Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

II. Grundsätze (Axiome).

ten harmonifch proportionaler Gröfsen, harmonifch proportional.

Ift B das Mittel zwifchen A und C (alfo B — A = C — B) fo find die Produkte A . B, A . C, B . C harmonifch-proportional. Und nimmt man zwifchen zwey Zahlen m, n das arithmetifche Mittel a, und die mittlere harmonifch-proportionale Zahl h, fo bilden diefe vier Zahlen eine richtige Proportion, oder es ift m : a = h : n.

Diefe wenigen Sätze reichen völlig hin, um das, was in diefem Werke auf die Lehre von den Verhältniffen und Proportionen gebaut wird, ohne Anftofs zu verftehn. Die ganze Materie ift arithmetifch und unfer Verfaffer verweift nicht mit Unrecht wegen ihrer auf die Lehrbücher der Arithmetik. Bequem ift es indefs die Quinteffenz jener Lehren hier beyfammen zu haben, und diefe Einfchaltung wird dem Lefer bey der Befchäftigung mit dem dritten Buche, von grofsem Nutzen feyn. d. U.

II. Grundfätze (Axiome)

I.

Zwey Gröfsen die einer dritten gleich find, find untereinander felbft gleich. Auch find *zwey Verhältniffe* untereinander gleich, wenn beyde einem dritten Verhältniffe gleich find, indem ihre Gleichheit von der Gleichheit der Exponenten abhängt. *

* V. I.

2.

2.

α, Wenn zu gleichen Grösen gleiche *hinzugefügt* werden, so sind die Summen gleich. Ist z. B. $A = B + C$ und $D = B - C$, so ist $A + D = 2\,B$.

β, Wenn von gleichen Grösen gleiche *hinweggenommen* werden, so bleiben die Reste gleich. So z. B ist im vorigen Fall $A - D = 2\,C$.

γ, Gleiche Grösen mit gleichen *multiplicirt*, oder durch gleiche *dividirt* bleiben gleich. Ist z. B. $A = B + C$, so bleibt auch $A \cdot M = B \cdot M + C \cdot M$

δ, Also sind auch *Potenzen* von gleichem Grade aus gleichen Grösen, gleich; und eben so *Wurzeln* von gleichen Graden aus gleichen Grösen. Ist z. B. $A = B$, so ist auch $A^2 = B^2$ und $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

ε, Wenn $A > B$ ist, so ist auch $A + C > B + C$ und $A - C > B - C$, auch $A . M > B . M$ und $\frac{A}{M} > \frac{B}{M}$.

3.

Zwey Grösen, welche einerley dritte gleich oft enthalten, oder in einer dritten gleich oft enthalten sind, sind gleich

4.

Das Ganze ist gröser als sein Theil.

5.

Das Ganze ist der Summe aller seiner zusammengehörigen Theile gleich.

[Dieses sind insgesammt arithmetische Grundsätze, deren Zahl sich noch beträchtlich vermehren liesse. Von den folgenden eigentlichen geometrischen finden sich bey Le Gendre nur der sechste und neunte, die, wie er behauptet, hinreichen, das folgende System zu begründen. Die übrigen, so wie die unmittelbaren Folgerungen aus dem fruchtbaren sechsten Grundsatze, habe ich, weil sie für das System unentbehrlich sind, hinzugefügt.] d. U

6.

Von einem Punkt läst sich zu einem andern nur eine einzige grade Linie ziehn.

[Daraus fliessen unmittelbar folgende Sätze, die bey unserm Verfasser völlig fehlen:

1) *Durch zwey Punkte wird die Lage einer graden Linie völlig bestimmt*, und eine grade Linie in der zwey Punkte bekannt sind, ist *ihrer Lage nach* gegeben. Sind ihre Endpunkte bekannt, so ist sie auch *der Grösse nach* gegeben.

2. Zwey grade Linien, welche zwey Punkte gemein haben, fallen in einander, haben alle ihre Punkte mit einander gemein, und bilden nur eine einzige grade Linie. Dass dieses in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung geschehen müsse, beweist unser Verfasser im dritten Lehrsatz. — Sind die beyden gemeinschaftlichen Punkte ihre Endpunkte, so *decken* sich beyde grade Linien völlig. Daraus folgt:

3. Dass *zwey gleiche grade Linien sich decken*, d. h. wenn man sie so aufeinander legt, dass zwey ihrer Endpunkte zusammen fallen, so fallen auch die beyden andern Endpunkte aufeinander.

4. Zwey grade Linien die ſich ſchneiden, können auſser dem einzigen Punkte, worin ſie zuſammentreffen, (ihrem Durchſchnittspunkte,) nichts weiter mit einander gemein haben.

5. *Zwey grade Linien können keinen Raum einſchlieſsen.* Denn ſollten ſie einen Raum einſchlieſsen, ſo müſsten ſie ſich ſelbſt begränzen, alſo zwey Punkte gemein haben. Dann aber fallen ſie Folg. 2 gemäſs zuſammen, ohne einen Raum einzuſchlieſsen. Alſo iſt kein gradelinigtes *Zweyeck* möglich, wohl aber ein Dreyeck, und die übrigen Vielecke.

6. *Zwey grade Linien, können ſich nicht berühren.* Denn Fig. 17. geſetzt zwey grade Linien wie z. B. AB, DC könnten ſich berühren, ſo müſsten beyde Stücke der einen Linie, die durch den Berührungspunkt C abgeſchnitten werden, zu einerley Seite der graden Linie AB liegen. Dann müſten ſie aber nothwendig zuſammen fallen, weil ſonſt zwiſchen je zwey Punkten ſolcher graden Linie zwey verſchiedne grade Linien DCG, DG, vorhanden wären, gegen unſern Grundſatz. Folglich können zwey grade Linien ſich nicht berühren.

Zwey grade Linien, welche zuſammentreffen, müſſen alſo verlängert einander ſchneiden. d. U.

7.

[«, Es iſt möglich jede grade Linie, welche der Gröſse nach gegeben iſt, *in zwey gleiche Theile zu theilen*, und es läſst ſich in einer ſolchen Linie allemal ein Punkt denken, welcher *in ihrer Mitte liegt*, durch welchen ſie halbirt wird.

β, Es ist möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine andre grade Linie auf ihr *senkrecht* zu ziehn. *

* E. 12.

γ, Auch ist es möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine zweyte grade Linie zu ziehn, welche mit der erstern *einen gegebnen Winkel* bildet.]

Wie das, was diese Grundsätze als möglich aussagen, zu bewerkstelligen sey, lehrt Hr. Le Gendre in den Aufgaben, die dem zweyten Buche angehängt sind. *Dass* es geschehen könne, setzt er gleich bey den ersten Lehrsätzen voraus, daher diese Grundsätze bey seiner Anordnung des Systems unentbehrlich sind. In der That kann man sie als Grundsätze vertheidigen, indem die Möglichkeit der Halbirung einer graden Linie von bestimmter Grösse, die Möglichkeit senkrechter Linien und rechter Winkel, und die Möglichkeit der Nachbildung eines Winkels unmittelbar darauf beruhen, dass die grade Linie und der Winkel *stetige Grössen* sind, folglich keine absoluten, keine kleinsten Theile haben, und daher Theile von jeder Grösse und jedem Verhältniss darin denkbar seyn müssen. Die beyden Theile, worin eine Linie durch einen Punkt in ihr getheilt wird, können also gegen einander jedes Verhältniss, folglich auch das der Gleichheit haben; eben so zwey Nebenwinkel, und so auch zwey Winkel an verschiedenen Scheitelpunkten; und nichts anders sagen diese Grundsätze aus. d. U.

8.

[Wenn eine Ebne durch eine grade Linie in zwey Stücke getheilt wird, die zu entgegengesetzten Seiten jener Linie liegen, und man zieht durch zwey Punkte in den entgegengesetzt liegenden Stücken eine stetig zusammenhängende Linie, so trift diese Linie mit der erſtern in irgend einem Punkte zuſammen, und durchſchneidet ſie in dieſem Punkte. * *E. 11.

Dieſer Satz, der gewöhnlich nicht unter den Principien aufgeführt wird, iſt in Verbindung mit der zehnten und eilften Erklärung ſo evident, wie irgend einer der andern Grundſätze, und es ſtützen ſich am Ende auf ihn und auf einen analogen Grundſatz beym Kreiſe faſt alle unſere Urtheile über das Durchſchneiden der Linien. d. U.

9.

Zwey Ausdehnungen, es mögen Linien, Flächen oder Körper ſeyn, ſind gleich [und ähnlich, folglich innerlich einerley] wenn ſie *ſich decken*, das heiſst, wenn ſie, indem man die eine auf die andre legt, [indem man ihre Ortsverſchiedenheit aufhebt, und eine ganz im Ort der anderen denkt] in ihrer Ausdehnung, [und deren Begränzung] zuſammenfallen.

[Umgekehrt müſſen zwey Ausdehnungen *einander decken*, *congruiren*, wenn ſie innerlich einerley, d. h. gleich und ähnlich ſind, indem ſie ſich dann blos in ihrem Ort unterſcheiden.]

Flächen und Körper, welche ſich decken, haben nicht bloſs gleiche Ausdehnung, oder gleichen *Inhalt* ſondern auch alle Gränzen (Seiten ſowohl als Seitenflächen) und alle Winkel der einen, ſind den Gränzen und Winkeln der andern nicht nur in einerley Folge * ſondern auch nach einerley Richtung hin gleich *E. 20. (worauf die Symmetrie und Aehnlichkeit, folglich die innere Einerleyheit, die Congruenz ſolcher Figuren beruht.) Le Gendre giebt dieſen Flächen und Körpern den Namen *figures* und *ſolides égaux*, nennt dagegen die, welche Gleichheit ohne Aehnlichkeit haben, die ſich alſo zwar in der Ausdehnung oder dem Inhalte nach gleich ſind, ſich aber nicht decken, *figures* und *ſolides equivalentes* und ſcheint auf dieſe Unterſcheidung und den ſo beſtimmten Sprachgebrauch einen beſondern Werth zu legen. Allein da Gleichheit (*égalité*) doch eigentlich nur Einerleyheit der Gröſse bedeutet, ſo ſcheint das erſte Kunſtwort, welches Figuren bezeichnen ſoll, die auch einerley Beſchaffenheit oder Aehnlichkeit haben, nicht recht ſchicklich gewählt zu ſeyn. Ich verdeutſche *figures égaux*, durch *ſich deckende Figuren* oder *congruirende Figuren*, dagegen *Figures equivalentes* durch *gleiche Figuren*, oder, wo ein beſondres Gewicht darauf gelegt wird, durch, *dem Inhalt nach gleiche Figuren.* Gleich geltende Figuren, würde ein etwas fremdartiger, auch kein ſo paſſender Ausdruck ſeyn; beſſer *gleichhaltige Figuren*, ein Ausdruck den ich zum Bürgerrecht in unſrer Sprache empfehlen möchte. d. U.

β, Bey Körpern und krummen Flächen die gleich ſind, ſagt unſer Verfaſſer, giebt es noch eine dritte Art von Verſchiedenheit, die man nicht überſehn darf. Sie können einerley Gränzen und Winkel in einerley Folge haben, ohne daſs ſie ſich deshalb decken, [wenn nemlich die gleichen Stücke *nicht auch nach einerley Richtung hin* auf einander folgen, wie das z. B. bey der rechten und der linken Hand der Fall iſt, die, wären ſie auch im Einzelnen völlig gleich, ſo daſs Finger mit Finger congruirte, ſich doch beyde nicht decken können, man lege ſie, wie man wolle, oder bey zwey übrigens gleichen Schneken, deren eine rechts die andre links gewunden iſt. Daſſelbe kann bey ſchiefen Prismen, Pyramiden, körperlichen Winkeln, ſphäriſchen Dreyecken u. ſ. ſtatt finden. Eine ſolche Verſchiedenheit in der Zuſammenſetzung aus gleichen Stücken hat zwar auch bey ebnen Figuren ſtatt, wie die Dreyecke ABC, ABD zeigen, in welchen die Winkel $C = D$, $CAB = DBA$, $CBA = DAB$ und die Seiten $CA = DB$, $CB = DA$ ſind. Allein man braucht nur die eine dieſer Figuren im Gedanken umzukehren, ſo deckt ſie die erſtere, daher bey ebnen Figuren durch dieſe Verſchiedenheit in der Zuſammenſetzung keine weſentliche Verſchiedenheit bewirkt wird, und man von ihr abſtrahirt.] Aber bey *krummen Flächen* und *Körpern*, beruht darauf eine weſentliche Verſchiedenheit,

Fig. 15.

welche man, fast in allen Elementen der Geometrie übersehn hat, obschon mehrere Beweise, die sich auf das Decken, von gewissen Körpern oder krummen Flächen gründen, dadurch, dass man diesen Fall übersah, mangelhaft und in so fern fehlerhaft werden. Dahin gehören unter andern die Sätze über das Decken sphärischer Dreyecke, welche mehrere glaubten lediglich unter den Bedingungen und grade auf die Art, wie bey den ebnen Dreyecken beweisen zu können. Ja, um noch ein auffallenderes Beyspiel zu erwähnen *Robert Simson*, der in seiner Ausgabe Euklids den Beweis des 28sten Satzes im 11ten Buche unzulässig findet, fällt selbst in den Fehler, dass er seinen Beweiss auf eine Congruenz stützt, die nicht allgemein statt findet.

γ. Ich habe daher, fährt unser Verfasser fort, geglaubt für diese dritte eigenthümliche Art von Gleichheit in Flächen und körperlichen Räumen ein neues Kunstwort bilden zu müssen, nehmlich *Gleichheit durch Symmetrie* (égalité par symmetrie), und nenne hinfüro Figuren denen diese Art von Gleichheit zukömmt, *symmetrische Figuren* (figures symmétriques).

Auf diesen Unterschied zwischen *gleiche Figuren* die es bloss *dem Inhalt nach* sind, *symmetrische Figuren*, und *congruirende* oder *sich deckende Figuren*, muss man aufmerksam seyn, da durch diese Kunstworte Begriffe bezeichnet werden, die wesentlich verschieden sind.

10.

[Gleiche Winkel decken einander; d. h. wenn man die Spitze und einen der Schenkel des einen Winkels, auf die Spitze und einen der Schenkel des andern Winkels legt, und die beyden anderen Schenkel in der Ebne auf einerley Seite des erstern sich denkt, so fallen auch diese Schenkel zusammen.

Dass umgekehrt Winkel, die einander decken, gleich sind, ist schon oben bemerkt worden. * *E. 12.