Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

I. Erklärungen (Definitionen).

Gendres eine beträchtliche Lücke ausgefüllt zu haben, von der auch kein andres ihm bekanntes System, selbst nicht das System Euklids völlig frey zu sprechen ist. In der systematischen Folge bey unserm Verfasser etwas Wesentliches zu ändern, und Materien ganz zu versetzen, hat der Uebersetzer sich übrigens fast nie erlaubt, so rathsam ihm dieses auch hin und wieder zur Vervollkommnung des Systems dünkte. Vielmehr hat er alle sein Bemühen darauf gewandt dieses Wissenschaftliche Gebäude, so wie es nun einmal da stand, besser zu stützen und zu gründen, und sich bestrebt ohne im Grossen viel umzubauen, (lediglich dadurch dass er manches ergänzte, einiges Untaugliche wegliess, und im Ausdruck und der Beweisart oft mehr umarbeitete als übersetzte) alles noch mehr in einander zu fügen, und abzurunden, womit man freylich bei eigner Begründung eines Systems ehr zu stande kommen kann, als bey einer fremden Arbeit, in der man manches nicht billigt. Zu allem was in Zeichen wie diesen [ ] eingeschlossen ist bekennt sich

der Uebersetzer.]

I. Erklärungen (Definitionen).

1.

Die *Geometrie* ist eine Wissenschaft, welche sich mit dem Messen des Ausgedehnten beschäftigt, und hierin besteht ihr eigenthümlicher Gegenstand. [Oder vielmehr, sie ist die Wissenschaft des Räumlichen; der Raum und alle Vorstellungsarten und Begriffe, die auf demselben beruhen, machen ihr eigenthümliches Gebieth aus, und ihr Geschäft besteht darin, die Eigenschaften, Beziehungen und Verhältnisse des Räumlichen durch allgemein gültige Schlüsse zu erforschen.

d. U.]

2.

Alles was ausgedehnt ist, hat *drey Dimensionen*, [und nicht mehr,] nemlich *Länge*, *Breite* und *Höhe* oder *Dicke*.

[Diese drey Dimensionen sollen sich nach der gewöhnlichen Behauptung von einem Körper nur durch *Abstraktion* absondern und für sich betrachten lassen. Allein die Abstraktion ist in der That weder der einzige noch der *an sich* erste und ursprüngliche Weg, wie wir zu der Vorstellung der drey Dimensionen des Ausgedehnten gelangen. Um uns einen Körper vorzustellen, müssen wir die Körperliche Gestalt erzeugen, den Körper beschreiben, und diese *Raumbeschreibung* ist ein zweyter Weg wie wir zu der Vorstellung der einzelnen Dimensionen gelangen, den aber die Geometer bey Aufstellung der Principien gewöhnlich übersehn. Und zwar geht auf diesem Wege die Vorstellung der einzelnen Dimensionen der Vorstellung des Körpers vorher, [indem wir bey der Raumbeschreibung vom Punkte anfangen, durch Fortbewegung desselben Linien erzeugen, durch Bewegung der Linien Flächen, und durch Bewegung der Flächen, Körper. Diese Unabhängigkeit und Priorität der Vorstellung des Punktes, der Linie und der Fläche scheint schon Euklid eingesehn zu haben, wie man aus der Stellung seiner Erklärungen urtheilen muss.

Das Vermögen der Raumbeschreibung muss der Geometer von jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, fordern, mithin auch die Vorstellungsarten, welche sie begründet, und die Begriffe die sich darauf unmittelbar beziehn. Solche Begriffe sind die der drey Dimensionen, und die Vorstellungen, welche die folgenden Erklärungen aussagen, über die eben deshalb der Geometer sich in keinen Beweis einläſst. d. U.]

3.

Die *Linie* ist eine Länge ohne Breite.

„Man erhält die Vorstellung derselben, sagt van Swinden, wenn man das Ausgedehnte lediglich in Rücksicht seiner Länge betrachtet, ohne auf dessen Breite und Dicke zu sehn, also von diesen beyden Dimensionen abstrahirt. Andre stellen sich die Linie *als durch den stetigen Fortgang eines Punkts erzeugt vor*, oder als die Spur eines fortbewegten Punktes." [Diese Vorstellungsarten sind beyde richtig, und man kann beyde Wege einschlagen, um zur Vorstellung der Linie zu gelangen, nur dass der letzte Weg, durch Raumbeschreibung, wie wir schon bemerket haben, an sich der erste und ursprüngliche ist. Er führt nicht nur zu einer ächt geometrischen, sondern selbst zu der ursprünglichen und fundamentalen Vorstellungs- und Erklärungsart der Linie, indess man auf dem erstern Wege (durch Abstraction) nur zu einer abgeleiteten Vorstellung der Linie gelangt. Wollen wir uns eine Linie vorstellen, so müssen wir sie ziehn, und das Vermögen dazu fordert der Geometer, daher die letzte Erklärung der Linie, die sich auf den eigentlichen Weg bezieht, wie wir zur Vorstellung der Linie gelangen, in der That die vorzüglichere und fruchtbarere ist, wenn gleich viele Geometer zu glauben scheinen, dass sie höchstens so mit unter laufen dürfe.

d. U.]

4.

Die Gränzen oder das Aeusserste einer Linie, das worin eine Linie sich endigt, nennt man *Punkte*. — Ein Punkt ist also nach keiner Dimension, folglich gar nicht ausgedehnt, und hat keine Theile.

[Der Anschein von Unbegreiflichkeit welchen der Punkt durch diese an sich richtige und fruchtbare Erklärung bekömmt, an den sich unter andern mehrere Scholastiker gestossen haben, fällt fort, sobald man sich den Punkt als einen *Ort* im Raume vorstellt. Ehr wir eine Linie ziehn können, müssen wir uns irgend einen Ort vorstellen, von welchem aus wir sie ziehn; folglich einen Punkt. Und endigen wir die Linie, so geschieht das wieder in irgend einem Punkte. Man sieht hieraus dass die Fähigkeit sich Punkte vorzustellen, so gut wie die, Linien zu ziehn, zu dem gehören müſſe, was der Geometer von ſeinem Lehrling fordert, bey ihm vorausſetzt.

Man *bezeichnet* gewöhnlich einzelne *Punkte* durch einzelne Buchſtaben, *Linien* durch die Buchſtaben ihrer Endpunkte, oder wenn dieſes zur Deutlichkeit nicht hinreicht, durch die Buchſtaben einiger Punkte in ihnen und der Endpunkte, und *Flächen* und *Körper* durch die Buchſtaben ihrer Eckpunkte, aller oder einiger.
Fig. 1. So ſpricht der Geometer von den Punkten A, C, D, von den Linien AB, AC, AEB, von der Fläche ACDB u. ſ. f. oft ſelbſt ohne ausdrücklich zu erinnern daſs dieſe Buchſtaben, Punkte, Linien, etc. bezeichnen, welches ſich dann von ſelbſt verſteht.

d. U.]

5.

Die *grade Linie* iſt der kürzeſte Weg von einem Punkt zum andern.

Eine Linie, welche keinen graden Theil hat, nennt man eine *krumme Linie* oder eine *Curve*.

Fig. 1. So z. B. iſt AB. eine *grade*, AEB eine *krumme*, dagegen ACDB weder eine grade, noch eine krumme, ſondern eine ſogenannte *gebrochne Linie*, weil ſie aus lauter graden Linien zuſammengeſetzt iſt.

[Die Eigenſchaft der graden Linie, daſs ſie von allen Linien zwiſchen zwey Punkten die *kürzeſte* iſt, hat zuerſt *Archimed* als Princip geometriſcher Beweiſe aufgeſtellt und gebraucht. Hr. Le
Gr. 6. Gendre vervollſtändigt im folgenden den darauf ſich gründenden Begriff der graden Linie dahin, daſs zwiſchen zwey Punkten nur eine einzige grade Linie möglich iſt, und ſucht auf dieſen Begriff das Syſtem der Geometrie vorzüglich zu gründen. Die Einwendung, welche einige (unter ander *van Swinden*) gegen die Archimedeiſche Erklärung machen, als ſetze ſie den Satz voraus, daſs zwey Seiten im Dreyeck ſtets gröſser als die dritte ſind, iſt nichtig. Das würde nur der Fall ſeyn, wann es darauf

ankäme diese Definition zu beweisen, welches aber jemand, der sie unter den Principien aufstellt, nicht Willens seyn kann.

Die Erklärung welche *Euklid* von der graden Linie giebt, und die nach der gewöhnlichen Uebersetzung so lautet: „eine Linie die den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt" ist so dunkel, daſs unser Verfaſſer sie als nichtssagend und ohne Bedeutung gänzlich aufgiebt. Verständlicher wird sie, wenn man sie mit van Swinden folgendermaſsen ausdrückt: „eine *grade Linie* ist die, welche überall auf einerley Art oder gleichförmig (gelyklyk) zwischen ihren Punkten liegt, indeſs die *krumme Linie* zwischen ihren Punkten ungleichförmig liegt;" oder mit Simpson; „eine Linie welche überall gleichmäſig (evenly) zwischen ihren Endpunkten liegt, oder welche überall einerley Richtung hat (which every where tends the same way)." Durch einige Erörterungen lieſse sich das Dunkel wohl noch vermindern, das auf diesen Erklärungen ruht, und welches der holländische Geometer der Einfachheit des Begriffs der graden Linie zuschreibt. Eine grade Linie ziehn zu können, ist eine Forderung welche der Geometer an jeden thut, der sich mit seiner Wiſſenschaft beschäftigen will. Er setzt also voraus, daſs jedermann im Besitz des dazu nöthigen Verfahrens ist, mithin auch der Vorstellung, die sich darauf gründet, und es kömmt ihm nur darauf an, *ein fruchtbares Merkmal heraus zu heben*, wodurch sich diese Vorstellung von allen ähnlichen unterscheidet. Ein solches Merkmal ist allerdings das, welches unser Verfaſſer nach Archimeds Vorbild in seiner Erklärung der graden Linie aufstellt. Nur daſs dieses Merkmal nicht so unmittelbar in dem ursprünglichen Verfahren beym Ziehn einer graden Linie zu liegen scheint, daſs man sich nicht nach einem Beweise deſſelben sehnen sollte, welcher darthäte, daſs jenes Merkmal in diesem ursprünglichen Verfahren gegründet ist, und wie es daraus folgt. Unmittelbar aus diesem Verfahren ist das zuletzt von Simpson angeführte Merkmal geschöpft, *Einerleyheit der Richtung im Ziehn der graden Linie*, und zunächst hierauf scheint sich Euklids Definition zu beziehn, welcher der Uebersetzer deshalb den Vorzug geben würde, lieſse sie sich nur eben so klar, faſslich und fruchtbar als jene Archimedeische machen. Das haben aber die Geometer bisher noch nicht geleistet, und wir müssen daher Hr. Le Gendre loben, dass er die Archimedeische Erklärung der graden Linie zum Grunde legt' aus welcher er manche Sätze leichter und kürzer beweist, als es bisher geschehn ist, gründet sich gleich nicht darauf, wie er sagt, einzig und allein sein ganzes System. d. U.]

6.

Eine *Fläche* ist etwas das Länge und Breite, aber keine Höhe oder Dicke hat; oder, nach van Swinden „eine Ausdehnung, in der man sich lediglich Länge und Breite vorstellt, von der dritten Dimension, der Dicke, aber ganz abstrahirt."

Die *Gränzen*, das Aeusserste *der Fläche*, das worin die Fläche sich endigt, sind *Linien*, entweder grade oder krumme.

„Man sieht auch wohl, bemerkt van Swinden, die Fläche als durch stetige Fortbewegung einer Linie erzeugt, oder als Spur einer sich bewegenden Linie an;" und dieses ist wiederum nicht nur eine ächt geometrische, sondern auch die ursprüngliche und fundamentale Vorstellung der Ebene, von der dasselbe gilt, was wir bey der analogen Vorstellungsart der Linie bemerkt haben *

* E. 3. d. U.

7.

Eine *Ebene* ist eine Fläche, welche in allen ihren Theilen vollkommen eben ist, d. h. in welcher jede grade Linie, die durch irgend zwey in der Fläche befindliche Punkte gezogen wird, ganz hineinfällt.

[Kein Theil einer solchen Linie fällt ausserhalb der unbegränzten Ebne. Dieses drückt Simpson auf ein uneigentliche, nicht zu billigende Art so aus: die Linie *berühre* die Ebene in allen

ihren Theilen; ein Ausdruck der keine Nachahmung verdient, obgleich er von mehreren Mathematikern in einem ähnlichen Sinn gebraucht worden ist. Euklid und mit ihm van Swinden erklären die Ebne durch „eine Fläche, welche überall gleichförmig zwischen ihren Gränzen und zwischen den auf ihr befindlichen Linien liegt." Auch hiervon gilt, was wir oben * bemerkt haben. * E. 5.
d. U.

8.

Flächen, worin kein Theil eben ist, sind *krumme Flächen.*

9.

Ein *Körper* ist nach allen drey Dimensionen ausgedehnt, [und jede Ausdehnung, welche Länge, Breite und Dicke (oder Höhe hat, ist ein *Körper*, ein *körperlicher Raum*.

Die *Gränzen*, das Aeusserste *eines Körpers*, das worin der Körper sich endigt, sind *Flächen*, entweder ebene oder krumme.]

Der körperliche Raum wird beschrieben, und ein Körper erzeugt durch stetige Fortbewegung einer Fläche, so dass man sich den Körper als die Spur einer bewegten Fläche vorstellen kann. Und dieses ist wiederum die ursprüngliche Vorstellungsart des Körpers. * * E. 2.

Eine Ausdehnung von mehr Dimensionen als im Körper vereinigt sind, giebt es nicht. d. U.

10.

[Eine *grade Linie* wird durch jeden Punkt *in* ihr (d. h. der zwischen ihren Endpunkten liegt) in zwey Stücke getheilt, welche *zu den entgegengesetzten Seiten* jenes Punktes liegen und in Rücksicht desselben eine

Fig. 2. *entgegengesetzte Lage* haben, z. B. AB durch den Punkt C in die Stücke AC, CB, welche zu den entgegengesezten Seiten des Punktes C liegen, und die grade Linie DE durch denselben Punkt in die entgegengesetzt liegenden Stücke DC, CE.

Grade so wird eine *Ebne* durch jede grade Linie *in* ihr in zwey Theile getheilt, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Linie liegen, und ein *Körper* durch jede Ebne in demselben in zwey Theile, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Ebne liegen.]

II.

[Zwey Linien, welche einen Punkt gemein haben, *treffen einander*, und *stoßen in diesem Punkte zu-*
Fig. 3. *sammen*, z. B. CA, BA. Genugsam verlängert schneiden oder berühren sie sich. — Sie *schneiden einander*,
Fig. 2. wenn der einen Linie AB Theile, AC, CB, welche zu entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Punktes C liegen, zugleich auch zu den entgegengesetzten Seiten der andern Linie DE liegen. — Lägen sie auf einerley Seite der Linie DE, so würden beyde Linien sich *berühren*, wie MN und AEB in Fig. 1.

Eine ähnliche Bewandniss hat es mit dem Zusammentreffen, Schneiden und Berühren zweyer Flächen, oder einer graden Linie und einer Fläche.]

Die unter 10. und 11. aufgestellten Erklärungen fehlen fast in allen geometrischen Systemen, auch bey Le Gendre, und sind als die unentbehrlichsten unter vielen andern mangelnden von mir eingeschoben worden. d. U.

12.

Wenn zwey grade Linien AB, AC (oder EF, ED) Fig. 3.
einander treffen, so nennt man die Grösse um welche sie von einander entfernt sind einen *Winkel.* Die beyden Linien AB, AC selbst, heissen die *Schenkel des Winkels*, der Punkt A in welchem sie zusammenstossen oder einander schneiden, die *Spitze* oder der *Scheitel des Winkels.* — Man bezeichnet einen Winkel entweder allein durch den Buchstaben seines Scheitelpunkts, z. B. ∠A, ∠E, oder, wo das zu Zweydeutigkeiten Anlass gäbe, setzt man zu beyden Seiten dieses Buchstabens noch Buchstaben zweyer Punkte in beyden Schenkeln hinzu, z. B. ∠BAC, ∠DEF, doch so dass der Buchstabe am Scheitel immer in der Mitte stehet. Auch bezeichnet man einen Winkel durch einen Buchstaben, der zwischen seinen Schenkeln hinein geschrieben wird, z. B. ∠α.

[Da man gewöhnt ist Entfernungen durch Linien zu bestimmen, und bey Entfernungen an Linien zu denken, so muss man sich durch Le Gendres Erklärung zu keinem falschen Begriff vom Winkel verführen lassen. Ein Winkel, oder bestimmter, ein *ebner Winkel*, wie man ihn zum Unterschiede von Flächenwinkeln und körperlichen Winkeln nennt, ist keine Ausdehnung, weder eine Linie, noch eine Fläche (wofür ihn wohl einige durch Missverstand genommen haben,) sondern *die gegenseitige Lage zweyer sich durchschneidender grader Linien*, oder wie man gewöhnlich sagt, die *Neigung* zweyer solcher Linien; wiewohl dieser letztere Ausdruck auf rechte, stumpfe und hineingehende Winkel nicht recht zu passen scheint.

α, Die *Grösse eines Winkels* hängt daher lediglich von der Grösse in der Neigung oder vielmehr in der Lage, der beyden Schenkel ab, worauf die Länge dieser Linien keinen Einfluſs hat.

β, Die *Gleichheit* oder *Ungleichheit zweyer Winkel* kann man unmittelbar danach beurtheilen, ob sie einander decken oder nicht. Wenn man sich vorstellt der Scheitel und zwey der Schenkel beyder Winkel würden auf einander gelegt; so fallen die beyden andern Schenkel entweder auch auf einander, oder nicht. Im erstern Fall *decken sich beyde Winkel* und
* Gr. 9. *sind gleich.* * Im zweyten Fall decken sie einander nicht, und *sind* deshalb *ungleich.* Und zwar ist *der Winkel der gröſsere*, dessen Schenkel die Schenkel des andern einschliessen, wie z. B. ∠DEF gröſser ist als ∠GEF. Der einschlieſsende Winkel DEF ist um den Winkel DEG gröſser als der eingeschloſsne GEF, und diesen beyden eingeschloſsnen Winkeln zusammengenommen gleich.

γ, Ueberhaupt ist *jeder einschlieſsende Winkel* ACE, als Gan-
Fig. 4. zes, *allen von ihm eingeschloſsnen um* seine Spitze C aneinander liegenden *Winkeln ACB*, BCD, *DCE* aus seinen Thei-
* Gr. 5. len *zusammengenommen gleich.* * d. U.

13.

Fig. 2. [Wenn eine grade Linie AB, von einer andern DE in einem Punkte z. B. in C durchschnitten wird, so bildet ein abgeschnittnes Stück der einen Linie, z. B. CE mit den entgegengesetzt liegenden Stücken CA,
* E. 2. CB der andern graden Linie * zwey Winkel ACE, ECB, welche man *Nebenwinkel* nennt.

Nebenwinkel sind also solche Winkel, deren Scheitel C und *einer* der Schenkel CE zusammenfallen, indeſs die beyden andern Schenkel AC, CB *in grader Linie* liegen. d. U.

14.

Steht eine grade Linie GH auf eine andre EF so auf, daſs die beyden Nebenwinkel, welche sie mit EF bildet gleich sind, so wird jeder dieser beyden gleichen Nebenwinkel HGE, HGF ein *rechter Winkel* genannt. Die Linie GH steht dann auf EF im Punkte G *senkrecht*; ist *ein Perpendikel* auf EF im Punkte G. Fig. 15.

Ein *rechter Winkel* ist also *einer* von zwey gleichen Nebenwinkeln, und eine *senkrechte Linie* eine grade Linie, welche auf eine andre unter rechten Winkeln aufsteht.

Winkel kleiner als ein rechter, z. B. BAC, nennt man *spitze*, Winkel gröſser als ein rechter, z. B. DEF, *stumpfe Winkel.* Fig. 3.

[Im ersten Lehrsatze wird dargethan werden, daſs alle rechte Winkel einander gleich sind. Wegen der Winkel welche gröſser als zwey rechte Winkel zusammengenommen sind, und die man mit unserm Verfasser *hineingehende Winkel* (angles rentrants) oder mit andern *erhabene Winkel* im Gegensatz der *hohlen Winkel* nennen kann, vergleiche man die Anm. zu Erkl. 16.]

[Alle bis hierher aufgestellten Erklärungen, (höchstens die letzte ausgenommen) *gehören zu den wahren Principien der Geometrie*, da sie Vorstellungsarten betreffen, welche unmittelbar aus der Raumbeschreibung geschöpft sind, und die daher der Geometer grade so, wie wir sie in diesen Erklärungen aussagen, bey jedem, der Geometrie treiben will, voraussetzt und fordert.* *E. 2. Die *folgenden Erklärungen* stellen dagegen Begriffe auf, *deren Gültigkeit erst zu beweisen ist.* Denn sie sind nicht wie jene unmittelbar aus der ursprünglichen Vorstellungsart des Ausgedehnten,

aus der Raumbeschreibung, geschöpft, die der Geometer postulirt, sondern verbinden Merkmale mit einander, von denen es die Frage ist, ob sie sich auch mit einander verbinden lassen, und ob sie nicht in dieser Verbindung einander, oder jener ursprünglichen Vorstellungsart widersprechen. Sie gehören zu den abgeleiteten Vorstellungen, deren Möglichkeit und Gültigkeit erst dann gegen Einsprüche gesichert ist, wenn man sie auf die ursprünglichen Vorstellungsarten zurückgeführt oder daraus abgeleitet, d. h. aus den wahren Principien bewiesen hat. Sie stehn daher hier in der That an ihrer unrechten Stelle, und würden schicklicher im Fortgang des Systems, da, wo man die Möglichkeit der Gegenstände, die sie erklären darthut, aufgestellt werden, wie dieses unser
E. 19. Verfasser selbst bemerkt. * Man hat sie daher hier für *blosse Wort-Erklärungen* zu nehmen, die insgesammt nichts anders aussagen, als: „gesetzt ein solcher Gegenstand als z. B. Parallellinien, Dreyecke u. s. w) sey möglich, so will man ihn mit dem angegebnen Namen bezeichnen.“ Dagegen gehören die *Kreisbeschreibung* und die darauf sich beziehenden *Erklärungen des zweyten Buchs* zu den ursprünglichen Vorstellungsarten des Ausgedehnten, die der Geometer von jedem fordert, also zu den wahren Principien der Geometrie, und sollten deshalb hier als an ihrem eigentlichen Platze stehn, von welchem sie unser Verfasser nicht ohne Nachtheil für das System fortgehoben hat.

d. U.]

15.

Wenn zwey grade Linien in einer Ebne so liegen, dass sie nie zusammenstossen, so weit man sie auch
Fig. 31 verlängert, so sind sie *gleichlaufend* oder *parallel.*

Diese Erklärung der Parallellinien stimmt mit der Euklids überein, gegen die van Swinden, wie uns dünkt mit Unrecht, den Zweifel erhebt, ob wohl darin die Begriffe vom Verlängern ohne Ende und vom Nie zusammentreffen, deutlich genug für ein Princip sind. Die Frage, welche von den mancherley

Erklärungen, auf die man die Sätze über parallele Linien zu gründen gesucht hat, den Vorzug verdiene, gehört, so wie die ganze Erklärung, nicht hierher, sondern zur Theorie der Parallellinien. Man findet einiges darüber in den Anmerkungen am Ende dieses Werks. d. U.

16.

[Jeder völlig begränzte Raum wird eine *Figur* genannt; doch bezeichnet man mit diesem Namen vorzugsweise begränzte Flächenräume, selbst solche, welche nur zum Theil, nicht ganz, begränzt sind.]

Eine Ebne, welche nach allen Seiten zu begränzt ist, bildet eine *ebne Figur*, und zwar, wenn sie nichts als grade Linien zu Gränzen hat, eine *gradelinige Figur*, die man auch vorzugsweise eine *vielseitige Figur*, oder ein *Vieleck* (*Polygon*) nennt, [wiewohl dieser Name manchmal ausschliesslich gradelinige Figuren von mehr als vier Seiten bezeichnet.]

Jede Gränzlinie macht eine *Seite*, alle zusammen den *Umfang der Figur* (die *Peripherie des Vielecks*), und der Flächenraum den sie rings um gränzen, *den Inhalt* oder den *Flächenraum der Figur* aus.

[Eine *Diagonale* ist eine grade Linie, die quer durch die Figur von einem Winkelpunkt zum andern geht. So z. B. stellt Fig. 5 eine ebne gradelinige Figur vor, AB, BC, CD u. f. sind ihre Seiten, die zusammengenommen ihren Umfang ausmachen, AC eine Diagonale, A, B, C, etc. die Winkelpunkte oder Ecken der Figur.]

Anmerkung. Um Verwirrung zu verhindern betrachtet man in der Geometrie nur *Vielecke*, welche lauter *hohle*, *heraus-*

gehende Winkel (angles saillants) und keine *erhabne* oder *hineingehende Winkel* (angles rentrants) enthalten, obgleich auch die letztern Winkel zur Bestimmung der Lage zweyer sich durchschneidender Linien geschickt sind, und in Figuren vorkom-
* F. 6. men können. Ein Vieleck mit lauter herausgehenden Winkeln
* F. 5, 7. ist gänzlich *convex*, nirgends *hohl*. Es kann von einer graden Linie nur in zwey, nicht in mehr Punkten, geschnitten werden, welches bey Vielecken mit hineingehenden Winkeln nicht der Fall ist. (Ueberdem fällt jede Verlängerung der Seiten eines *convexen Vielecks* ganz außer der Figur, durchschneidet diese nirgends weiter, indeß die Schenke eines hineingehenden Winkels, wenn sie über ihren Scheitelpunkt hinaus verlängert werden den Umfang der Figur nochmals durchschneiden. Beyde Eigenschaften kann man zu Erklärungen des convexen Vielecks nutzen. Viele Sätze gelten blos für die convexen Vielecke, würden also, schlösse man die Vielecke mit hineingehenden Winkeln nicht ganz aus, unrichtig seyn, wenigstens besondre Modificationen heischen, und dadurch zu sehr überladen werden.]

In den vier ersten Büchern dieser Elemente haben wir es allein mit ebnen Figuren, und überhaupt nur mit Ausdehnungen die in einerley Ebne gedacht werden, zu thun. [Sie bilden den ersten Haupttheil der Geometrie, *die Planimetrie*, deren Name darauf hindeutet.]

17.

Das dreyseitige Vieleck, (diejenige von allen Fi-
Gr.6.f.4 guren, welche die geringste Zahl von Seiten hat wird ein *Dreyeck*, das vierseitige ein *Vierek*, das fünfseitige ein *Fünfeck*, das sechsseitige ein *Sechseck* u. s. f. genannt, [indem in jeder gradelinigen Figur die Menge der Winkel (Ecken) mit der Zahl der Seiten übereinstimmt.]

Von

Von den Seiten dieser Vielecke, welche als Schenkel zu einem Winkel gehören, sagt man dass sie den Winkel *einschliessen*, ihn *umspannen*; von den Winkeln selbst, dass sie an diesen Seiten *anliegen*. Im Dreyeck, wo an jeder Seite zwey Winkel anliegen, sagt man vom dritten nicht anliegenden Winkel dass er und die Seite *einander gegenüber stehn*.

So z. B. stehn im Dreyeck ABC die Seite AB und der Winkel C, ferner BC und A, und AC und B *einander gegenüber*. Die Seiten AB, AC *schliessen den Winkel* A *ein*, und A und B sind die an der Seite AB *anliegenden Winkel*.] Fig. 8.

18.

Ein *Dreyeck* ist *gleichseitig*, wenn es lauter gleiche Seiten hat, *gleichschenklig* (isoscele) wenn es zwey gleiche Seiten, *ungleichseitig* (scalene) wenn es lauter ungleiche Seiten hat. Fig. 8. Fig. 25. Fig. 26.

Ein *rechtwinkliges Dreyeck* hat einen rechten Winkel. Die Seite desselben, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, nennt man die *Hypotenuse*, [die beyden an dem rechten Winkel anliegenden Seiten, welche die Schenkel des rechten Winkels ausmachen, die *Katheten* des rechtwinkligen Dreyecks.] So z. B. ist DEF ein bey E rechtwinkliges Dreyeck, DF dessen Hypotenuse, und ED, EF sind dessen Katheten. Fig. 30.

Ein Dreyeck worin ein stumpfer Winkel vorkömmt, ist *stumpfwinklig*. Enthält das Dreyeck nichts als spitze Winkel, so ist es *spitzwinklig*. Fig. 22. Fig. 20.

Man pflegt irgend eine Seite des Dreyecks als *Grundlinie*, und den ihr gegenüberstehenden (nicht in ihr liegenden) Winkelpunkt, als *Spitze des Dreyecks* anzusehn. Welche! das ist gleichgültig. Nur nimmt man im gleichschenkligen Dreyeck mehrentheils die ungleiche Seite für die Grundlinie.

19.

Unter den *Vierecken* sind folgende zu bemerken:

Fig. 9. Das *Quadrat*, welches lauter gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat;

Fig. 11. Der *Rhombus* (losange, die *Raute*) dessen Seiten gleich, dessen Winkel aber keine rechte sind;

Fig. 10. Das *Rechteck*, dessen Winkel insgesammt rechte, dessen Seiten aber nicht gleich sind;

Das *Parallelogramm*, dessen gegenüberstehende Seiten parallel laufen [und das, wenn es weder gleiche Seiten noch rechte Winkel hat, ein *Rhomboides* genannt wird.] Fig. 12.

Das *Trapezoid*, welches zwey gleichlaufende und zwey nicht parallele Seiten hat; und das *Trapezium*, mit welchem Namen man alle Vierecke mit ungleichen Seiten, wovon kein Paar parallell läuft, belegt; ein Sprachgebrauch von dem unser Verfasser zwar abweicht, indem er das Trapezoid ein Trapezium nennt, und für dieses kein Kunstwort aufstellt, den ich aber der Bequemlichkeit halber beybehalte. Fig. 13.

Anmerkung. *Le Gendre* bemerkt hierbey, daſs man in den Erklärungen des Quadrats und des Rechtecks statt vier *rechte* eigentlich vier *gleiche Winkel* setzen sollte. Denn, sagt er, dass die Winkel eines Vierecks insgesammt rechte seyn können, und daſs alle rechte Winkel gleich sind, ist etwas, daſs man nicht voraussetzen, sondern beweisen müſste. Diesen und ähnlichen Miſsstand würde man vermeiden, wenn man die Erklärungen, nicht, wie es gewöhnlich ist, [und wozu Euklid vielleicht nur durch die unbehülfliche Form der damaligen Bücher veranlaſst wurde,] an die Spitze jedes Buchs, sondern unter die andern Sätze, wo das, was sie voraussetzen, schon dargethan ist, stellte.

Auch schlägt unser Verfasser noch vor, die gar zu langen Kunstwörter *Parallelogramm*, und *Parallelepipedum*, die ihrer Etymologie nach ohnedem jede Figur mit parallelen gegenüberstehende Seiten oderSeitenflächen, ihre Zahl sey welche sie wolle' bezeichnen, mit anderen zu verwechseln, wozu er *Rhombus* und *Rhomboides* für schicklich hält. Aber dieser Vorschlag kann wohl nicht ernstlich gemeint seyn, denn zu was für einer Verwirrung würde das nicht führen, da diese letztern Kunstwörter schon eine ganz andre Bedeutung haben. d. U.

20.

α, *Ein Vieleck* ist *gleichseitig*, wenn es lauter gleiche Seiten, *gleichwinklig*, wenn es lauter gleiche Winkel hat.

β, *Zwey Vielecke* sind dagegen *untereinander gleichseitig* (équilatéraux entre eux), wenn die Seiten des einen, den Seiten des andern, in derselben Folge gleich sind; d. h. so, daſs wenn man in beyden Vielecken die Seiten von zwey die einander gleich sind an, der Ordnung nach zählt, in beyden auch die zweyten, die dritten, die vierten Seiten u. s. w. gleich sind. — Grade so sind *zwey Vielecke unter sich gleichwinklig*, wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern in derselben Folge gleich sind. [Diese abkürzenden Kunstwörter sind zwar bey uns ungewöhnlich, dem Geist unsrer Sprache aber nicht entgegen, daher ich glaubte sie beybehalten zu dürfen.]

γ, Bey zwey Vielecken vo dieser Beschaffenheit werden nicht nur im ersten Fall die gleichen Seiten, sondern auch die von gleichen Seiten eingeschlossnen Winkel, und im zweyten Fall nicht nur die gleichen Winkel, sondern auch die an gleichen Winkeln in beyden anliegenden Seiten, *ähnlichliegende*, *gleichnamige* oder *homologe Stücke* genannt.

21.

[Wenn alle Punkte in einer Linie einer oder mehreren gegebnen Bedingungen entsprechen, (und zwar nur die Punkte in ihr, kein Punkt ausser ihr,) so nennt man diese Linie in so fern den *geometrischen Ort* für diese *Bedingungen*, oder für die *Aufgabe* in welcher diese Bedingunge vorkommenn; auch wohl den *geometrischen Ort des Punktes*, der den Bedingungen oder der Aufgabe entspricht. So z. B. ist die Kreislinie, ihrem
*II.E.1. Begriff gemäss, * der geometrische Ort eines Punkts,
Fig. 45. der von einem gegebnen Punkt C um die gegebne grade Linie CA absteht, oder der geometrische Ort für die Aufgabe, welche nach einem solchen Punkte frägt. Denn jeder Punkt in ihr ist der gesuchte Punkt, und kein Punkt ausser ihr thut der aufgestellten Bedingung genüge. Man sieht hieraus leicht in wie fern auch eine Fläche oder ein Körper ein geometrischer Ort seyn kann. Nemlich nur in so fern alle Punkte in ihnen, und kein Punkt ausser ihnen, gegebnen Bedingungen entsprechen.

Die *grade Linie* und der Kreiſs werden ausſchlieſsungsweiſe *ebne Oerter* genannt.

Ueber dieſe ebnen Oerter hatte einer der vorzüglichſten Geometer des Alterthums *Apollonius* von Pergä ein beſondres Werk geſchrieben, wovon aber nur einzelne Sätze auf uns gekommen ſind. Aus dieſen hat ein Schottiſcher Mathematiker *Robert Simſon* (der mit unſerm *Thomas Simpſon* nicht zu verwechſeln iſt) die Schrift des Griechen wieder hergeſtellt. Die deutſche Ueberſetzung dieſer Wiederherſtellung durch Hrn. *Camerer* (Leipzig 1796.) iſt gemeint, ſo oft ich Apollonius ebne Oerter erwähne. Daſs ich aber dieſe Begriffe mit in die Elemente einwebe, wird man bey einer kleinen Ueberlegung nicht miſsbilligen, obgleich ich ſie in keinem der Lehrbücher, die mir vor Augen liegen, mit aufgenommen finde. d. U.

22.

Erklärung der abkürzenden arithmetiſchen Zeichen, die im folgenden gebraucht werden.

Das Zeichen der Gleichheit iſt = daher A = B bedeutet, daſs die Gröſse A der Gröſse B gleich iſt.

Durch das Zeichen A < B zeigt man an, daſs A kleiner als B, durch A > B, daſs A gröſser als B iſt.

Das Additions- oder Summenzeichen iſt +

Das Subtractions- oder Differenzzeichen —. So z. B. bedeutet A + B — C daſs man A und B zuſammennehmen, und von dieſer Summe C abziehn ſoll.

Ein bloſser Punkt . oder ein × iſt das Multiplications- oder Produktenzeichen. So z. B. bedeutet A + B).(A — C) das Produkt aus der eingeklammerten Summe und Differenz, und AB × BC das Produkt aus den beyden Linien AB, BC. [Was dies aber ſagen will, und in wiefern dieſes letztre Zeichen den Inhalt des Rechtecks aus den beyden Linien AB, BC bedeutet, wird im dritten Buche auseinander gesetzt werden.] Zahlen als Multiplicatoren setzt man häufig vor andern Zeichen ohne Zwischenzeichen. So z. B. beteutet 3AB dass man die Linie AB dreimal nehmen soll, und $\frac{1}{2}$ AB oder $\frac{AB}{2}$, dass man die Hälfte dieser Linie setzen muss.

[Ein Produkt von lauter gleichen Faktoren, heisst eine *Potenz*; die Anzahl der gleichen Faktoren giebt den *Grad* der Potenz. Das Zeichen a^2 bedeutet die zweyte Potenz oder die Quadratzahl von a; a^3 die dritte Potenz, oder die Kubikzahl von a, u. f. Auf dieselbe Art bedeutet $\overline{AB}^2$ das Produkt aus zwey gleichen Linien, nemlich $AB \times AB$ oder die zweyte Potenz der Linie AB; $\overline{AB}^3$ das Produkt aus drey gleichen Linien $AB \times AB \times AB$ oder die dritte Potenz von AB u. f. f.

Was dieses aber für einen Sinn hat, und in wiefern $\overline{AB}^2$ den Inhalt des Quadrats und $\overline{AB}^3$ den Inhalt des Kubus über die Linien AB bedeutet, das werden wir in der Folge sehn.

Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet eine Quadratwurzel; $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2, [d. h. die Zahl die mit sich selbst multiplicirt 2 zum Produkt giebt.] Eben so ist $\sqrt{A.B}$ die Quadratwurzel aus dem Produkte A.B oder die mittlere Proportionalzahl zwischen A und B [und $\sqrt[3]{A}$ die Kubikwurzel aus A, das heisst eine Grösse wovon drey in einander multiplicirt, zum Produkt A geben.]

[Das Zeichen $\angle$, einem oder mehreren Buchstaben vorgesetzt, bedeutet einen Winkel; ein einzelnes R einen rechten Winkel.]

23.

[Erinnerung an die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen.

Der Uebersetzer schaltet diese Sätze welche Le Gendre als bekannt aus der Arithmetik voraussetzt, hier ein, um das Studium dieses Werks so viel, wie möglich, zu erleichtern, und wird in der Folge stets durch das Marginal V. auf sie verwiesen Sollte ein Leser, bey der Kürze, womit sie abgeleitet werden anstoſsen, so verspare er diese Erinnerung bis zu den letzten Sätzen des zweyten Buchs, wo zuerst von Verhältnissen gehandelt wird, und wo man durch den Gebranch derselben und durch das, was dort steht, sich die Sätze geläufig machen, und sich in den Geist der Sache gehörig einweihen wird. Uebrigens werden überall in diesem Werke, wo von Verhältnissen und Proportionen die Rede ist, sogenannte geometrische Verhältnisse und Proportionen erstanden. Das *Zeichen dieser Verhältnisse* sind zwey senkrecht übereinanderstehende Punkte :, welche man zwischen die Zeichen des *Vorderglides* und des *Hintergliedes* eines Verhaltnisses setzt, z. B. 4 : 8.

1. Das *Verhältniſs zweyer Gröſsen* a zu b beruht auf die Vorstellung wie oft die erstere a (das Vorderglied), oder ein bestimmter Theil derselben, in der zweyten b (dem Hintergliede) enthalten ist.

Die Zahl, welche dieses angiebt, wird der *Exponent des Verhältnisses* genannt. Sie macht das Wesen des Verhältnisses aus; man erhält sie allemal, wenn man das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt; (so ist der Exponent des vorigen Verhältnisses $\frac{b}{a}$) und sie kann sowohl eine ganze Zahl, als ein Bruch, als auch eine Irrationalzahl seyn, d. h. eine Gröſse die sich durch die Einheit und deren Theile nicht genau ausdrücken läſst, in welchem Fall das Verhältniſs ein *irrationales Verhältniſs* genannt wird.

Bey 4 : 8 muſs man alſo das Verhältniſs der Zahl 4 zur Zahl 8 ſich vorſtellen, d. h. ſich denken, wie oft das Vorderglied 4, oder ein beſtimmter Theil deſſelben, im Hintergliede 8 enthalten iſt. Die Zahl welche dieſes ausſagt, 2, iſt der *Exponent* dieſes Verhältniſſes. Beym Verhältniſs 6 : 10 iſt der *Exponent* $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ und dieſes zeigt an, daſs der dritte Theil des Vorderglieds 5 mal geſetzt, das Hinterglied giebt. Beym Verhältniſs 2 : $\sqrt{3}$ iſt der Exponent $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und zeigt an, daſs die Hälfte des Vorderglieds ſo geſetzt, wie in $\sqrt{3}$ die Einheit geſetzt iſt, das Hinterglied giebt.

Grade ſo bedeutet AB : BC oder $\angle A : \angle B$ das *Verhältniſs der Linie AB zur Linie BC*, oder *des Winkels A zum Winkel B*, und dieſes Verhältniſs beruht auf die Vorſtellung der *Zahl*, welche angiebt, wie oft die Linie AB, oder der Winkel A, oder wie oft ein beſtimmter Theil derſelben, in der Linie BC oder dem Winkel B enthalten iſt, das heiſst auf die Vorſtellung des Exponenten.

α, Nur zwiſchen *gleichartigen Gröſsen* findet ein Verhältniſs ſtatt, alſo nur zwiſchen Zahl und Zahl, Linie und Linie, Winkel und Winkel u. ſ. f.

β, der Werth eines Verhältniſſes a : b wird nicht verändert, wenn beyde Glieder durch einerley Gröſse multiplicirt, oder beyde durch ſie dividirt werden. Denn der Exponent bleibt nach wie vor derſelbe, da $\frac{bm}{am} = \frac{b}{a}$ iſt.

2. Alle *Vergleichung der Verhältniſſe untereinander* beruht auf die Vergleichung ihrer Exponenten, indem dieſe das Weſen der Verhältniſſe ausmachen. Zwey Verhältniſſe a : b und c : d ſind gleich oder ungleich,

und das erstere grösser oder kleiner als das andre, je nachdem ihre Exponenten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{d}$ gleich, oder jener grösser oder kleiner als dieser sind.

Gleichheit der Verhältnisse wird *Proportionalität* genannt, und durch das Gleichheitszeichen $=$, welches man zwischen die gleichen Verhältnisse setzt, bezeichnet. Grösen, deren Verhältnisse gleich sind, sind *einander proportional*, bilden *Proportionalgrösen*.

Ist also $a:b = c:d = e:f$, so sind die sechs Grösen a bis f Proportionalgrösen, und e, f sind den Grösen c, d und a, b (oder nach Umständen auch die Hinterglieder b, d, f, den Vordergliedern a, c, e) proportional. *Diese sind dann gleich oft in jenen enthalten*, indem die Exponenten dieser gleichen Verhältnisse $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$, gleich sind, oder, so oft a in b enthalten ist, ist c in d und e in f enthalten, und so wie b aus a durch Multiplication entsteht, so entsteht d aus c und f aus e. Auf so verschiedne Art läfst sich dieses eine Zeichen übersetzen.

(Eine unmittelbare Folge hieraus ist, dass wenn $a:b = a:c = a:d$, die Grösen b, c, d, gleich seyn müssen, indem sie als Hinterglieder gleicher Verhältnisse dieselbe Gröse gleich oft in sich enthalten *; und dass eben so, falls $a:b = c:b = d:b$ ist, die Grösen a, c, d, welche in derselben Gröse d gleich oft enthalten sind, gleich seyn müssen.)

Grade so bedeutet $AB:BC = \angle A : \angle B$, dass die Linien AB, BC und die Winkel A, B, einerley Verhältniss unter einander haben, oder proportional sind, das heisst, dass der Winkel A oder ein bestimmter Theil dieses Winkels eben so oft im Winkel B enthalten ist, als die Linie AB oder derselbe Theil dieser Linie in der Linie BC. Gewöhnlich wird ein solches Zeichen so in Worten übersetzt: „die Linie AB verhält sich zur Linie BC, wie der Winkel A zum Winkel B."

Le Gendre bedient sich um die Proportionalität oder die Gleichheit der Verhältnisse zu bezeichnen des unter den Engländern gebräuchlichen Zeichens ::. Allein ich bin bey dem gewöhnlichen Gleichheitszeichen = geblieben, weil dieses den wahren Begriff der Proportionalität, Gleichheit der Verhältnisse, uns immer vor Augen hält, und dadurch die richtige Vorstellung erleichtert.

3. Zwey gleiche Verhältnisse werden ins besondre eine *Proportion* genannt, wie zum Beyspiel $a : b = c : d$. In jeder Proportion sind also die Exponenten beyder Verhältnisse gleich oder $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

α, Folglich ist auch in jeder Proportion $\frac{b}{a} \cdot c$
*Gr.2.γ $= d$ *, welches die Regeln angiebt, wie man zu drey gegebnen Zahlen a, b, c, die *vierte Proportionalzahl* d finden kann. Sind in zwey Proportionen die drey ersten Proportionalgrössen gleich, so muss es auch die vierte seyn.

Gr.2.γ β, Ferner ist in jeder Proportion $b . c = a . d$ oder *das Produkt der innern Glieder b, c, dem Produkt der äussern Glieder a, d gleich.* Auf diese Art lässt sich also aus jeder Proportion *eine Gleichung* zwischen den proportionalen Grössen *ableiten.*

γ, Sind umgekehrt zwey Produkte, deren jedes aus zwey Faktoren besteht, gleich, $b . c = a . d$, so bilden die vier Faktoren eine richtige Proportion, $a : b = c : d$, wozu das eine Produkt die äussern, das andre die innern Glieder hergiebt. Denn aus
*Gr.2.γ der Gleichung folgt dass $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *, dass folglich beyder Verhältnisse Exponent gleich, also die Proportion richtig ist.

δ, Iſt $a > b$ und $c < d$, ſo kann nicht $a : b = c : d$ ſeyn. Denn dann iſt $1 > \frac{b}{a}$ und $1 < \frac{d}{c}$ *, beyde *Gr. z. § Verhältniſſe $a : b$ und $c : d$ haben alſo ungleiche Exponenten. Führt mithin irgend ein Satz zur Behauptung des Gegentheils, ſo iſt er ungereimt.

ε, Iſt $a : b = c : d$ ſo muſs, wenn $a = b$ geſetzt wird, auch $c = d$ ſeyn. Die beyden erſten und die beyden letzten Gröſsen ſtehn dann beyde im Verhältniſs der Gleichheit.

4. Auf die Eigenſchaft der Proportionen, daſs das Produkt der innern Glieder dem Produkt der äuſsern Glieder gleich iſt, beruht die leichteſte Methode die Richtigkeit einer Proportion zu prüfen, und ſich von der Gültigkeit der *Ableitung einer Proportion* von einer oder mehreren richtigen Proportionen zu überzeugen.

α, Aus jeder Proportion laſſen ſich durch bloſse Verſetzungen, oder auch durch homologe Addition und Subtraction der Glieder, *andre Proportionen ableiten*, von denen ich hier nur einige die am häufigſten vorkommen anführe.

Iſt	$a : b = c : d$ mithin	$bc = ad$
ſo iſt auch	$a : c = b : d$ indem dann	$cb = ad$;
	$b : a = d : c$ indem	$ad = bc$;
	etc.	

ſo daſs es alſo erlaubt iſt in jeder Proportion unbeſchadet der Proportionalität *die mittlern Glieder mit einander zu vertauſchen*, die Verhältniſſe umzukehren etc.

β, Ferner ist dann (weil $bc = ad$ ist)

$a + b : b = c + d : d$ indem $bc + bd = ad + bd$
$a - b : b = c - d : d$ indem $bc - bd = ad - bd$
$a : a + b = c : c + d$ indem $ac + bc = ac + ad$
$a : a - b = c : c - d$ indem $ac - bc = ac - ad$
$a : b = a + c : b + d$ indem $ab + bc = ab + ad$
$a : b = a - c : b - d$ indem $ab - bc = ab - ad$
$a : b = c - a : d - b$ indem $bc - ab = ad - ab$
etc.

γ, Hat man *mehrere gleiche Verhältnisse*

* 2. $a : b = c : d = e : f$ etc.* mithin $\begin{cases} bc = ad \\ be = af \end{cases}$

so ist *das Verhältnifs der Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder* ebenfalls *jedem dieser Verhältnisse einzeln genommen gleich*, z. B.
$a + c + e : b + d + f = a : b$
indem $ab + cb + eb = ab + ad + af$ ist.

δ, Sind *mehrere richtige Proportionen gegeben*,
$a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
$e : f = g : h$ mithin $fg = eh$
$f : k = k : g$ mithin $kk = fg$

so folgt *durch Zusammensetzung dieser Proportionen* (d. h. indem man die Produkte der ersten, zweyten, dritten, vierten Glieder, wie sie unter einander stehn, nimmt, und dabey die Faktoren fortläfst, die zugleich im ersten und zweyten, oder zugleich im dritten und vierten Produkte vorkommen), aufs neue eine richtige Proportion $ae : bk =$
*Gr.2·δ $ck : dh$ indem dann $bc . fg . kk = ad . eh . fg$ * also
*Gr.2 α $bk . ck = ae . dh$ ist *.

Auch folgt umgekehrt aus der *Trennung zweyer Proportionen* (indem man die ersten, zweyten, dritten, vierten Glieder in einander dividirt) aufs neue eine richtige Proportion. So folgt aus den beyden ersten der gegebnen die richtige Proportion $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ indem dann $\frac{bc}{fg} = \frac{ad}{eh}$ ist * *Gr. 2. γ

ε, Eine Proportion bleibt also auch richtig, wenn man *alle Glieder* derselben zu *einerley Potenzen* erhebt, oder aus den Gliedern *Wurzeln von gleichen Graden zieht*. Ist

$a : b = c : d$ mithin $bc = ad$, so ist auch

$a^n : b^n = c^n : d^n$ da $b^n . c^n = a^n . d^n$ * und *Gr. 2. γ

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ da $\sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{d}$.

ζ, Sind die Vorderglieder einer Proportion, den Vordergliedern einer andern Proportion gleich, so sind *die Hinterglieder proportional*:

Ist $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
und $a : e = c : f$ mithin $ec = af$
so ist $b : e = d : f$ indem $ed = bf$
weil $ec . ad = bc . af$ * *Gr. 2. γ
auch $a : b \mp e = c : d \mp f$ indem $bc \mp ec = ad \mp af$.

Grade so sind die Vorderglieder proportional, wenn die Hinterglieder untereinander gleich sind.

Sind dagegen die äussern oder die mittlern Glieder untereinander gleich so sind die nichtgleichen Glieder *verkehrt proportional*:

ist $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
und $a : e = f : d$ mithin $ef = ad$
so ist $b : e = f : c$ indem $bc = ef$ * *Gr. 1.

η, Endlich ſind gleiche Vielſache der Vorderglieder und irgend andre der Hinterglieder einer richtigen Proportion, wiederum proportional; oder iſt $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$ ſo iſt auch

$am : bn = cm : dn$ indem $bn . cm = am . dn$

5. In einer *ſtetigen Proportion* ſind die mittlern Glieder einander gleich $a : b = b : c$. Das letzte Glied wird die *dritte*, das zweyte die *mittlere Proportionalzahl* ge-
*β nannt. Da $b^2 = ac$ *, ſo iſt die mittlere Proportional-
*G. 2. δ zahl zwiſchen a und c, daſs heiſst $b = \sqrt{ac}$ *

Bey drey gleichen ſtetigen Verhältniſſen $a : b = b : c = c : d$ ſind zwiſchen den äuſsern Gliedern a und d *zwey mittlere Proportionalgröſsen*; bey vieren drey u. ſ. f. Von zwey mittleren Proportionalgröſsen iſt die erſte $b = \sqrt[3]{a^2 d}$. Denn da $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ ſo iſt $\frac{b^3}{a^3} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{a}$.

6. *Verhältniſſe werden zuſammengeſetzt*, wenn man ſich die Produkte ihrer Vorderglieder und ihrer Hinterglieder im Verhältniſſe denkt. Die Zeichen $A : B = (a : b) + (c : d) + (e : f)$ bedeuten das Verhältniſs A zu B ſey zuſammengeſetzt aus den drey eingeklammerten durch + verbundnen Verhälniſſen, folglich $A : B = ace : bdf$.

Iſt umgekehrt ein Verhältniſs $A : B$ dem Verhältniſſe zweyer Produkte $ace : bdf$ von gleich viel Faktoren gleich, ſo läſst jenes Verhältniſs ſich aus dem Verhältniſs der einzelnen Faktoren zuſammen ſetzen.

Ein Verhältniſs $A : B$, welches aus *zwey gleichen* Verhältniſſen $(a : b)$ zuſammengeſetzt iſt, iſt *noch ein-*

mal so hoch als dieses Verhältniss, welches man so bezeichnet $A:B = 2\,(a:b)$, da denn $A:B = aa:bb$.

Eben so sagt man das Verhältniss $A:B$ sey *dreymal, viermal . . . so hoch* als das Verhältniss $a:b$, wenn es aus drey, vier . . . solchen gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist. Dann ist $A:B = 3\,(a:b) = a^3:b^3$ oder $A:B = 4\,(a:b) = a^4:b^4$ etc.

7. Wenn sich von drey Grössen a, b, c, die erste zur dritten, wie der Unterschied der beyden ersten zum Unterschied der beyden letzten verhält, das heisst $a:c = b-a:c-b$, so sagt man, dass diese Grössen *harmonisch-proportional* sind. Diese Benennung stammt von den Griechen her, und hat ihren Grund darin, dass die Längen drey gleich dicker und gleich gespannter Seiten, welche in der grössten Harmonie, (der Oktave, Quinte und Quarte) tönen sollen, sich wie die Zahlen 3, 4, 6 verhalten müssen. Diese Zahlen sind weder in arithmetischer, noch in geometrischer Proportion, sondern haben die hier erklärte Abhängigkeit, $3:6 = 4-3:6-4$; daher man umgekehrt dieses Verhalten das harmonische genannt hat.

Von drey harmonisch proportionalen Grössen muss die mittlere b, grösser als die eine der äussern und kleiner als die andre seyn.

Da sie so von einander abhängen, dass $c.(b-a) = a\,(c-b)$ ist, und diese Abhängigkeit, auch zwischen den Produkten drey solcher Grössen in derselben Zahl d, (oder zwischen ihren Quotienten durch d statt findet; so sind auch alle solche Producte oder Quotienten harmonifch proportionaler Gröfsen, harmonifch proportional.

Ift B das Mittel zwifchen A und C (alfo B — A = C — B) fo find die Produkte A . B, A . C, B . C harmonifch-proportional. Und nimmt man zwifchen zwey Zahlen m, n das arithmetifche Mittel a, und die mittlere harmonifch-proportionale Zahl h, fo bilden diefe vier Zahlen eine richtige Proportion, oder es ift m : a = h : n.

Diefe wenigen Sätze reichen völlig hin, um das, was in diefem Werke auf die Lehre von den Verhältniffen und Proportionen gebaut wird, ohne Anftofs zu verftehn. Die ganze Materie ift arithmetifch und unfer Verfaffer verweift nicht mit Unrecht wegen ihrer auf die Lehrbücher der Arithmetik. Bequem ift es indefs die Quinteffenz jener Lehren hier beyfammen zu haben, und diefe Einfchaltung wird dem Lefer bey der Befchäftigung mit dem dritten Buche, von grofsem Nutzen feyn. d. U.

II. Grundfätze (Axiome)

I.

Zwey Gröfsen die einer dritten gleich find, find untereinander felbft gleich. Auch find *zwey Verhältniffe* untereinander gleich, wenn beyde einem dritten Verhältniffe gleich find, indem ihre Gleichheit von
* V. I. der Gleichheit der Exponenten abhängt. *

2.