

Bemerkung 1. Da das Rechteck aus der mittlern von vier Proportionallinien, stets dem Rechteck aus den äussern gleich, mithin in diesem Fall $(N - FE) \times FE = P \times Q$ ist; so läuft diese Aufgabe auf eins mit folgender hinaus: „*Ein Rechteck von gegebnem Inhalt, zu beschreiben, wenn entweder der Unterschied, oder die Summe zweyer anliegenden Seiten desselben gegeben ist.*" Noch eine andre Form und Auflösung derselben, findet sich in Aufgabe 18.

Bemerkung 2. Wo es überhaupt auf Gleichheit von Rechtecken ankömmt, wird diese Constructionsart vermittelst des Kreises, mehrentheils mit Vortheil gebraucht werden.

Zusatz. Sind die beyden gegebnen Linien P und Q gleich, so geht die gesuchte Proportion, in diese $P:X = Y:P$, und daher unsere Aufgabe (da es gleichgültig ist, ob die gesuchten Linien innere oder äussere Glieder in der Proportion ausmachen, in folgende über:

Wenn eine mittlere Proportionallinie P, und von den beyden andern proportionalen Linien, entweder die Summe, oder der Unterschied N gegeben sind, diese Linien selbst zu finden.

Oder: *Ein gegebnes Quadrat P^2 in ein Rechteck zu verwandeln, von dessen beyden anliegenden Seiten die Summe oder der Unterschied N gegeben ist.*

Oder endlich: *Auf einer gegebnen graden Linie N, oder auf deren Verlängerung einen Punkt, so zu bestimmen, dass das Rechteck aus den beyden Abschnitten, einem gegebnen Quadrate P^2 gleich sey.*

Diese drey Aufgaben fragen, nur unter verschiedner Gestalt, nach ein und dasselbe, und sind ein einzelner Fall unserer allgemeinern Aufgabe. Dadurch dass für sie die gegebnen Linien $P = FA$, und $Q = FB$ gleich sind, wird die Construction in beyden Fällen beträchtlich vereinfacht.

Im Fall des Unterschieds beschreibe über $FH = N$ Fig. 89. als Durchmesser einen Kreis, welchen $FA = P$ berührt, und ziehe von A durch den Mittelpunkt eine grade Linie, welche den Kreis in D und E durchschneide, so sind AD, AE die gesuchten Linien. Denn es ist $AD \times AE = AF^2 = P^2$ und $AD = AE + N$.

Im Fall der Summe beschreibe über $FH = N$ einen Halbkreis, ziehe mit FH in einer Entfernung gleich P, eine Parallellinie, und fälle vom Punkte, wo sie den Kreis durchschneidet, ein Perpendikel IK auf den Durchmesser, so schneidet dieses auf dem Durchmesser die beyden verlangten Abschnitte FK, KH ab. Denn es ist $FK \times KH = IK^2 = P^2$, und $FK + KH = EH = N$.

AUFGABE 10.

Wenn zwey Rechtecke, aus den Linien A, B und P, Q, gegeben sind, eine Linie zu finden, zu welcher sich eine Seite des einen Rechtecks, wie der Inhalt beyder Rechtecke zu einander verhält.

Gesetzt es sey X die Linie, zu welcher die Seite A in dem Verhältnisse des Inhalts beyder Rechtecke steht, $A \times B : P \times Q = A : X$; so ist das erste Verhält-
3. f. 2. niss auch gleich dem Verhältniss $A \times B : X \times B$; folglich, da die Vorderglieder gleich sind, müssen es auch
V. 3. ε die Hinterglieder seyn, $P \times Q = X \times B$, oder es muss
V. 3. γ sich verhalten $B : P = Q : X$.

Man suche also zu der einen Seite des einen, und zu den beyden Seiten des andern Rechtecks die vierte
Afg. 7. Proportionallinie, so verhält sich zu dieser die andre Seite des erstern, wie der Inhalt beyder Rechtecke, oder $A : X = A \times B : P \times Q$.

Bemerkung. Auf diese Art findet man zwey *Linien, die im zusammengesetzten Verhältniss zweyer Paar*
* V. 6. *gegebner Linien stehn*, $A : X = (A : P) + (B : Q)$*. Sind die gegebnen Verhältnisse gleich, so ist $A : X = 2\,(A : P) = A^2 : P^2$ und $A : P = P : X$, da denn diese Auflösung in

in die übergeht, welche wir in Aufgabe 12 für diesen Fall haben werden. *. *12. f. 2.

AUFGABE II.

*Zwey Linien darzustellen, deren Verhältniss aus den gegebnen Verhältnissen dreyer Paar Linien A, B, C und P, Q, R zusammengesetzt ist, oder die sich wie die Produkte dreyer Linien, zu den Produkten dreyer andrer Linien * verhalten.* * E. 6.

Gesetzt Y und X sind die beyden gesuchten Linien, so soll sich verhalten $Y : X = A \times B \times C : P \times Q \times R$ oder $= \frac{B \times C}{P} : \frac{Q \times R}{A}$ *. Setzt man folglich $Y = \frac{B \times C}{P}$ *V. 1. β. und $X = \frac{Q \times R}{A}$, so erhält man gewiss zwey Linien in dem gesuchten Verhältniss, und von diesen Linien ist dann die *Eine* die vierte Proportionallinie zu P, B, C, und die *Andre* die vierte Proportionallinie zu A, Q, R *. *Afg. 7. B. 3.

Zusatz I. Soll, wie in der vorigen Aufgabe, eine der gegebnen Linien, z. B. A, das Vorderglied des gesuchten Verhältnisses seyn, . sich folglich verhalten $A \times B \times C : P \times Q \times R = A : X = A \times B \times C : X \times B \times C$ *; *V. 1. β. so muss, wegen Gleichheit der Vorderglieder, $P \times Q \times R = X \times B \times C$, mithin $B \times C : Q \times R = P : X$ seyn. Denkt man sich daher eine Linie Z so, dass sich verhalte $B : Z = P : X$ mithin auch $B \times C : Z \times C = P : X$, so muss diese Linie so beschaffen seyn, dass $Q \times R = Z \times C$ *, *V. 3. α folglich $C : Q = R : Z$ ist. — Sucht man daher zu C, Q, R die vierte Proportionallinie Z, und dann zu B, Z, P abermals die vierte Proportionallinie, so erhält man die gesuchte Linie X, zu welcher A in dem verlangten Verhältnisse steht.

Zusatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel Verhältnisse gegeben seyn, und *man sucht ein Verhältniss G : X, welches aus allen diesen gegebnen Verhältnissen zusammengesetzt ist*, so findet man dieses durch fortgesetzte Auffindung vierter Proportionallinien a, b, c etc., z. B.

$$A : P = G : a$$
$$B : Q = a : b$$
$$C : R = a : X$$

so ist, wenn man zusammensetzt G : X = (A : P) + (B : Q) + (C : R) = A × B × C : P × Q × R *. * V. 4. δ.

AUFGABE 12.

Fig. 82. *Zu zwey gegebnen Linien P, Q die dritte Proportionallinie zu finden.*

Diese Aufgabe fordert eine stetige Proportion zu denken, worin die mittlern Glieder beyde der zweyten gegebnen Linie gleich sind *, und zu dieser die vierte Proportionallinie zu finden. Man wiederhole daher die Construction der siebenten Aufgabe, nur dass man jetzt Q = KB auf beyde Schenkel des Winkels K auftrage, und man ziehe AB' und damit parallel BC, so ist KC die gesuchte dritte Proportionallinie. Denn es verhält sich KA : KB = KB : KC.

* V. 5.

Fig. 88. *Oder* setze auf dem Endpunkte von P = AD die zweyte Linie Q = DF senkrecht, ziehe AF, und errichte

darauf im Punkte F ein Perpendikel. Wenn dieses die verlängerte AD im Punkte B durchschneidet, so ist BD die dritte gesuchte Proportionallinie. Denn es ist dann AD : DF = DF : DB *. *12f.2.δ

Oder beschreibe einen Kreis, trage P und Q von Fig. 62. demselben Punkte A aus als Sehnen hinein, und ziehe vom Endpunkt der einen eine Parallellinie mit der Tangente durch A, so ist das Stück AM oder Aγ, welches diese Parallellinie auf der andern, oder auf deren Verlängerung abschneidet, die dritte Proportionallinie zu den beyden Sehnen *. *24.f.1

Und solcher Auflösungen mehrere, die sich ohne Schwierigkeit aus unsern Sätzen über den Kreis ausheben lassen.

Folgerung 1. Da zu den Zahlausdrücken der Fig. 83. beyden Linien KA, KB die dritte Proportionalzahl $\frac{KB^2}{KA}$ ist *, so muss dieses auch der Zahlausdruck für *V.3.α. die dritte Proportionallinie KC seyn. Folglich dient diese Construction *einen solchen Ausdruck* in Lineargrössen anzugeben, d. i. *zu construiren*: und man ist umgekehrt berechtigt bey geometrischen Untersuchungen einen solchen Ausdruck *durch dritte Proportionallinie zu den Linien KA und KB* zu übersetzen.

Folgerung 2. Setzt man die gleichen Verhältnisse in dieser stetigen Proportion zusammen *, so sieht * V. 9. man, dass sich verhalte KA : KC = 2(KA : KB) = KA² : KB², d. h. *dass das Verhältniss der ersten zur dritten Pro-*

portionallinie noch einmal so hoch, als das Verhältniß der ersten zur zweyten, oder dem Verhältnisse der zweyten Potenzen aus den Zahlausdrücken dieser Linien, mithin *dem Verhältnisse der Quadrate über diese Linien, gleich ist* *.

*4. Z. 2.

α) *Um folglich zwey Linien zu bilden, die sich wie zwey gegebne Quadrate verhalten*, braucht man nur zu den Seiten dieser Quadrate die *dritte Proportionallinie* zu finden;

β) und umgekehrt *findet man die Seiten zweyer Quadrate, die sich wie zwey gegebne Linien verhalten*, wenn man zwischen diesen beyden Linien die mittlere Proportionallinie bildet *; wichtige Bemerkungen, von denen wir im folgenden Buche häufig Gebrauch machen werden.

*Afg. 13

Folgerung 3. Fährt man in der angegebnen Construction fort, trägt ferner KC′ auf den zweyten Schenkel auf, und zieht C′D parallel mir B′C, so ist wiederum KD die dritte Proportionallinie zu KB und KC; trägt man weiter KD′ auf den andern Schenkel und zieht D′E parallel mit C′D, eben so KE die dritte Proportionallinie zu KC und KD u. s. f.

Auf diese Art läßt sich folglich *eine ganze Reihe stetig proportionaler Linien KA, KB, KC, KD etc. bilden*, wo jede die dritte Proportionallinie zu den beyden vorhergehenden, und die mittlere Proportionallinie zwischen der nächst vorhergehenden und folgenden ist, so daß sich verhält KA : KB = KB : KC = KC : KD = KD : KE etc.

Setzt man diese stetigen Verhältnisse Schrittweise zusammen *, so erhält man * V. 6.

$KA : KC = 2\,(KA : KB) = KA^2 : KB^2$

$KA : KD = 3\,(KA : KB) = KA^3 : KB^3$

$KA : KE = 4\,(KA : KB) = KA^4 : KB^4$ etc.

Man wird daher durch diese Construction im Stande gesetzt *Linien zu bilden, welche sie wie irgend zwey Potenzen von gleichem Grade aus den Zahlausdrücken zweyer gegebner Linien KA, KB verhalten.*

Allein wenn zwey Linien, wie KA, KE gegeben sind, die Linie KB zu finden, so dass $KA : KE$ sich z. B. wie $KA^4 : KB^4$ verhielte, dazu erhalten wir durch diese Construction kein Mittel.

Anmerkung 1. Andere Mittel eine ganze Reihe solcher stetig proportionaler Linien zu bilden, giebt Lehrsatz 24. Folgerung 1, und Lehrsatz 25. Folgerung 3 an die Hand, und wer diese Construction interessant findet, wird sie ohne Schwierigkeit daraus entwickeln können. Die leichteste Methode verspare ich für das folgende Buch.

Anmerkung 2. *Um ein gegebnes Quadrat in ein Rechteck, oder in ein Dreyeck etc. über gegebner Grundlinie zu verwandeln*, muss man auf eine ähnliche Art, wie in Aufgabe 8, zur gegebnen Grundlinie und zur Seite des gegebnen Quadrats eine dritte Proportionallinie suchen. Dieses drückt z. B. *Tacquet* folgendermassen aus: *ad datam rectam AB, datae rectae M quadratum facile est applicare, inveniendo rectis AB, M tertiam proportionalem CD et rectangulum ABCD construendo. Est enim dato quadrato M2 aequale rectangulum, ad rectam AB applicatum**. Fig. 83. *Afg. 3. a. 1.

AUFGABE 13.

1) *Zwischen zwey gegebnen graden Linien P und Q eine mittlere Proportionallinie zu finden, und* Fig.

2) *zwischen einer graden Linie AB und einem gegebnen Abschnitt derselben AD, eine mittlere Proportionallinie darzustellen.*

1) Man trage die beyden gegebnen Linien auf eine willkührlich gezogne grade Linie nebeneinander, AD = P und DB = Q, beschreibe um die Summe beyder AB als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte auf AB im Punkte D ein Perpendikel. Durchschneidet dieses den Kreisbogen im Punkte E, *so ist DE die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn es verhält sich dann vermöge der Natur des Kreises AD : DE = DE :
*22.f.1α DB *.

2) Soll zu AB und dem Abschnitt AD dieser Linie, die mittlere Proportionallinie gefunden werden, so beschreibe man wiederum um die ganze Linie AB als Durchmesser einen Kreis, errichte in D das Perpendikel DE, und ziehe von Punkte E, wo dieses die Kreislinie durchschneidet, nach A eine Sehne AE, *so ist diese Sehne die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn vermöge der Natur des Kreises verhält sich dann AD : AE
*22.Z.1 = AE : AB *.

Oder man beschreibe um AB irgend einen beliebigen Kreisabschnitt, ziehe durch A *eine Tangente* an demselben, da mit durch D eine Parallellinie, und nach dem Punkte F, wo diese den Kreisbogen durchschneidet AF, so ist AF, die gesuchte mittlere Proportio-
*25.f.3. nallinie *.

Oder man beschreibe um den übrigen Theil DB der gegebnen Linie, als Sehne, oder Durchmesser, einen Kreis, und ziehe an dieſen vom Punkte A aus *eine Tangente AG*, ſo iſt AG die geſuchte mittlere Proportionallinie *. *22f.1 δ

Folgerung. Die mittlere Proportionallinie zwiſchen zwey Linien, kann nie gröſser ſeyn, als die Hälfte der Summe beyder Linien. Denn kein Perpendikel auf dem Durchmeſſer, das bis an die Kreislinie reicht, kann gröſser ſeyn als der Halbmeſſer. Und ſo folgt auch aus der Conſtruction, dieſer aus der Arithmetik bekannte Satz.

Bemerkung 1. Da zu den Zahlausdrücken zweyer Linien P, Q die mittlere Proportionalzahl $\sqrt{(P \times Q)}$ iſt *, ſo muſs dieſe auch der Zahlausdruck * V, 5. für die mittlere Proportionallinie M ſeyn. *Ein Ausdruck, wie* $\sqrt{(P \times Q)}$, *d. i. eine Quadratwurzel, läſst ſich* daher mittelſt des Verfahrens in dieſer Aufgabe in Lineargröſsen darſtellen, und folglich durch Verbindung derſelben mit den Verfahren der vorigen Aufgaben, jede *reine Quadratiſche Gleichung conſtruiren.* Was die *Conſtruction einer unreinen quadratiſchen Gleichung* betrifft, ſo verſpare ich ſie für die Bemerkungen am Ende der Planimetrie.

Bemerkung 2. Iſt M die mittlere Proportionallinie zwiſchen P und Q, ſo verhält ſich $P : M = M : Q$, und $P : Q = P^2 : M^2 = M^2 : Q^2$, wie wir ſchon in der vorigen Aufgabe bemerkt haben *. *Afg. 12 f. 2.

α) Sind vier Linien proportional, $A : B = C : D$, und man nimmt zwiſchen den erſten A, B und zwiſchen den letzten C, D mittlere Proportionallinien M, N, ſo ſind auch

diese mit den Vordergliedern, und eben so mit den Hintergliedern der gegebnen Proportion, proportional. Denn es verhält sich $A:B = A^2:M^2 = M^2:B^2$ und $C:D = C^2:N^2 = N^2:D^2$. Wenn also die vordern Verhältnisse gleich sind, so sind es auch die hintern, $A^2:M^2 =$
*4. f. 2. $C^2:N^2$, also auch $A:M = C:N$ *: oder $M:B = N:D$, oder $A:M = N:D$.

β) *Grade so sind in gleichen Verhältnissen $A:B = C:D$ die dritten Proportionallinien P, Q mit den Vordergliedern, und folglich auch mit den Hintergliedern proportional.* Denn es verhält sich $A^2:B^2 = A:P$ und
*Afg. 12 f. 2. $C^2:D^2 = C:Q$ *, mithin $A:P = C:Q$ und $A:C = B:D = P:Q$.

γ) Da *im Kreise* die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen einer verlängerten Sehne und der
*22. f. 1 δ Verlängerung ist, $AE:AG = AG:AF$ *, so *verhält sich immer $AE:AF = AE^2:AG^2$*: und auf diese Art lassen sich andere brauchbare Sätze mittelst dieser Bemerkung aus unsern Lehrsätzen ableiten.

Bemerkung 3. Sucht man erst zwischen zwey gegebnen Linien P, Q, die mittlere Proportionallinie M, und fährt dann fort zwischen P, M und zwischen M, Q mittlere Proportionallinien zu suchen, so erhält man zwischen P, Q, 2 + 1, d. i. *drey*, und fährt man mit diesen wieder eben so fort, 4 + 3, d. i. *sieben mittlere Proportionallinien* u. s. f. Aber *auf zwey, vier oder fünf mittlere Proportionallinien kömmt man durch diese Construction nicht.* Jene geben *Constructionen von Wurzeln des vierten, achten, sechzehnten Grades* u. s. f.

Dieſe würden Conſtructionen von Wurzeln des dritten, fünften Grads, u. ſ. f. an die Hand geben; allein zu ſolchen Conſtructionen reicht die Elementargeometrie nicht hin. Man leſe deshalb Lehrſatz 22 Zuſatz 4, Lehrſatz 24. Folgerung 2, und die Bemerkungen am Ende dieſes Werkes nach.

AUFGABE 14.

Eine gegebne gradelinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Dieſes geſchieht durch Auffindung *mittlerer Proportionallinien*, und alſo durch die Verfahren der vorigen Aufgabe, durch welche man jedesmal die Seite des geſuchten Quadrats, und zwar auf verſchiednen Wegen, finden kann.

α) Bey einem gegebnen *Rechteck* ABCD, ſuche zwiſchen den beyden anliegenden Seiten AB, BC die mittlere Proportionallinie M, ſo iſt $M^2 = AB \times BC$ *, folglich das geſuchte Quadrat. Fig. 84. *14. f. 3.

β) Bey einem gegebnen *Parallelogramm*, ſuche eben ſo zwiſchen der Grundlinie, g, und Höhe, h; — bey einem gegebnen *Dreyeck* zwiſchen der Grundlinie, g, und halben Höhe, $\frac{1}{2}h$; — und bey eine gegebnen *Trapezoid* zwiſchen der halben Summe beyder Grundlinien, $\frac{1}{2}(G+g)$, und der Höhe, h, die mittlere Proportionallinie M, ſo iſt dieſe die Seite des geſuchten Quadrats. Denn es iſt dann M^2 im erſten Fall gleich gh, im zweyten $\frac{1}{2}gh$, im dritten $\frac{1}{2}(G+g)h$,

und dieſes ſind die Zahlausdrücke für den Inhalt der
*5. u. 6. drey gegebnen Figuren *.

γ) *Andere unregelmäſsige Vielecke* verwandle man
*Afg. 1. erſt in ein groſses Dreyeck *, ſo laſſen auch ſie ſich nach β in ein Quadrat von gleichem Inhalt umbilden. Und dieſes iſt eine von den Conſtructionen, auf die wir uns in den Folgerungen zu Lehrſatz 20, und bey den fernern geometriſchen Oertern, oft bezogen haben.

Folgerung. *Iedes gradelinige Vieleck läſst ſich alſo im eigentlichen geometriſchen Sinn quadriren.*

Anmerkung. Der Ausdruck *eine Figur quadriren* oder *die Quadratur einer Figur* finden, läſst ſich im *geometriſchen* oder im *arithmetiſchen* Sinn nehmen. In *jenem*, welcher der eigentliche und urſprüngliche iſt, bedeutet er: ein *Quadrat geometriſch darſtellen*, *welches mit der Figur gleichen Inhalt hat*, und das können wir bey jedem gradelinigen Vieleck vermittelſt dieſer Conſtruction bewerkſtelligen. In *dieſem*, *dem arithmetiſchen Sinn*, bedeutet er: „*einen Zahlausdruck für den Inhalt der Figur*
*4. Z. *in Flächeneinheiten (Quadraten*) finden, wenn man den Zahlausdruck gewiſſer Linien, in ihr in Lineareinheiten kennt.*" Aus der geometriſchen Quadratur folgt daher leicht die arithmetiſche, nicht aber umgekehrt; denn das bilden eines Quadrats dem gefundnen Zahlausdruck gemäſs, darf man wohl kaum eine geometriſche Conſtruction nennen. — Man ſieht hieraus, was *die Quadratur des Kreiſes*, und *die Quadratur der Curven* ſagen will. — Die arithmetiſche Quadratur iſt im Grunde nichts anders als die *Berechnung der Figur*, d. h. die Beſtimmung des Zahlausdrucks für ihren Inhalt, aus dem Zahlausdruck der Seiten, und da dieſes für die Anwendung das eigentlich brauchbare und wichtige iſt, ſo pflegt man, mit ſeltnen Ausnahmen, dieſe Beſtimmung des Inhalts, oder die arithmetiſche Quadratur zu verſtehn, wenn man von Quadratur des Kreiſes oder der Curven ſpricht.

AUFGABE 15.

Ein Quadrat zu bilden, welches der Summe zweyer oder mehrerer gegebner Quadrate gleich iſt. Fig. 85.

α) Man beſchreibe einen rechten Winkel A, trage auf ſeine Schenkel die Seiten der beyden gegebnen Quadrate AB = M und AC = N auf, und ziehe BC, ſo iſt dieſe Linie die Seite des Quadrats, welches den beyden Quadraten über M und über N zuſammengenommen gleich iſt. Denn BAC iſt vermöge der Conſtruction ein rechtwinkliges Dreyeck, folglich dem Pythagoreiſchen Lehrſatz zu folge $BC^2 = AB^2 + AC^2 = M^2 + N^2$ *. * 12.

β) Soll das geſuchte Quadrat *den drey Quadraten* über M, N, P gleich ſeyn, ſo errichte man aufs neue im Punkte C auf AC ein Perpendikel, trage auf dieſes CD = P auf, und ziehe BD, ſo iſt $BD^2 = BC^2 + CD^2 = M^2 + N^2 + P^2$, alſo BD die Seite des geſuchten Quadrats.

γ) Grade ſo fährt man fort, wenn man ein Quadrat ſucht, welches vier, oder fünf oder mehreren gegebenen Quadraten zuſammengenommen gleich iſt, indem man Schrittweiſe die Seiten der Quadrate ſucht, welchem vier, fünf, ſechs u. ſ. f. der gegebnen Quadrate zuſammengenommen gleich ſind.

Zuſatz I. Auf dieſe Art laſſen ſich alſo auch Schrittweiſe *Seiten von Quadraten finden, welche den doppelten, dreyfachen, vierfachen Inhalt u. ſ. f. eines gegebnen Quadrats M^2 haben*, dergleichen die ſogenannte *Flächenſeite des Viſirſtaabs zum Meſſen cylindriſcher Gefäſse*, oder Fig. 86.

von Tonnen angiebt. Zu dem Ende trage man auf beyde Schenkel des rechten Winkels, AB und AB′ gleich M, d. i. gleich der Seite des gegebnen Quadrats auf; so wird BB′ die Seite des doppelten Quadrats, $2\,M^2$. Mit dieser schneide man von A aus, A2 = BB′ ab, so ist B2 die Seite des dreyfachen Quadratr $3\,M^2$. Schneidet man mit dieser wieder A3 = B2 ab, und zieht B3, so erhält man die Seite des vierfachen Quadrats $4\,M^2$, mit der man wieder A4 abschneide, u. s. f. Und so erhält man einen Maasstab AE, vermöge dessen man den Inhalt jedes gegebnen Quadrats sogleich, aus dessen Seite, mit dem Inhalt des bekannten Quadrats M^2, vergleichen kann. Man fasse die Seite mit dem Zirkel, und trage sie auf AE von A aus auf. Schneidet sie da z. B. die Länge A5 ab, so ist der Inhalt jenes Quadrats das Fünffache vom Inhalt des Bekannten. Kleinere Abtheilungen in Hälften, Viertel etc., lassen sich mittelst der folgenden Aufgabe finden.

Zusatz II. Wollte man ein Quadrat haben, welches das Zwanzigfache eines gegebnen ist, so suche man erst das doppelte Quadrat, aus diesem das Vierfache, und aus diesem sammt dem Gegebnen, das Fünffache. Aus den Fünffachen findet man das Zehnfache, und aus diesem das Zwanzigfache.

AUFGABE 16.

Fig. 87. *Ein Quadrat zu bilden, welches dem Unterschiede zweyer oder mehrerer gegebnen Quadrate gleich ist.*

α) Man beſchreibe wiederum einen rechten Winkel A, trage auf den einen Schenkel deſſelben die Seite des kleinern Quadrats N = AC auf, und beſchreibe mit der Seite des gröſsern M, als Halbmeſſer, um D als Mittelpunkt, einen Kreisbogen. Schneidet dieſer den andern Schenkel in B, ſo iſt AB die Seite des geſuchten Quadrats. Denn das ſo beſchriebne Dreyeck iſt rechtwinklig, und deshalb $AB^2 = BC^2 - AC^2 =$ * $M^2 - N^2$. *12. f. 1.

β) Soll das geſuchte Quadrat dem Unterſchiede zweyer Quadrate N^2 und P^2 von M^2 gleich ſeyn, ſo ſuche man wieder auf dieſelbe Art den Unterſchied von AB^2 und P^2 u. ſ. f., ſo daſs man alſo auf dieſe Art *beliebig viel Quadrate, von einem Gegebnen, welches gröſser iſt als alle zuſammmengenommen, abziehn kann.*

Zuſatz. Auf dieſelbe Art bildet *man ein rechtwinkliges Dreyeck, wenn die Hypotenuſe M und eine der Katheten N gegeben ſind;* welches ſich auch folgendermaaſsen bewerkſtelligen läſst: beſchreibe über die Hypotenuſe M einen Halbkreis, und um ihren Endpunkt, mit der gegebnen Kathete N einen Kreisbogen. Wo dieſer den Halbkreis durchſchneidet, da iſt die Spitze des geſuchten rechtwinkligen Dreyecks. Denn der Halbkreis iſt der Ort der Spitze *, und der angegebne Punkt der, welcher durch die gegebne Gröſse der Kathete beſtimmt wird. *II. 26. f. 2.

So kann man folglich *rechtwinklige Dreyecke beſchreiben, wovon die eine Kathete die Hälfte, oder das Drittel, oder das Viertel der Hypotenuſe iſt* etc.

Anmerkung. Da sich jedes Vieleck in ein Quadrat ver-
*Afg.14. wandeln läßt *, so findet man mittelst des Verfahrens in dieser und der vorigen Aufgabe ohne Schwierigkeit *ein Quadrat, welches die Summe oder dem Unterschiede gegebner gradeliniger Figuren gleich ist;* Constructionen, auf die wir uns im letzten Theil des dritten Buchs mehreremal bezogen haben.

AUFGABE 17.

Fig. 88. *Ein Quadrat zu beschreiben, zu welchem ein gegebnes Quadrat M^2, in dem Verhältnisse zweyer gegebnen Linien P, Q steht.*

Nimmt zwischen den gegebnen Linien P, Q die mittlere Proportionallinie V, so verhält sich P : Q =
*13.B.2. $P^2 : V^2$ *. Folglich stehn die Quadrate über P und V in demselben Verhältniß als das gegebne und das gesuchte Quadrat, weshalb auch ihre Seiten proportional
*4. f.3. sind *. Mithin ist die Seite des gesuchten Quadrats die vierte Proportionallinie zu P,V und AB.

Diese beyden Operationen lassen sich indeß ineinander ziehn, und auf solche geschickte Zusammenziehungen beruht die Eleganz geometrischer Auflösungen, wozu häufig, wie auch hier, geometrische Theoreme den Weg zeigen.

Trage z. B. auf eine beliebige Linie AD = P und AB = Q auf, beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in D ein Perpendickel, welches den Kreisbogen in F durchschneide, und ziehe AF, so verhält sich
*12.f.28 $AF^2 : AB^2 = AD : AB$ *. Trägt man daher auf AF von A aus, die Seite M des gegebnen Quadrats auf, AG = M, zieht FB, und damit parallel GH; so ist GH die Seite des gesuchten Quadrats. Denn wegen des

Parallelismus dieser Linien verhält sich AF : AB = AG : AH, d. h. = M : AH, mithin auch $M^2 : AH^2 = AF^2 : AB^2 =$ * P : Q. *4. f. 3.

Noch andre Constructionen lassen sich aus Lehrs 12. Folg. 2. δ, ε; und Lehrsatz 22, Zusatz 1. β, γ; und nicht minder elegante von ganz andrer Art, aus Lehrsatz 25. Folg. 3, Lehrsatz 20. Zusatz 5, und aus dem schönen Ort am Kreise in Lehrsatz 20. Zusatz 7 herleiten, welches ich dem Leser, dem dieses Vergnügen machen wird, selbst überlasse.

AUFGABE 18.

Eine gegebne grade Linie AB so zu verlängern, dass das Rechteck aus der verlängerten Linie AF, und der Verlängerung BF, dem Rechteck aus zwey gegebnen Linien P und Q gleich, oder $AF \times BF = P \times Q$ sey. Fig. 90.

Nimm zwischen P und Q die mittlere Proportionallinie M, so soll $AF \times BF = M^2$ seyn. Beschreibt man folglich über AB einen Halbkreis, so kömmt es darauf an, eine berührende Linie so zu ziehn, dass die verlängerte AB ein Stück von ihr, gleich M, abschneidet. Zu dem Ende ziehe durch B eine Tangente, mache BD = M, und schneide vom Mittelpunkte C aus, auf der verlängerten AB, CF = CD ab, so ist BF die gesuchte Verlängerung.

Denn zieht man CD, welche Linien den Kreis in E durchschneide, und EF, so decken sich die beyden Dreyecke CBD, CEF, daher EF auf dem Halbmesser CE in seinem Endpunkte senkrecht steht, also den Kreis berührt *, und überdem gleich BD, d. i. gleich M, folglich $M^2 = AF \times BF$* ist. * II. 12. * 22. 2.

Fig. 83. Zusatz. *Soll die gegebne grade Linie AB selbst so eingetheilt werden, dafs das Rechteck aus ihren beyden Stücken $AD \times BD$ dem gegebnen Rechteck $P \times Q$ gleich sey,* so beschreibe man wiederum über AB einen Halbkreis, ziehe mit AB eine Paralellinie, in einer Entfernung, gleich der mittlern Proportionallinie M, und fälle vom Durchschnittspunkt derselben mit der Kreislinie, ein Perpendikel auf dem Durchmesser, so theilt dieser die
* 22. 1. Linie AB* auf die verlangte Art ein; wobey aber erfordert wird, dafs M nicht gröfser als $\frac{1}{2}$ AB sey.

Anmerkung. Beyde Aufgaben werden auf diese Art durch eine leichtere Construction als in Aufg. 9, wo wir sie schon einmal, nur unter einer andern Form gehabt haben, aufgelöst.

AUFGABE 19.

Eine gegebne grade Linie BH, so in zwey Theile BF, FH einzutheilen, dafs das Quadrat des einen Theils, gleich sey dem Rechteck aus dem andern Theile und einer gegeben Linie P, oder $BF^2 = P \times FH$.

Nimm auf die Verlängerung von HB, BA gleich P, so soll $BF^2 = AB \times FH$, und folglich, wenn man beyderseits $AB \times BF$ hinzufügt, $AF \times FB = AB \times BH$ seyn. Nun aber sind AB, BH gegeben; folglich tritt hier der Fall der vorigen Aufgabe ein.

Beschreibe also über AH einen Halbkreis, so ist das Perpendikel BD die mittlere Proportionallinie zwi-
Afg.13. schen AB, BH, und beschreibt man um AB einen Halbkreis, welcher CD in E durchschneidet, und errichtet

richtet in E das Perpendikel EF auf diese Linie, so wird $EF^2 = AF \times FB$, und mithin ist F der gesuchte Punkt, der BH auf die verlangte Art eintheilt.

Anmerkung. Im Fall die gegebne Linie P, gleich der einzutheilenden BH ist, wird $BF^2 = BH \times FH$, oder das Quadrat des einen Theils ist dann gleich dem Rechteck aus dem andern Theil und der ganzen Linie; oder die beyden Theile und die ganze Linie bilden eine stetige Proportion. Von dieser *Eintheilung einer Linie nach stetigem Verhältniss*, werden wir im folgenden Buche einige interessante Eigenschaften und Anwendungen kennen lernen.

AUFGABE 20.

Eine grade Linie AB, in welcher ein Punkt E gegeben ist, aufs neue so in einem Punkte D einzutheilen, dass $AD^2 = ED \times DB$ sey. Fig. 91.

Vermöge dieser Fordrung muss der Punkt D so liegen, dass, wenn durch B und F ein Kreis beschrieben wird, die Tangente aus D nach der Kreislinie gezogen, gleich AD ist *. * 12. 2.

Man halbire daher EB im Punkte G, errichte in G ein Perpendikel, nehme GK gleich GA, und beschreibe um CKB einen Kreis *. Vom Punkte H, wo AK diese Kreislinie durchschneidet, fälle man auf AB ein Perpendikel HD, so theilt dieses die Linie AB auf die verlangte Art ein. * II. Afg. 12

Denn weil AEK vermöge der Construction ein rechtwinkliges, gleichschenkliches Dreyeck ist, sind die Winkel A, K der Hälfte eines rechten Winkels gleich *. Eben so gross sind mithin in den rechtwink- * I. 31. f. 2.

ligen Dreyecken ADH, KIH die Winkel bey H, folglich diese Dreyecke beyde gleichschenklig, AD = DH, und HI = IG, weshalb das Perpendikel HI im Mittelpunkte auf FG aufstehn, und ein Halbmesser
* II. 12. seyn muss. Daher ist HD eine Tangente *; folglich $DH^2 = AD^2 = DC \times DB$, folglich AB auf die verlangte Art eingetheilt. (Greg. I. 73.)

Diese und die beyden vorigen, so wie alle ähnlichen Aufgaben, lassen sich nach Anleitung des Zusatzes zu Aufgabe 9 noch auf ganz verschiedene Art ausdrücken, welche ich dem Leser überlasse.

AUFGABE 21.

Fig. 92. *Von einem gegebnen Punkte A ausserhalb eines Kreises eine grade Linie so zu ziehn, dass sie von der Kreislinie, zweyen gegebnen Linien P, Q proportional eingetheilt werde.*

Gesetzt es sey AEF die gesuchte Linie, so soll sich verhalten P : Q = AE : EF, folglich auch P : P + Q = AE : AF. Zieht man nun von A die Tangente
*II Afg 14. AG *, so ist AS die mittlere Proportionallinie zwischen
*22. f. 1δ AE und AE *. Man suche daher zwischen P und P + Q
*Afg. 12. die mittlere Proportionallinie M *, so muss sich verhalten P : M = AE : AG. Nun sind P, M und AG gegeben. Man suche daher zu M, P und AG die vierte Proportionallinie, und beschreibe mit ihr um A einen Kreisbogen. Wo dieser den gegebnen Kreis durchschneidet, da ist der Punkt E, durch den AE gezogen, die verlangte Linie giebt.

Denn verhält sich $AG : AE = M : P$, so ist auch $AG^2 : AE^2 = M^2 : P^2$. Und da AG und M mittlere Proportionallinien, erstere zwischen AF, AE, letztere zwischen $P + Q$ und P sind; sich mithin verhält $AF : AE = AG^2 : AE^2$, und $P + Q : P = M^2 : P^2$; so verhält sich auch $AF : AE = P + Q : P$ und $FE : AE = Q : P$.

Bestimmung. Geht ABD durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist AB die kleinste, AD die gröste von allen Linien, die von A aus nach dem Kreise gezogen werden können *, und daher hat von allen ähnlichen Verhältnissen, das der Abschnitte $AB : BD$ den grösten Exponenten *. Folglich darf $\frac{Q}{P}$ nicht grösser als $\frac{BD}{AB}$ seyn, sonst ist die Aufgabe unmöglich. (Greg. III. 46.)

* II. 15.

* V. 1. 2.

AUFGABE 22.

Das Verhältniss zwischen der Seite AB und der Diagonale AC eines Quadrats zu finden. Fig. 93.

Beschreibe um C mit der Seite BC als Halbmesser einen Kreis, so berührt die Seite AB diese Kreislinie, denn sie steht auf dem Endpunkte des Halbmessers CB senkrecht *. Daher verhält sich $AD : AB = AB : AE$, und AD ist derselbe Theil von AB, als AB von AE oder $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$ *. Nun aber ist AE gleich $2\,CD + AD$, folglich auch $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{2\,AB + AD} = \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}$ *. In dem

* II. 12.

* V. 1. 2.

* Afg 19. Z. 2.

letzten Ausdruck läſst ſich für $\frac{AD}{AB}$ dieſer Ausdruck ſelbſt wieder ſetzen, da denn $\frac{AD}{AB} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{AD}{AB}}}$ wird, und da ſich der Stuffenbruch, der ſo entſteht, immer wieder mit dem Bruch $\frac{AD}{AB}$ endigt, ſo kann man mit dieſer Subſtitution ohne Ende fortfahren, daher der Exponent $\frac{AD}{AB}$ durch einen Stufenbruch von der Form $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}$, der ohne Ende fortläuft, gegeben wird. Es läſst ſich alſo AD nicht in Theilen von AB ausdrücken, und beyde Linien ſind incommenſurabel *. Mithin auch die Diagonale und die Seite des Quadrats, da die Diagonale AC gleich AB + AD iſt, und alſo, wenn man die Seite AB als Einheit annimmt, der Zahlausdruck der Diagonale AC, $1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}$ wird; ein Ausdruck, deſſen Werth ſich nie genau in Zahlen darſtellen läſst, weil er ohne Ende fortgeht, und dem man ſich nur nähern kann, ohne ihn je völlig zu erreichen.

* Afg. 19

Anmerkung. Auf diesem Wege wird die Incommensurabilität zwischen der Diagonale und der Seite eines jeden Quadrats, die wir übrigens schon oben dargethan haben *, noch evidenter. Zugleich ist dieses ein unterrichtendes Beyspiel der leichtesten Methode, wie sich die Incommensurabilität von Ausdehnungen, in geometrischen Untersuchungen erweisen lässt.

* 12. Z.
