Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Die Gerade Linie, Das Dreyeck Und Das Viereck.

keinem Satze dieſer Bücher in der Vorſtellung aus der Ebne heraustreten. Alle Punkte die man denkt, alle Linien die gezogen, alle Kreiſe die beſchrieben werden, muſs man ſo denken und ziehn, daſs alles in einerley Ebne bleibt, und das wird ſelten bey einem Satze ausdrücklich geſagt, auch wenn er nur unter dieſer Bedingung wahr iſt.

der Ueberſetzer.

DIE GRADE LINIE, DAS DREYECK UND DAS VIERECK.

LEHRSATZ I.

Alle rechte Winkel ſind einander gleich.

Die grade Linie DC ſtehe ſenkrecht auf AB, und GH ſenkrecht auf EF, (ſo daſs die Winkel ACD, DCB, eben ſo EGH, HGF gleiche Nebenwinkel ſind*) ſo behaupte ich, muſs der Winkel ACD dem Winkel EGH gleich ſeyn. Fig. 16. * E. 14.

Man mache CA, CB, GE, GF einander gleich*; ſo iſt auch AB gleich EF, und dieſe beyden Linien decken einander, wenn man EF ſo auf AB legt, daſs E auf A und F auf B fällt.* Dann müſſen auch die beyden Punkte G, C, welche in der Mitte dieſer Linien liegen, zuſammenfallen. Geſetzt nun, die in die- *Fo.3.α. *Gr.6.ſ. 1.

ſen Punkten ſenkrecht aufſtehenden Linien GH, CD decken ſich einander nicht, ſo würde GH auf eine von der CD verſchiednen graden Linie z. B. auf CK fallen. Da nach der Vorausſetzung der Winkel EGH = HGF iſt, ſo müſste dann auch ACK = KCB ſeyn. Nun aber iſt der Winkel ACK gröſser als ACD, der Winkel KCB
E. 12. β kleiner als DCB*, und der Vorausſetzung nach ACD gleich DCB: folglich muſs der Winkel ACK, welcher gröſser als ACD, mithin auch als DCB iſt, noch vielmehr gröſser als der Winkel KCB ſeyn. Es iſt alſo unmöglich daſs dieſe beyden Winkel ACK und KCB gleich ſeyn können, folglich unmöglich daſs das Perpendikel GH auf CK, d. h. auf irgend eine von CD verſchiedene grade Linie falle; alſo nothwendig daſs es auf das Perpendikel CD liege, da denn der Winkel ACD ſich mit EGH und der Winkel DCB mit HGF
*E. 12. β deckt. * Alſo ſind nothwendig alle rechte Winkel ein-
*Gr. 10. ander gleich. *

[Zuſatz I. Weil alle rechte Winkel gleich ſind, ſo haben ſie eine völlig beſtimmte, unveränderliche Gröſse. Deshalb machen ſie das natürliche und beſtimmte *Maaſs aller Winkelgröſsen* aus, und der Geometer bezieht dieſe insgeſammt auf den rechten Winkel, und drückt ſie in Theilen deſſelben aus.

Zuſatz II. *Durch jeden Punkt einer graden Linie iſt nur eine einzige auf ihr ſenkrechte grade Linie möglich.* Denn geſetzt durch den Punkt C der graden Linie AB, wären auf ihr zwey verſchiedne ſenkrechte Linien CD, CK möglich, ſo müſsten die Winkel ACD, ACK als rechte, * dem Lehrsatz zu Folge einander gleich, folglich der Theil dem Ganzen gleich seyn, welches ungereimt ist. * Daher ist es unmöglich dass durch irgend einen Punkt auf einer graden Linie mehr als eine grade Linie senkrecht stehe.] * E. 14. * Gr. 4.

Anmerkung. Euklid nimmt den Lehrsatz als Grundsatz an. Wir haben ihn hier bewiesen, weil er sich aus dem achten Grundsatz streng beweisen lässt, und man die Grundsätze nicht ohne Noth vervielfältigen muss. [Dass er bewiesen werden könne und müsse, bemerkt schon *Proklus* in seinem Commentar über das erste Buch Euklids. Den zweyten Zusatz hat unser Verfasser ganz übersehn, obgleich er ihn häufig braucht.]

LEHRSATZ 2.

*Jede grade Linie CD, welche mit einer andern AB zusammentrifft, bildet mit dieser Linie zwey Nebenwinkel ACD, BCD, * deren Summe zwey rechten Winkeln gleich ist.* Fig. 17. *E.11.13.

Sind die beyden Nebenwinkel gleich, so sind sie rechte Winkel, also der Lehrsatz wahr. Sind sie ungleich, so stehe CG auf AB im Punkte C senkrecht. * Durch dieses Perpendikel wird der grössere der beyden Nebenwinkel ACD in zwey Theile ACG, GCD getheilt, so dass die Summe der beyden Nebenwinkel ACD und DCB, den drey Winkeln ACG, GCD, DCB zusammengenommen gleich ist. * Der Erste dieser Winkel ist ein rechter *, und die beyden andern zusammengenommen bilden den rechten Winkel BCG: folglich ist die Summe der beyden Nebenwinkel ACD, DCB zwey rechten Winkeln gleich. * Gr. 7. *E.12.7. * E. 14.

Folgerung 1. Ist *einer* von zwey Nebenwinkeln ein *rechter* Winkel, so ist es auch der andre. — Ein *stumpfer* Winkel ACD hat dagegen einen *spitzen*; ein *spitzer* BCD einen *stumpfen* Nebenwinkel.

Fig. 18. *Folgerung* 2. *Wenn die Linie DE senkrecht auf AB steht, so steht umgekehrt auch AB senkrecht auf DE.* Denn ist DE ein Perpendikel auf AB, so ist ACD ein rechter Winkel; folglich auch der Nebenwinkel ACE *Folg. 1. dieses Winkels ein rechter *; folglich ACD gleich ACE, folglich AC senkrecht auf DE.

Folgerung 3. *Die Summe aller Winkel, die um einen Punkt einer* graden Linie, an einerley Seite dieser Fig. 17. graden Linie, von noch so viel graden Linien gebildet werden, (welche sich in einerley Ebne befinden) und insgesammt in diesem Punkte C schneiden, (z. B. der Winkel ACG, GCD DCB) *ist zwey rechten* Winkeln *E. 12. 7. gleich. *]

LEHRSATZ 3.

Fig. 17. *Zwey grade Linien, welche zwey Punkte A, F mit einander gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen, und bilden nur eine einzige grade Linie.*

Dass sie zwischen den beyden gemeinschaftlichen Punkten A, F zusammenfallen, erhellet aus Grundsatz 6. Folg. 1. Fielen sie in ihrer Verlängerung über diese Punkte hinaus nicht auch zusammen, so würde es irgendwo einen Punkt C geben, wo sie sich von einander trennten, so dass die eine Linie CB, die andre CD würde. Nun sey CG eine in C auf BC senkrecht stehende grade Linie *; ſo iſt ſowohl GCB als GCD ein rechter Winkel, indem ſowohl ACB als ACD eine grade Linie iſt, folglich GCD = GCD *, d. i. das Ganze dem Theile gleich, welches unmöglich iſt. Folglich iſt es unmöglich daſs die beyden graden Linien, welche zwey Punkte A, F gemein haben, ſich in ihrer Verlängerung irgendwo trennen können. Sie bilden alſo nur eine einzige grade Linie.

* Gr. 7.
* 1.

LEHRSATZ 4.

Wenn eine grade Linie CD auf den Durchſchittspunkt zweyer andrer graden Linien AC, CB ſo aufſteht, daſs ſie mit ihnen zwey Winkel bildet, deren Summe zwey rechte Winkel beträgt, ſo liegen AC, CB in einer graden Linie.

Denn geſetzt ſie lägen nicht in einer graden Linie, ſo ſey CE die gradelinigte Verlängerung von AC. * Dann wäre die Summe der beyden Nebenwinkel ACD, DCE zwey rechten Winkeln gleich; folglich, da nach der Vorausſetzung auch die Summe von ACD, DCB zwey rechten Winkeln gleich iſt, ACD + DCB = ACD + DCE *, folglich DCB = DCE *, folglich der Theil dem Ganzen gleich, welches unmöglich iſt *. Alſo iſt CB ſelbſt die Verlängerung von AC, und liegt mit AC in grader Linie.

* Fo. 2.
* Gr. 1.
* Gr. 2 β
* Gr. 4.

LEHRSATZ 5.

Wenn zwey grade Linien AB, DE einander ſchneiden, ſo ſind die Winkel, welche am Durchſchnittspunkt einander gegenüberſtehen, und die man Scheitelwinkel nennt, einander gleich. Fig. 2.

Denn weil erstens DE eine grade Linie ist, so sind die beyden Winkel ACD, ACE zusammengenommen zwey rechten gleich. Weil zweytens AB eine grade Linie ist, sind die Winkel ACE, BCE zusammengenommen zwey rechten gleich. Folglich ist ACD + ACE = ACE + BCE *, folglich ACD = BCE. *

* Gr. 1.
* Gr. 2.

Grade so beweist man die Gleichheit der beyden andern Scheitelwinkel ACE, DCB.

Zusatz I. Die vier Winkel, welche zwey grade sich durchschneidende Linien um ihren Durchschnittspunkt bilden, sind zusammengenommen vier rechten Winkeln gleich. Denn die Summe der beyden Nebenwinkel ACE, BCE beträgt zwey rechte Winkel, und eben so viel die Summe der beyden andern Nebenwinkel ACD, BCD.

Zusatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel in einer Ebne befindliche grade Linien CA, CB, CD etc. sämmtlich in einem Punkte C zusammen treffen, so beträgt die Summe aller Winkel, welche je zwey zunächstliegende Schenkel bilden, (ACB, BCD, DCE, ECF, FCG, GCA) vier rechte Winkel. Denn wenn man durch den Punkt C zwey grade Linien zöge, so entstünden um C vier Winkel, welche vier rechten Winkel, und dabey allen jenen Winkeln zusammengenommen gleich wären *.

Fig. 4.

*E. 11. γ

Zusatz III. Wenn von einem Punkte C vier grade Linien ausgehn, und je zwey der einander gegenüberstehenden Winkel, sind gleich, so liegen die Schenkel CA, CB, und CD, CE in grader Linie.

Fig. 2.

Denn

Denn da alle vier Winkel zusammengenommen vier rechten, und je zwey aneinander liegende Winkel den beyden andern, mithin zwey rechten Winkeln gleich sind, so sind sie Nebenwinkel*, und zwey ihrer Schenkel liegen in grader Linie. * 4.

LEHRSATZ 6.

Zwey Dreyecke decken sich, wenn ein Winkel und die beyden ihn einschliessenden Seiten in beyden Dreyecken gleich sind.

Es sey der Winkel A dem Winkel D, die Seite AB der DE und die Seite AC der DF gleich; so behaupte ich, dass das Dreyeck DEF sich mit dem Dreyeck ABC deckt. Fig. 19.

Denn zwey solche Dreyecke lassen sich so über einander legen, dass sie völlig zusammenfallen. Und zwar erst die Seite DE auf die ihr gleiche AB, so dass D auf A und E auf B fällt. * Dann müssen, weil D und A gleiche Winkel sind, und gleiche Winkel einander decken, auch die Seiten DF und AC*, und weil überdem DF gleich AC ist, auch die Punkte F und C auf einander fallen. Folglich müssen auch die dritten Seiten zusammen fallen*, also beyde Dreyecke einander decken. *Gr. 6. f. 2. *Gr. 10. *Gr. 6.

Folgerung 1. Folglich sind in solchen Dreyecken auch die Winkel B, E, die Winkel C, F, und die Seiten BC, EF (d. h. die Winkel welche gleichen Seiten, und die Seiten welche gleichen Winkeln gegenüber stehn) so wie die Flächenräume beyder Dreyecke, einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, nemlich eines Winkels und der beyden einschliessenden Seiten bestimmt.

Folgerung 2. Zwey *rechtwinklige Dreyecke* decken sich, wenn die Katheten in beyden gleich sind.*

*.E.17.

Folgerung 3. Durch zwey Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel wird jedes Dreyeck characterisirt und völlig bestimmt. Wie aus zwey gegebnen Linien und dem Winkel den sie einschliessen sollen, sich ein Dreyeck wirklich construiren läßt, lehrt Aufg. 8. am Ende des zweyten Buchs.

Anmerkung. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und einer der Winkel, welche sie *nicht* einschliessen, gleich sind, so läßt sich daraus nur bey rechtwinkligen Dreyecken allgemein auf ihre Congruenz schliessen *; bey schiefwinkligen lediglich unter den Bedingungen welche Lehrsatz 20. aussagt.

*19.

LEHRSATZ 7.

Zwey Dreyecke decken sich, wenn eine Seite und die beyden Winkel, welche an ihr liegen, in beyden Dreyecken gleich sind.

Es sey die Seite BC der Seite EF, der Winkel B dem Winkel E, und der Winkel C dem Winkel F gleich, so behaupte ich, daß das Dreyeck DEF sich mit dem Dreyeck ABC deckt.

Um die Deckung zu bewerkstelligen, lege man EF auf die ihr gleiche Seite BC, so daß die Endpunkte E auf B und F auf C fallen *. Weil der Winkel E dem Winkel B gleich ist, und gleiche Winkel sich decken, so fällt dann auch die Seite ED auf BA, und folglich

*Gr. 6. f. 2.

der Punkt D auf irgend einen Punkt in der Linie BA. Eben so, weil der Winkel F dem Winkel C gleich ist, fällt FD auf CA, und der Punkt D auf irgend einen Punkt der Linie CA. Da folglich D sowohl in der Linie BA, als in der Linie CA liegt, so muss es auf den Durchschnittspunkt A dieser beyden Linien liegen, als den einzigen Punkt, den diese Linien mit einander gemein haben *. Folglich fallen alle drey Winkelpunkte, und also auch die Seiten des einen Dreyecks mit denen des andern zusammen, und also decken sich beyde Dreyecke. *Gr. 6 f. 3.

Folgerung. Folglich sind in solchen Dreyecken auch die Winkel A, D und die Seiten AB, DE und AC, DF (d. i. die Winkel die den gleichen Seiten, und die Seiten die den gleichen Winkeln gegenüberstehn) so wie die Flächenräume einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, einer Seite und zweyer anliegender Winkel bestimmt.

[Anmerkung. Auch wenn zwey Winkel und eine Seite, die nicht zwischen ihnen liegt, in zwey Dreyecken gleich sind, so decken sich diese Dreyecke. Doch ist das ein Satz der sich erst weiterhin * darthun lässt. Hierher gehört Aufg. 9.] * 18.

LEHRSATZ 8.

In einem Dreyecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beyden andern Seiten.

Denn jede Seite, z. B. BC, ist als grade Linie der kürzeste Weg zwischen den beyden Winkelpunkten B, C, also nothwendig kleiner als die Summe der gebrochnen Linien BA + AC. * E. 5.

Folgerung. Daraus folgt daſs im Dreyecke jede Seite AC gröſser als der Unterſchied zweyer Seiten
Gr.2.γ BC — BA iſt. Wegen beyder Sätze ſehe man B. II. Erkl. 11. Zuſ.

LEHRSATZ 9.

Fig. 20. *Nimmt man innerhalb eines Dreyecks ABC irgend einen Punkt O, und zieht von demſelben nach den Endpunkten einer der Seiten z. B. der BC, grade Linien OB, OC, ſo iſt die Summe dieſer beyden Linien kleiner als die Summe der beyden andern Seiten des Dreyecks, d. h. als AB + AC.*

Man verlängere die Linie BO bis wo ſie die Seite AC im Punkte D trift; ſo iſt im Dreyecke ODC die
. 8. f. Seite $OC < OD + DC$, folglich wenn man beyderſeits BO hinzufügr $BO + OC < BO + OD + DC$ d. i. $BO + OC < BD + DC$.

Nun aber iſt auch im Dreyecke ABD die Seite $BD < BA + AD$, folglich wenn man beyderſeits DC hinzufügt, $BD + DC < BA + AC$. Folglich iſt noch vielmehr $BO + OC < BA + AC$.

Anmerkung. Dagegen iſt der Winkel O den die beyden Linien im Dreyecke umſchlieſsen, gröſser als der Winkel A an der Spitze des Dreyecks. Der Beweis dieſes Satzes beruht darauf, daſs der äuſsere Winkel am Dreyecke gröſser iſt, als jeder der gegenüberſtehenden innern Winkel. Folglich $O > D > A$. Dieſe unmittelbare Folge aus Lehrſatz 30 beweiſt Euklid beſonders, ehe er an den gegenwärtigen Satz kömmt. Bey unſerm Verfaſſer müſte er ein Zuſatz zu Lehrſatz 30. werden.

LEHRSATZ 10.

Wenn zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC
Fig. 21 *zweyen Seiten DE, DF eines andern Dreyecks DEF*

gleich ſind, und der Winkel BAC den die erſtern einſchlieſsen, iſt gröſser als der Winkel EDF, den die andern einſchlieſsen, ſo muſs die dritte Seite BC, im erſten Dreyeck, gröſser ſeyn als die dritte Seite EF im andern Dreyeck, [und iſt umgekehrt $BC > EF$, ſo muſs auch der Winkel $BAC > EDF$ ſeyn.]

Man denke ſich die Linie AG durch A ſo gezogen, daſs der Winkel CAG dem Winkel D gleich ſey *, * Gr. 7. mache AG gleich DE * und ziehe GC, ſo decken ſich *Fo. 3. α die Dreyecke GAC und EDF, weil in ihnen der Conſtruction gemäſs zwey Seiten mit dem eingeſchloſsenen Winkel gleich ſind *. * 6. Folglich ſind die dritten Seiten GC, EF einander gleich. Nun aber ſind in Abſicht der Lage des Punktes G drey Fälle möglich, indem dieſer Punkt entweder auſserhalb des Dreyecks ABC, oder auf die Linie BC, oder innerhalb des Dreyecks liegen kann.

Fall 1. Wenn G auſserhalb des Dreyecks ABC liegt. Als dritte Seite im Dreyeck iſt $GC < GI + IC$ *; * 8. eben ſo $AB < IA + IB$; folglich auch $GC + AB < GI + IC + IA + IB$, d. h. $< GA + BC$. Nun aber iſt der Conſtruction gemäſs $AB = GA$. Alſo $GC < BC$ *, und da GC gleich EF iſt, $EF < BC$. *G. 2. γ

Fall 2. Wenn G auf BC liegt. Dann iſt GC ein Fig. 22. Theil der BC, folglich die der GC gleiche EF, $< BC$.

Fall 3. Wenn G innerhalb des Dreyecks ABC Fig. 23. liegt. Dann iſt nach dem vorigen Lehrſatz $GA + GC < BA + BC$, folglich, da $GA = BA$ gemacht iſt, $GC < BC$, alſo auch die der GC gleiche $EF < BC$.

Der Satz gilt alſo für jeden möglichen Fall, d. i. allgemein.

Wollte man den *umgekehrten Satz* leugnen, ſo müſte man behaupten, daſs, wenn BC > EF iſt, der Winkel BAC kleiner oder gleich D ſeyn könnte. Im erſten Fall müſte, nach dem eben bewieſenen, BC < EF; im zweyten Fall, dem folgenden Lehrſatz gemäſs, BC = EF ſeyn, welches beydes der Vorausſetzung widerſpricht. Alſo muſs der Winkel BAC gröſser als D ſeyn.

Anmerkung. In Simpſons Elementen folgt auf dieſen Satz ein ähnlicher Lehrſatz, deſſen Beweis die Theorie der Parallellinien vorausſetzt, und den Le Gendre übergeht, der aber doch gekannt zu werden verdient. Denn obgleich er auch bey Euklid fehlt, ſo iſt er doch, wie Simpſon bemerkt, zur geometriſchen Beſtimmung gröſter und kleinſter Werthe, von groſsem Nutzen. Dieſer Satz lautet wie folgt: *Wenn in zwey Dreyecken*
Fig 24. *ein Winkel ſammt der gegenüberſtehenden Seite gleich, ein zweyter Winkel aber in beyden ungleich iſt, ſo ſteht dem, unter dieſen Winkeln, welcher dem rechten am nächſten kömmt, eine gröſsere*
* Cf. II. *Seite gegenüber* *.
7. 24. 2.

Wenn z. B. zwey Dreyecke (man nehme in unſrer Figur die beyden ſpitzwinkligen ABC und DEF, oder die beyden ſtumpfwinkligen ABC' und DEF', oder ein ſpitzwinkliges und ein ſtumpfwinkliges,) wenn in dieſen Dreyecken der Winkel A = D, die gegenüberſtehende Seite BC = EF iſt, und dabey der Winkel C einem rechten Winkel näher kömmt, als der Winkel F; ſo muſs die Seite AB > DE ſeyn.

Ich theile hier nur Simpſons Vorbereitung zum Beweiſe mit, da ſie für den geübtern den Beweis zu führen hinreicht, der Beweis ſelbſt aber hier nicht an ſeinem Ort ſtehen würde. Aus den Winkelpunkten B, E fälle man auf die gegenüberſtehenden Seiten Perpendikel, nehme auf die Verlängerung dieſer Perpendikel Punkte I und K welche von den Seiten eben ſo weit als die Punkte B, E abſtehn, und ziehe IC, KF, ſo wird mittelſt Lehrſatz 6 und 10 bewieſen, daſs IB > KE, folglich das Perpendikel BG im erſtern Dreyeck gröſser als das im zweyten EH iſt. Vom gröſsern ſchneide man ein Stück BM, dem kleinern gleich, ab, und ziehe durch den Endpunkt dieſes Stücks eine Parallellinie mit AC, ſo ſchneidet dieſe von der Seite AB ein Stück BN ab, welches gleich DE iſt, woraus erhellet, daſs DE kleiner als AB iſt.

Haben alſo zwey rechtwinklige Dreyecke gleiche Hypotenuſen, ſo ſteht dem Winkel, welcher in beyden der gröſsere iſt, auch eine gröſsere Seite gegenüber.

LEHRSATZ II.

Zwey Dreyecke die untereinander gleichſeitig ſind, ſind auch untereinander gleichwinklig, * *und decken ſich.* Fig. 19. * E. 20.

Es ſey AB = DE, AC = DF, BC = EF, ſo behaupte ich, daſs auch die den gleichen Seiten gegenüberſtehenden Winkel gleich ſind, A = D, B = E, C = F, und daſs ſich beyde Dreyecke EDF, ABC einander decken.

Denn geſetzt der Winkel A ſey dem Winkel D nicht gleich, ſo muſs er entweder gröſser oder kleiner als der Winkel D ſeyn. Da die Seiten welche dieſe Winkel einſchlieſsen der Vorausſetzung nach in beyden Dreyecken gleich ſind; ſo müſte, wäre A > D, dem vorigen Lehrſatz gemäſs, auch die dritte Seite BC > EF, wäre dagegen A < D, auch BC < EF ſeyn, welches der Bedingung daſs BC = EF iſt, widerſpricht. Alſo kann der Winkel A weder gröſser noch kleiner als D ſeyn, muſs folglich

dem Winkel D gleich seyn. — Eben so kann man die Gleichheit der beyden andern Winkel beweisen, die indess noch kürzer daraus folgt, dass, weil dann zwey Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel A, D in beyden Dreyecken gleich sind, diese Dreyecke einander
* 6. decken *, folglich die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel B, E und C, F so wie die Flächenräume beyder Dreyecke gleich seyn müssen. Und diese Gleicheit folgt wiederum aus der Gleichheit dreyer Stücke, nemlich der drey Seiten in beyden Dreyecken.

[Aus drey gegebnen Linien ein Dreyeck zu bilden, lehrt Buch II. Erklärung 11. Zusatz.]

LEHRSATZ 12.

Fig. 25. *In jedem gleichschenkligen Dreyeck sind die Win-*
* E. 17. *kel an der Grundlinie *, welche den gleichen Seiten gegenüberstehn, gleich.*

Wenn AB = AC ist, so behaupte ich muss B = C seyn.

Es sey B der Punkt, welcher auf der Grundlinie in der Mitte zwischen den beyden Endpunkten B und C
* Gr. 7. liegt. * Ziehe AD, so entstehn dadurch zwey Dreyecke ABD, ACD, welche untereinander gleichseitig sind, indem AD beyden gemein, ferner nach der Voraussetzung AB = AC, und der Construction gemäss AB = DC ist. Folglich sind die der gemeinschaftlichen Seite
* 11. AD gegenüberstehenden Winkel einander gleich *, B = C.

Folgerung. Das *gleichseitige Dreyeck* ist für jede Seite als Grundlinie gleichschenklig, und hat deshalb lauter gleiche Winkel, ist gleichwinklig. Fig. 8.

Zusatz. Daraus daſs die beyden Dreyecke ABD, ACD sich decken, folgt auch noch die Gleichheit der übrigen Winkel BAD = DAC und BDA = ADC. Letztere sind, da BC eine grade Linie ist, Nebenwinkel, und folglich, als gleiche Nebenwinkel, *rechte Winkel**: folglich, *theilt in jedem gleichschenkligen Dreyeck eine von der Spitze nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie gezogne grade Linie den Winkel an der Spitze in zwey gleiche Theile, und steht zugleich auf der Grundlinie senkrecht.* Fig. 25. * E. 14.

[Eben so theilt eine grade Linie welche den Winkel an der Spitze im gleichschenkligen Dreyeck halbirt, das Dreyeck in zwey sich deckende Dreyecke*: folglich steht auch diese Linie senkrecht auf der Grundlinie und halbirt sie. * 6.

Daſs endlich auch das aus der Spitze des gleichschenkligen Dreyecks auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt, erhellt aus Lehrsatz 18. Folg. 2.

Stets sind also diese drey Eigenschaften in derselben Linie im gleichschenkligen Dreyeck verbunden.

Findet folglich eine derselben in einem Dreyecke ABC ohne die andre statt, *so sind die beyden Schenkel des Winkels ungleich* durch dessen Spitze die halbirende Linie oder das Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite gezogen ist.]

[Anmerkung. Hierher gehören die fünf ersten Aufgaben am Ende des zweyten Buchs, und Aufg. 8 bis 11. über die Construction der Dreyecke.]

LEHRSATZ 13.

Hat umgekehrt ein Dreyeck zwey gleiche Winkel, so sind auch die Seiten welche den gleichen Winkeln gegenüberstehen gleich, und das Dreyeck ist gleichschenklig.

Fig. 26. Es sey ABC = ACB, so behaupte ich muss AC = AB seyn.

Denn wären diese beyden Seiten nicht gleich; so müsste eine derselben, z. B. AB, die grössere seyn: folglich liesse sich auf ihr ein Stück BD = AC nehmen. Zieht man dann DC, so erhält man ein Dreyeck BDC, welches sich mit dem Dreyeck BAC decken müsste, weil in beyden die Seite BC gemeinschaftlich, ferner der Annahme gemäss AD = AC, und nach der Voraus-
* 6. setzung der Winkel B = ACB ist *: folglich wäre der Theil dem Ganzen gleich, welches ungereimt ist. Also können die Seiten AC, AB nicht ungleich seyn, daher das Dreyeck ABC gleichschenklig seyn muss.

Folgerung. Ein Dreyeck welches lauter gleiche Winkel hat, ist auch gleichseitig.

Ein Dreyeck dessen Seiten alle ungleich sind, hat lauter ungleiche Winkel.

LEHRSATZ 14.

Fig. 27. *Von zwey Seiten eines Dreyecks ist stets die die grössere, welche einem grössern Winkel gegenübersteht. — Umgekehrt ist von zwey Winkeln eines Dreyecks stets der der grössere, welcher einer grössern Seite gegenüber steht,*

1. Es sey der Winkel C > B, so behaupte ich, dass die dem Winkel C gegenüberstehende Seite AB > AC ist, welche dem Winkel B gegenübersteht.

Denn man denke sich durch den Winkelpunkt des grössern Winkels eine grade Linie CD so gezogen, dass
der Winkel BCD = B sey *, so ist dass Dreyeck BDC * Gr. 7.
gleichschenklig und BD = DC *. Da nun AC < * 13.
AD + DC *, so ist auch AC < AD + BD, d. h. * 8.
< AB, folglich AB grösser als AC.

2. Es sey die Seite AB > AC, so behaupte ich dass der Winkel C, welcher der Seite AB gegenübersteht, grösser als der Winkel B ist, welcher der Seite AC gegenübersteht.

Denn wäre C nicht grösser als B, so müste jener Winkel entweder kleiner als B, oder gleich B seyn.
Wäre C < B so müsste, wie eben bewiesen worden,
AB < AC gegen die Voraussetzung, seyn. Wäre
C = B so müsste AB = AC gleichfalls gegen die Vor- * 12.
aussetzung seyn. Also ist nothwendig C > B.

LEHRSATZ 15.

Von einem Punkte A ausserhalb einer graden Fig. 28.
Linie DE, lässt sich nach dieser Linie nur eine einzige senkrechte Linie ziehn.

Gesetzt man könnte ihrer zwey AB und AC ziehn; so verlängere man die eine AB, nehme auf dieser Verlängerung BF = AB und ziehe FC.

Dann deckten sich die beyden bey B rechtwinkligen Dreyecke ABC und FBC, weil die eine Kathete CB, beyden Dreyecken gemein ist, und die zweyten

Katheten AB, BF der Construction gemäſs gleich
*6.Folg. ſind *: folglich wäre der Winkel BCF gleich dem Winkel BCA, welcher der Annahme nach ein rechter iſt. Alſo müſste auch der Winkel BCF ein rechter ſeyn: folglich, weil die Summe der beyden aneinander liegenden Winkel BCA + BCF zwey rechte Winkel be-
* 4. trüge, müſsten CA, CF in einer graden Linie liegen*, folglich wären zwiſchen den beyden Punkten A, F zwey verſchiedne grade Linien ABF, ACF möglich, welches Grundſatz 6 widerſpricht. Alſo ſind zwey verſchiedne ſenkrechte Linien von einem Punkte auſserhalb einer graden Linie, auf dieſe Linie unmöglich.

[*Folgerung.* Alſo iſt kein Dreyeck mit zwey rechten Winkeln möglich.]

[Anmerkung. Daſs auf eine grade Linie durch einen Punkt in ihr nur ein einziges Perpendikel möglich iſt, haben wir ſchon Lehrſatz 1. Zuſatz 2. bewieſen. Wie dieſe Perpendikel zu conſtruiren ſind, lehrt Aufg. 2, 3.]

LEHRSATZ 16.

Fig. 28. *Man denke ſich von einem Punkte A nach einer graden Linie DE die ſenkrechte Linie AB, und mehrere ſchiefaufſtehende grade Linien AE, AC, AD etc. gezogen, ſo iſt:*

1) *die ſenkrechte AB unter allen dieſen Linien die kürzeſte.*

2) *Unter den ſchiefſtehenden Linien ſind je zwey, z. B. AC, AE, welche auf entgegengeſetzten Seiten der ſenkrechten Linie AB gleich weit von B (d. h. ſo daſs BC = BE iſt) aufſtehn, gleich.*

3) *Von allen andern schiefstehenden Linien (z. B. AC, AD oder AC, AE) ist stets die die grössere, welche weiter von der senkrechten aufsteht.*

Man verlängere die senkrechte Linie AB um BF = AB, und ziehe FC, FD.

1. Da nach der Construction die Winkel ABC, CBF rechte, folglich gleich, und auch die Seiten AB, BF gleich sind, so decken sich die beyden über die gemeinschaftliche Seite BC beschriebnen Dreyecke ABC und FBC *. Folglich sind die dritten Seiten AC, CF einander gleich. Nun aber ist die grade Linie ABF kürzer als die gebrochne Linie ACF *, folglich auch AB die Hälfte der ABF kürzer als AC die Hälfte der ACF. Also ist die senkrechte Linie kürzer als jede schiefaufstehende. * 6. * E. 5.

2. Wenn BE = BC ist, so decken sich die beyden über AB beschrieben bey B rechtwinkligen Dreyecke ABE, ABC *: folglich sind die dritten Seiten AC, AE, und folglich je zwey schiefstehende Linien, welche gleich weit von B aufstehn, gleich. — Diese Linien müssen aber zu entgegengesetzten Seiten des Perpendikels AB aufstehn, weil sie sonst zwey Punkte A und B gemein hätten, folglich zusammenfielen, und nur Eine, nicht zwey verschiedne grade Linien ausmachten *. *6. Folg. *Gr. 6. F. 1.

3. Im Dreyeck ADF ist die Summe der beyden Seiten AD und DF grösser als die Summe der beyden Linien CA und CF, die von einem Punkte innerhalb des Dreyecks nach den Endpunkten der dritten Seite gezogen sind *. Also ist auch AD, die Hälfte von AD + * 9.

DF grösser als AC, die Hälfte von AC + CF: folglich sind die schiefstehenden Linien länger, die weiter vom Perpendikel ab aufstehn.

Folgerung 1. Die *senkrechte Linie* ist das *wahre Maass des Abstands eines Punkts von einer graden Linie*, weil sie nur auf eine einzige Art vorhanden (2), und zugleich die kürzeste unter allen möglichen Linien ist, die sich vom Punkte zur graden Linie ziehn lassen. [Daher werden wir hinfüro den *Abstand eines Punkts von einer graden Linie*, und umgekehrt den *Abstand einer graden Linie von einem Punkte* stets durch das Perpendikel, welches vom Punkte auf die Linie gefällt wird, bestimmen. Wenn wir von der Grösse *eines solchen Abstands* reden, muss man darunter die Grösse dieses Perpendikels zwischen Punkt und Linie verstehn.]

Fig. 36. [Der *Abstand zweyer Linien AB, CD von einander* hängt vom Abstande der Punkte in der einen, von der andern Linie, ab. Folglich muss dieser Abstand durch die Grösse der Perpendikel BA, FE, DC, die man von den Punkten in der einen BD, auf die andere AC zieht, bestimmt werden. Sind diese Perpendikel insgesammt gleich, so sind die beyden Linien *gleich weit abstehend* (lineae aequidistantes), wo nicht, so sind sie *ungleich weit abstehend.*]

Folgerung 2. *Von einem Punkte lassen sich nach einer und derselben graden Linie nicht drey gleiche grade Linien ziehn.* Denn sonst müste es auf einerley Seite des Perpendikels zwey gleiche (nicht zusammenfallende) schief aufstehende grade Linien geben, welches nach 2 unmöglich ist.

[Zusatz I. Aus der Deckung der beyden Dreyecke ABC, ABE in (2) folgt die Gleichheit der Winkel C = E und der Winkel CAB = BAE; so wie umgekehrt aus der Gleicheit dieser Winkel und der Seiten AC = AE, oder der Seiten BC = BE die Deckung der beyden Dreyecke. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

α, Die schiefen Linien AC, AE welche gleich weit von *der senkrechten Linie AB abstehn* (d. h. so dass CB = BE ist) sind sowohl gegen die Linie DE, als auch gegen die senkrechte AB beyde unter gleichen Winkeln geneigt.

β, Zwey schiefe Linien AC, AE, die unter gleichen Winkeln C = E auf die grade Linie DE aufstehn, sind gleich; und überdem gleich weit vom Perpendikel AB entfernt, d. h. so, dass sowohl BC = CE, als auch der Winkel CAB = BAE ist, fallen folglich, wenn sie auf einerley Seite des Perpendikels liegen zusammen (2).

γ, Zwey schief-aufstehende Linien AC, AE die gleiche Winkel mit dem Perpendikel AB machen, sind gleich, und stehn von demselben gleich weit ab.]

[Zusatz. II. Jede der schiefstehenden Linien AE, AC, AD etc. steht auf DE unter ungleichen Nebenwinkeln *, einem spitzen und einem stumpfen auf. *E. 13.
Und zwar *liegt der spitze Winkel mit dem Perpendikel stets auf einerley, der stumpfe Winkel hingegen mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schiefstehenden Linie.* Denn jede schiefstehende Linie z. B. AC bildet

mit dem Perpendikel AB und dem zwischen beyden liegenden Stück der graden Linie DE ein rechtwinkliges Dreyeck, worin der Winkel der schiefstehenden Linie vorkömmt, der mit dem Perpendikel auf einerley Seite der schiefstehenden Linie liegt. Nun ist das Perpendikel AB stets kleiner als AC (1), folglich auch der Winkel C kleiner als der rechte Winkel B *, folglich jener Winkel ein spitzer, dagegen sein Nebenwinkel ACD, der mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schiefstehenden Linie AC liegt, ein stumpfer.]

[*Folgerung* 1. Wenn zweyer schiefstehender Linien AC, AD spitze Winkel (oder auch ihre stumpfe Winkel) beyde nach einerley Seite jener Linien zu liegen, so liegen diese Linien selbst beyde auf einerley Seite des Perpendikels AB. Wenn dagegen, wie bey AC, AE die spitzen (oder auch die stumpfen Winkel auf entgegengesetzten Seiten jener Linien, (folglich gegeneinander gekehrt) liegen, so liegen diese Linien beyde auf entgegengesetzter Seite des Perpendikels AB.]

[*Folgerung* 2. Folglich fällt das Perpendikel, welches aus der Spitze eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Grundlinie gefällt wird, wenn beyde Winkel an der Grundlinie spitz sind, *innerhalb*, wenn einer dieser Winkel spitz der andre stumpf ist, *außerhalb* des Dreyecks. — Ist keiner der Winel an der Grundlinie ein rechter, so fällt das Perpendikel in die eine

Kathete

Kathete des rechtwinkligen Dreyecks, weil aus einem Punkt auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist. d. U.

LEHRSATZ 17.

Es sey EF eine auf der graden Linie AB, in deren Mitte C, aufstehendes Perpendikel, so ist 1) jeder Punkt in diesem Perpendikel von den beyden Endpunkten der graden Linie AB gleich weit entfernt; 2) jeder Punkt ausserhalb des Perpendikels hingegen von diesen Endpunkten ungleich weit entfernt. Fig. 29.

1. Da der Voraussetzung gemäss AC = CB ist, so stehn zwey aus irgend einem Punkte D des Perpendikels nach A und B gezogene grade Linien DA, DB, vom Perpendikel gleich weit ab, sind also gleich.* * 16. 2. Und folglich steht jeder Punkt im Perpendikel von den beyden Endpunkten A, B gleich weit ab.

2. Es sey I ein Punkt ausserhalb des Perpendikels. Zieht man IA, IB, so muss eine dieser beyden Linien z. B IA das Perpendikel in irgend einem Punkte D durchschneiden. Man ziehe DB. Nun ist IB < ID + DB *, und, da D ein Punkt im Perpendikel ist, * 8. nach (1) DB = DA; folglich IB < ID + DA d. i. < IA, folglich jeder Punkt, ausserhalb des Perpendikels von den Endpunkten A, B ungleich weit entfernt.

Folgerung 1. Umgekehrt muss jeder Punkt, welcher von zwey Punkten A, B gleich weit absteht, in dem Perpendikel auf AB liegen, welches in der Mitte zwischen diesen Punkten aufsteht. Denn ausserhalb dieses Perpendikels kann ein solcher Punkt nach (2) nicht liegen. *Eine grade Linie, welche durch zwey von A und B gleich weit abstehende Punkte D, F gezogen ist, muss also dieses Perpendikel seyn.*

Folgerung 2. *Das Perpendikel durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks muss die Grundlinie, und folglich auch den Winkel an der Spitze halbiren.* Denn die Spitze ist von den beyden Endpunkten gleichweit entfernt, und durch jeden Punkt ist nur ein Perpen-
* 15. dikel auf eine grade Linie möglich *.

Fig. 28. **Folgerung 3.** Wenn man von zwey gegebnen Punkten C, E noch so viel Paare sich durchschneidender Linien CA, EA so zieht, dass je zwey, welche sich schneiden, gleich sind, (mithin im Verhältniss der Gleichheit stehn) so müssen die Durchschnittspunkte dieser Linien insgesammt in einem Perpendikel auf CE, das in der Mitte zwischen C und E aufsteht, liegen. Dieses Perpendikel ist daher der *geometrische Ort* des Durchschnittspunkts oder der Spitzen gleichschenkliger Dreyecke, welche über dieselbe Grundlinie be-
* E. 21. schrieben werden *.

[LEHRSATZ 18.]

Fig. 24. *Zwey Dreyecke DEF, NBL decken sich, wenn in ihnen zwey Winkel und irgend eine Seite gleich sind.*

Liegen die gleichen Winkel beyde an der gleichen Seite an, so ist dieser Satz kein andrer, als der schon bewiesene 7te Lehrsatz. Wo nicht, so sey die Seite NB = DE, der Winkel N = D und der Winkel L = F.

Aus der Spitze des dritten Winkels B, E, sey auf die gegenüberstehende Seite NL, DF, das Perpendikel BM, EH gefällt. Weil DE = NB ist, decken sich diese beyde Linien, so dass die Endpunkte E, B und D, N zusammenfallen. Weil ferner die Winkel D, N gleich sind, so fällt auch die Seite DF auf NL *. *Gr. 10. Nun ist von Einem Punkte (den zusammenfallenden E, B) nach Einer graden Linie (den zusammenfallenden DF, NL) nur ein einziges Perpendikel möglich *; * 15. folglich müssen auch die Perpendikel EH, BM einander decken. In dieser Lage gehn die dritten Seiten EF, BC beyde durch denselben Punkt (E, B), und stehn auf dieselbe grade Linie DF, NL, zu einerley Seite des Perpendikels EH, BM, und zwar der Voraussetzung nach unter gleichen Winkeln L = F auf. Folglich müssen sie zusammenfallen *, also die beyden Dreyecke einander decken. *16. Z. 1. β.

Folgerung 1. Aus der Gleichheit zweyer Winkel und einer Seite in zwey Dreyecken, folgt also die Gleichheit des Flächenraums beyder Dreyecke, der dritten Winkel B, E und der beyden andern, den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten, NL = DF und BL = EF.

Folgerung 2. Zwey rechtwinklige Dreyecke decken einander, wenn in ihnen ausser dem rechten noch ein andrer Winkel, und irgend eine der Seiten gleich sind.

Anmerkung. Dieser Satz fehlt bey Le Gendre. Bey *Euklid* ist er der 26ste Satz des ersten Buchs, wird dort aber anders bewiesen als hier, wo ich den Beweis gewählt habe, den man in *Kästners* Geometrie findet. d. U.

LEHRSATZ 19.

Zwey rechtwinklige Dreyecke decken ſich, wenn die Hypotenuſe und eine der Katheten in beyden gleich iſt.

Fig. 30. Es ſey die Hypotenuſe AC = DF und die Kathete AB = DE, ſo wird die Deckung der beyden rechtwinkligen Dreyecke ABC, DEF dargethan ſeyn, wenn bewieſen wird, daſs die beyden andern Katheten BC, EF gleich ſeyn müſſen. Geſetzt ſie könnten ungleich, und BC gröſser als EF ſeyn, ſo nehme man auf BC ein Stück BG = EF und ziehe AG. Dann hätten die beyden rechtwinkligen Dreyecke ABG, DEF gleiche Katheten, AB = DE und BG = EF; ſie müſten ſich al-
* 6. f. 2. ſo decken *, und auch ihre dritten Seiten AG, DF gleich ſeyn. Es iſt aber nach der Vorausſetzung DF = AC. Alſo wäre AG = AC, und wir hätten hier zwey gleiche, durch den Punkt A gezogne, auf BC ſchiefaufſtehende grade Linien, in ungleichem Abſtand
* 16. 3. vom Perpendikel, welches unmöglich iſt *. Alſo iſt es unmöglich daſs BC und EF ungleich wären, alſo
* 11. nothwendig, daſs beyde Dreyecke ſich decken *.

[Anmerkung. Auch hieraus folgt, daſs das Perpendikel aus der Spitze des gleichſchenkligen Dreyecks auf die Grundlinie, die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt.]

[LEHRSATZ 20.]

Zwey ſchiefwinklige Dreyecke decken ſich, wenn in ihnen zwey Seiten und einer der Winkel, welcher dieſen Seiten gegenüberſteht, gleich ſind, und dabey *die zweyten gegenüberstehenden Winkel beyde spitz, oder beyde stumpf sind.*

Es sey NB = DE, BL = EF und der Winkel N = D, so werden die beyden Dreyecke NBL, DEF sich unter der Bedingung decken, daſs die beyden andern, den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel, beyde spitz, oder beyde stumpf sind, welche Fälle die Figur beyde darstellt. Fig. 24.

Man ziehe aus der Spitze der von den gleichen Seiten eingeschloſsnen Winkel B, E auf die gegenüberstehende Grundlinie oder deren Verlängerung die senkrechten Linien BM, EH *, so decken sich die rechtwinkligen Dreyecke NMB, DHE weil in ihnen einer der spitzen Winkel N, D und eine Seite NB, DE gleich sind *. Also fallen die Seiten NM, DH, die Punkte B, E, und zugleich die Perpendikel BM, EH zusammen. Folglich sind dann BL, EF zwey von Einem Punkte eines Perpendikels, nach Einer graden Linie, (den zusammenfallenden NL, DF) gezogne schiefaufstehende Linien. Da nun der Voraussetzung gemäſs, erstens die Winkel L, F, welche den zusammenfallenden Linien NB, DE gegenüberstehn und daher auf einerley Seite der schiefaufstehenden Linie BL, EF liegen, entweder beyde spitz, oder beyde stumpf sind, so müssen diese schiefstehenden Linien BL, EF sich auf einerley Seite des Perpendikels befinden *, und und da sie zweytens der Voraussetzung nach gleich sind, so müssen sie zusammenfallen *. — Folglich fallen alle drey Seiten der Dreyecke NBL, DEF zusammen, und beyde Dreyecke decken sich.

*Aufg. 3

*18. f. 2.

*16. Z. 2.

*16. 2.

Anmerkung. Diesen Satz der bey *Euklid* und *Le Gendre* fehlt, habe ich aus *Simpson* entlehnt, den Beweis aber selbst geführt, da Simpson die Hauptsache, dass BC, EF auf einerley Seite des Perpendikels fallen müssen, nicht darthut, wozu ihm Sätze, wie die beym 16ten Lehrsatz nachgetragnen, fehlten. Dass dieser Satz übrigens allein unter der beygefügten Bedingung gilt, erhellt aus dem Beweise. Denn nur unter dieser Bedingung ist es nothwendig dass die schiefstehenden Linien BL, EF, beyde auf einerley Seite des Perpendikels liegen und sich decken. Ohnedem könnten sie wie BL, E'F auf entgegengesetzten Seiten des Perpendikels liegen, und dann würden sie ihrer Gleichheit ungeachtet nicht zusammenfallen. Die Deckung bliebe also ohne jene Bedingung zweifelhaft. — Wie, wenn zwey Linien als Seiten eines Dreyecks, und ein ihnen gegenüberstehender Winkel gegeben sind, das Dreyeck zu finden ist, lehrt Aufg. 10.

d. U.

LEHRSATZ 21.

Fig. 31. *Zwey grade Linien AC, BD, welche auf einer*
* E. 14. *dritten AB senkrecht stehn*, sind parallel, d. h. tref-*
* E. 15. *fen nie zusammen, so weit man sie auch verlängert*.*

Denn gesetzt sie träfen in irgend einem Punkte O
*E. 10. oberhalb oder unterhalb der Linie AB zusammen *; so hätte man einen Punkt O, von welchem zwey verschiedne Perpendikel OA, OB noch derselben graden
* 15. Linie AB giengen, welches unmöglich ist *.

[Hieraus erhellt die Möglichkeit parallaler Linien. — Die 15te Erklärung gehörte also hierher.]

LEHRSATZ 22.

Fig. 32. *Wenn auf der graden Linie AB, eine andere BD senkrecht und eine zweyte AC schief aufsteht, so dass*

der ſpitze Winkel BAC nach der Seite jenes Perpendikels zu liegt, ſo müſſen BD, AC genugſam verlängert [an der Seite der AB, auf welcher der ſpitze Winkel liegt] zuſammen treffen.

Aus verſchiednen Punkten F, C, P, der ſchiefſtehenden Linie AC ſeyen auf AB die Linien FG, CM, PN ſenkrecht gezogen.

Dieſe Perpendikel fallen insgeſammt auf die Seite der AC, auf welcher der ſpitze Winkel liegt *, d. i. *16.Z.2.
der Vorausſetzung nach insgeſammt nach der Seite des Perpendikels BD. Die Punkte G, M, N in welchen ſie auf die AB aufſtehn, können nicht mit dem Punkte A zuſammenfallen, weil BAC kein rechter Winkel iſt. Eben ſo wenig können ſie in der entgegengeſetzten Verlängerung AL der Linie AB liegen. Denn ſonſt müſste das im Punkte A auf AB errichtete Perpendikel AE von dieſen Perpendikeln durchſchnitten werden, (wie z. B. von FH in K)*, und dann wären von dem * Gr. 8.
Durchſchnittspunkte (K) zwey verſchiedne Perpendikel auf AL vorhanden (KA, KH) welches unmöglich iſt*: folglich müſſen die Punkte G, M, N in der Li- * 15
nie AB von A nach B zu liegen.

Grade aus denſelben Gründen muſs, wenn AC gröſser als AF iſt, auch der Punkt M von G nach B zu in der Linie AB liegen. Sollte er mit G zuſammenfallen, ſo ſtünden in G auf AB zwey verſchiedne grade Linien GF, GC ſenkrecht, welches unmöglich iſt*. *1. Z. 2.
Sollte er in die entgegengeſetzte Seite der AB fallen, ſo würde das Perpendikel aus C das Perpendikel FG durchſchneiden, und aus einem Punkte auſserhalb der

AB auf ihr zwey verschiedne Perpendikel vorhanden seyn, welches eben so wenig möglich ist. Folglich muss der Punkt M von G nach B zu fallen, so dass AM grösser als AG ist.

Wenn man also auf AC stets in grössern Entfernungen Punkte nimmt, und aus ihnen senkrechte Linien auf AB zieht, so fällt der Punkt wo sie auf AB aufstehn, immer weiter und weiter von A ab. In diesem Wachsthum der Entfernungen AG, AM, AN Gränzen annehmen zu wollen, würde ungereimt seyn. Denn gesetzt man wollte behaupten irgend eine der senkrechten Linien z. B. CM sey die letzte, folglich die, deren Fusspunkt M am weitesten von A abstünde, so liesse sich allemal, auf die Art, wie es hier geschehn ist, dar-
* Fg. 2. thun, dass wenn man die AB verlängert *, ein aus irgend einem Punkte P der Verlängerung auf AB gefälltes Perpendikel PN in einer Entfernung AN, die grösser als AM ist, aufstehn müsste; ein Resultat, welches der Annahme, dass CM die letzte am weitesten von A entfernte senkrechte Linie sey, widerspricht.

Folglich stehn auf AB in jeder beliebigen, noch so grossen Entfernung von Punkte A Perpendikel, die aus einem Punkte der AC gefällt sind, auf: folglich auch in der Entfernung AB, und hier muss das Perpendikel mit der senkrechten Linie BD zusammenfallen, da in einem Punkte B einer graden Linie nur ein ein-
* I. Z. 2. ziges Perpendikel auf diese Linie möglich ist *: folglich müssen die Linen AC, BD genugsam verlängert, in irgend einem Punkte zusammentreffen, und zwar

an der Seite der AB, auf welcher der spitze Winkel BAC liegt.

[Anmerkung. Dieses ist der Fundamentalsatz in der *Lehre von den Parallellinien*, dessen Beweis, wie ihn Le Gendre führt, ich auf das Vortheilhafteste darzustellen, und, (wie man aus den Citaten sehn kann) durch Einschaltung früherer von Le Gendre übergangener Sätze in das System, ich noch besser zu begründen gesucht habe. Aus diesem Satze folgt der 24ste Lehrsatz, dessen Beweis, wie es scheint, *Euklid* für unmöglich hielt, und den in der That noch niemand, so viele Wege man auch eingeschlagen hat, elementarisch und völlig bindend dargethan hat. *Hr. Le Gendre* würde sich daher ein bleibendes Verdienst um die Geometrie erworben haben, wenn der hier mitgetheilte Beweis biedend und ohne Lücke wäre, und sich dagegen nichts anders einwenden liesse, als was Le Gendre selbst in einer Anmerkung erinnert, dass die Idee des Unendlichen dabey mit ins Spiel komme (welches, wenn es nur auf gehörige geometrische Art geschieht, nicht tadelnswürdig seyn könnte). Ich glaube aber an Hr. *Le Gendres* Beweis zweyerley aussetzen zu müssen.

Erstens wird im indirecten Beweise im Ersten Absatz unbewiesen behauptet, dass die als senkrecht angenommene FH das Perpendikel AE durchschneiden müsse; eine Lücke die jedoch leicht auszufüllen ist, wenn man nur die von unserm Verfasser übergangnen Sätze vom Schneiden der Linien den Principien der Geometrie zufügt, wie ich das zu thun versucht, und deshalb auf Grundsatz 8 verwiesen habe.

Zweytens, und das ist die Hauptsache, thut dieser Beweis zwar überzeugend dar, dass, falls es in der Verlängerung einer graden Linie keine Gränzen giebt, (und dass es die nicht gebe liegt in Forderung 2.) es auch *kein letztes Perpendikel* aus Punkten der AC auf AB *geben könne*. Allein daraus folgt keineswegs, wie im dritten Absatz stillschweigend angenommen wird, dass es *in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte* A *keine Gränze geben könne*. Denn es wäre vielleicht doch denkbar, dass bey gleich weit entfernten Punkten auf der AC, die Perpendikel auf AB immer weniger von einander abſtünden, und ihre Entfernungen vielleicht in einer geometriſchen oder andern unendlichen Reihe die eine endliche Summe hat, abnehmen könnten, da denn für gewiſſe Entfernungen der BD, die AC ſich ihr aſſymptotiſch nähern würde, ohne ſie je zu erreichen. In dieſem Fall *wäre zwar eine Gränze* in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte A auf der Linie AB *vorhanden*, über die heraus für jede Entfernung von A kein Perpendikel aus einem Punkte in der AC die AB mehr duchſchnitte, allein dem ungeachtet gäbe es kein *letztes Perpendikel*, weil es bey allen Annäherungen ohne Ende keinen letzten Zuſtand giebt. Es ſcheint daher etwas übereilt zu ſeyn, wenn *Hr. Le Gendre* im vierten Abſatz aus dem was dargethan iſt (d. h. daraus daſs es kein letztes Perpendikel giebt) unmittelbar folgert, daſs in jeder noch ſo groſsen Entfernung von A ein Perpendikel aufſtehe; eine Folgerung die nur dann gültig wäre, wenn er dargethan hätte, daſs es in der Entfernung der Durchſchnittspunkte der Perpendikel auf der Linie AB, vom Punkte A an gerechnet, *keine Gränze* giebt. So lange er uns dieſes nicht beweiſt (und das möchte auf dem Wege, den er einſchlägt, kaum möglich ſeyn) können wir ſeinen Beweis nicht als bindend erkennen, ſondern müſſen ihn, ſo viel Scharfſinn er übrigens verräth, den nicht ganz geglückten Verſuchen die Schwierigkeit in der Theorie der Parallellinien zu heben, beyzählen. Unſerm Leſer wird er wenigſtens dazu dienen, daſs er einſieht, worauf die Schwierigkeit bey dieſem Satze beruht, welches mehreren, die ſich mit dieſer Theorie beſchäftigt haben, nicht ſcheint recht deutlich geweſen zu ſeyn. — Ueber die Verſuche die Theorie der Parallellinien auf einem andern Wege zu begründen, ſehe man die erſte unter den Bemerkungen, welche dieſen Elementen angehängt ſind.

d. U.

LEHRSATZ 23.

*Fig. 32. *Wenn zwey grade Linien AC, BD mit einer*
*25. An. *dritten AB zwey* **innere Winkel*** *CAB, ABD*

bilden, deren Summe zwey rechten Winkeln gleich ist, so sind sie parallel.

Aus dem Punkt G in der Mitte zwischen A und B sey senkrecht auf AC die grade Linie EGF gezogen *. *Au. I. 3. Der Voraussetzung nach sind GBD + GAE zwey rechten Winkeln gleich. Nun sind auch, als Nebenwinkel, GBD + GBF zwey rechten Winkeln, also der Summe jener beyden Winkel gleich*. Folglich GAE * Gr. 1. = GBF.* Ueberdem sind als Scheitelwinkel AGE, * Gr. 2. BGF, und der Construction gemäss die Seiten GA, GB gleich. Folglich decken sich die beyden Dreyecke AEG, BFG *, und auch die Winkel GFB, GEA * 6. sind gleich. Nun ist GEA der Construction gemäss ein rechter Winkel, also auch GFB. Folglich stehn die beyden Linien AC, BD auf *einer* dritten senkrecht, sind also parallel*. * 21.

[*Folgerung.* Sollen also zwey grade Linien zusammentreffen, so müssen sie mit jeder dritten, welche sie durchschneiden, zwey innere Winkel bilden, die zusammen genommen grösser oder kleiner als zwey rechte sind.]

LEHRSATZ 24.

Wenn zwey grade Linien AI, BD, mit einer dritten AB zwey innere Winkel BAI, ABD bilden, deren Summe kleiner als zwey rechte Winkel ist, so treffen sie genugsam verlängert zusammen, und zwar an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte sind, liegen.]

Man ziehe durch A die grade Linie AC, [unter einem Winkel, welcher dem Nebenwinkel von ABD

*Aufg. 4 gleich ist *] so daſs die beyden innern Winkel CAB, ABD zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich werden, und nehme dann dieſelbe Conſtruction als beym vorigen Satze vor. — Da dann AE das Perpendikel und AK eine ſchiefſtehende Linie auf EG iſt, die beyde durch denſelben Punkt A gehn, ſo iſt der Winkel AKE, welcher mit dem Perpendikel auf einer-
*16 Z. 2. ley Seite der ſchiefſtehenden AK liegt, ſpitz *, folg-
* 5. lich auch ſein Scheitelwinkel FKI *. Daher müſſen KI, FD genugſam verlängert oberhalb EF zuſammentref-
* 22. fen *. [Nun aber können ſie nicht in dem Stück BF zuſammentreffen; weil ſonſt die Winkel BAI, ABD, gegen die Vorausſetzung nicht auf einerley Seite der AB liegen würden. Folglich müſſen ſie in dem Stück BD, alſo oberhalb AB zuſammentreffen, d. i. an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte ſind, liegen.]

Zuſatz I. Daſſelbe findet auch ſtatt, wenn zwey Linien AM, BD mit der dritten AB zwey innere Winkel BAM, ABD bilden, deren Summe *gröſser als zwey rechte Winkel iſt.* Denn da die Summe der Nebenwinkel BAM, BAN und ABD, ABF vier rechten Winkeln
*5. Z. 1. gleich iſt *, und der Vorausſetzung nach BAM + ABD gröſser als zwey rechte Winkel iſt; ſo muſs die Summe der beyden andern Winkel BAN + ABF kleiner als zwey rechte Winkel ſeyn, alſo AN dem vorigen Beweiſe zu folge mit BF zuſammentreffen, [jetzt aber unterhalb AB, da in dieſem Fall die innern Winkel, die kleiner als zwey rechte ſind, unterhalb AB liegen.]

Zusatz II. *Durch jeden Punkt A ist mit einer graden Linie BD nur eine einzige Parallellinie AC möglich.* Denn jede von AC verschiedne grade Linie AI oder AM, bildet mit AB einen kleinern oder einen grösern Winkel als AC, folglich zwey innere Winkel, deren Summe kleiner oder grösser als zwey rechte ist, durchschneidet also BD.

[Anmerkung. Die Bestimmung zu welcher Seite der AB, die beyden graden Linien zusammentreffen, fehlte bey unserm Verfasser mit Unrecht, da sie von vielem Gebrauch ist. — Der Lehrsatz selbst ist *Euklids* eilfer Grundsatz, über den man einige Bemerkungen am Ende dieses Werks findet, wo auch unser Verfasser eine überraschende analytische Methode angiebt, wie sich die Hauptsätze der Geometrie unabhängig von der Theorie der Parallellinien darthun lassen.]

LEHRSATZ 25.

Wenn zwey Parallellinien AB, CD von einer graden Linie EF geschnitten werden, so ist die Summe der beyden innern Winkel AGO, GOC zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 34.

Denn gesetzt sie sey kleiner oder grösser als zwey rechte Winkel, so müsten, dem vorigen Lehrsatz zufolge, beyde Linien zusammentreffen, wären also nicht parallel.

Folgerung 1. Wenn AGO ein rechter Winkel ist, so muss es auch der zweyte innere Winkel GOC seyn. Folglich *steht jede grade Linie, die auf einer von zwey Parallellinien senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht.*

Folgerung 2. Da AGO + GOC zwey rechten Winkeln gleich ist, überdem auch die Summe der Nebenwinkel GOD + GOC zwey rechte Winkel beträgt, so ist AGO gleich GOD, also auch gleich dem Scheitelwinkel des letztern COF. Also sind sowohl die vier spitzen Winkel EGB, AGO, GOD, COF einander gleich, als auch die vier stumpfen Winkel EGA, BGO, GOC, DOF; und jeder der spitzen macht mit jedem der stumpfen Winkel zusammengenommen zwey rechte Winkel aus. — Umgekehrt ist, wenn AGO gleich GOD oder COF ist, auch AGO + GOC gleich GOD + GOC d. h. zwey rechten Winkeln gleich.

Anmerkung. Diese Winkel liegen um zwey verschiedne Durchschnittspunkte G, O. Ein Winkel an einem Durchschnittspunkt in Verbindung mit einem Winkel am andern Durchschnittspunkt betrachtet, geben Paare von Winkeln, denen man eigne Namen gegeben hat. Die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche zu einerley Seite der durchschneidenden Linie liegen, nennt man vorzugsweise *innere Winkel* (angles internes) z. B. AGO, GOC auch BGO, GOD; die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie liegen, *Wechselswinkel* (angles alternes oder alternes internes) z. B. AGO, GOD auch BGO, GOC; endlich ein Paar Winkel auf einerley Seite der durchschneidenden Linie, wovon einer zwischen, der andere ausserhalb der beyden Parallellinien liegt, *äussere Winkel* (angles internes - externes), dergleichen EOD, EGB, auch EGA, EOC; FGB, FOD, und FGA, FOC sind. (Die Winkel ausserhalb beyder Parallellinien, auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie, z. B. EGB, COF nennt *Le Gendre* alternes - externes; im Deutschen würden wir sie am schicklichsten *äussere Wechselswinkel* nennen.) — In diese Benennungen übertragen, sagt unser Lehrsatz und die vorhergehenden folgendes aus,

1. *Wenn zwey Parallellinien von einer dritten graden Linie durchschnitten werden, so sind* α) die *innern Winkel zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich;* β) *die Wechselswinkel und* γ) *auch die äussern Winkel untereinander gleich.*

2. Wenn *umgekehrt* zwey grade Linien so von einer dritten durchschnitten werden, dass die Summe der Innern Winkel zwey rechte beträgt, oder dass die Wechselswinkel, oder dass die Aeussern-Winkel gleich sind; so sind die Linien parallel *. Eins dieser Merkmale zieht stets die beyden andern nach sich, wie aus Folgerung 2 erhellt. * 23.

[3. Werden dagegen zwey grade Linien von einer dritten so durchschnitten, dass die innern Winkel *nicht* zwey rechten, und die Wechselswinkel, so wie die äussern Winkel, *nicht* untereinander gleich sind, *so treffen diese Linien zusammen*, und zwar an der Seite der durchschneidenden Linie, an welcher die innern Winkel IAB + ABD < 2 R sind *; folglich an der Seite, wo *der kleinere der Wechselswinkel liegt* IAB < ABF oder ABD < BAL, oder an der Seite an welcher der kleinere von zwey äussern Winkeln zwischen den Parallellinien liegt.] Fig. 33. * 24.

[4. Auf die Sätze unter 2 beruht die *Construction der Parallellinien*, in Aufgabe 6, und daher auch die *Möglichkeit des Parallelogramms* *, welches entsteht, wenn man von zwey Punkten einer Parallellinie nach der andern gleichlaufende Linien zieht, folglich Parallelen zwischen Parallelen bildet.] * E. 19. Fig. 34.

LEHRSATZ 26.

Zwey grade Linien AB, CD, welche mit einer dritten EF parallel sind, sind untereinander selbst parallel. Fig. 35.

Es sey RP ein Perpendikel auf EF. Weil nun AB mit EF parallel ist, so steht RP auch auf AB senkrecht *. Weil zweytens CD mit EF parallel ist, so steht RP auch auf CD senkrecht. Also stehn AB, CD beyde * 25. f. 1.

auf einer graden Linie RP senkrecht; folglich sind sie
* 21. untereinander parallel *.

LEHRSATZ 27.

Fig. 36. *Zwey Parallellinien stehn überall gleich weit von einander ab, d. h. Perpendikel, die von Punkten in der einen auf die andre gefällt werden, sind überall gleich.*

Es mögen BA, DC zwey Perpendikel seyn, welche aus Punkten in der einen Parallellinie BD auf die andre Parallellinie AC gefällt sind. Ferner sey F ein Punkt in der Mitte von BD, und FE das Perpendikel aus diesem Punkt auf AC. Alle drey Perpendikel stehn auf beyden Parallellinien zugleich
*25. f. 1. senkrecht *, daher die Winkel um A, E, C, D, F, B insgesammt rechte sind. Dieses vorausgesetzt behaupte ich, daſs das Viereck AEFB sich mit dem Viereck CEFD deckt. Beyden ist die Seite FE gemein. Da ferner die Winkel bey beyden rechte sind, folglich einander decken, und der Construction gemäſs BF = FD ist, so fällt der Punkt B auf D, und da die Winkel bey B und D beyde rechte, also ebenfalls gleich sind, fällt auch BA auf DC. Ueberdem fällt, weil bey E rechte Winkel sind, EA auf EC, folglich auch A auf C, als Durchschnittspunkte zweyer zusammenfallender Linien. Also decken sich die beyden Vierecke, und die Perpendikel AB, CD sind gleich. [Da dieser Beweis für alle Perpendikel gilt, so stehn folglich zwey Parallellinien durchgängig gleich weit von einander
*16. f. 1. ab *, sind lineae aequidistantes; eine Eigenschaft, woraus mehrere die Definition und die ganze Theorie

Theorie der Parallellinien zu gründen gesucht haben, wozu diese Eigenschaft jedoch erst vermöge des folgenden Lehrsatzes tüchtig wird. Siehe Bemerkung 1. am Ende dieses Bandes.]

Zusatz. Grade auf dieselbe Art wird *der umgekehrte Satz* bewiesen, dass eine Linie, welche von einer graden Linie in allen ihren Punkten gleich weit absteht, auch eine grade Linie, und zwar eine Parallellinie mit der erstern seyn muss. Daraus folgt dass eine Linie die mit einer gegebnen Linie parallel läuft, der *geometrische Ort* aller Punkte ist, welche von der gegebnen graden Linie gleich weit abstehn, oder der geometrische Ort für die Aufgabe einen Punkt anzugeben, der von einer gegebnen graden Linie um eine gegebne Linie absteht. Alle Punkte in der Parallellinie und keiner ausser ihr, thun dieser Aufgabe genüge *. * E. 21.

[LEHRSATZ 28.]

Zwey grade Linien in einer Ebne, welche nicht parallel sind, stehn überall ungleich weit von einander ab, und zwar wird ihr Abstand nach der Seite zu, wo sie einander durchschneiden, immer kleiner, nach der entgegengesetzten immer grösser. Fig. 37.

Es mögen AC, BH, zwey grade Linien seyn, welche nach der Seite von C und H hin zusammentreffen Von zwey Punkten B und H der einen, fälle man auf die andere die Perpendikel BA und HC, so muss HC < BA seyn.

Denn man errichte auf der Mitte von AC ein
dritte ſenkrechte Linie EG; ſo muſs, weil beyde Li-
nien ſich nach C und H zu, durchſchneiden ſollen,
* 23. f. dieſer Vorausſetzung gemäſs EGH + GEC < 2R*,
folglich EGH < R *alſo ſpitz ſeyn.* Nun aber läſt
das Viereck GECH ſich wie im vorigen Beweiſe ſo auf
das Viereck GEAB legen, daſs GE, EC, CH, auf GE,
EA, AB, fallen. Geſetzt nun erſtens CH ſey gleich
AB, ſo würden beyde Vierecke völlig einander de-
cken, alſo EGH ein rechter Winkel ſeyn, welches der
Vorausſetzung widerſpricht. Geſetzt zweytens CH
ſey gröſser als AB, ſo würde, indem CH auf AB liegt
der Punkt H in der Verlängerung von AB, über B
hinaus fallen; folglich müſten die Schenkel EG, GH
E.12.β den Winkel EGB einſchlieſsen, alſo EGH > EGB
d. i. der ſpitze Winkel gröſser als der ſtumpfe ſeyn,
welches ungereimt wäre. Alſo muſs nothwendig HC
kleiner als BA ſeyn, alſo der Abſtand zweyer ſolcher
Linien nach der Seite des Durchſchnittspunktes hin
immer kleiner, nach der entgegengeſetzten ſtets grö-
ſser werden.

Die beyden Linien alſo *nähern ſich einander* immer
mehr auf der Seite des Perpendikels, auf welcher der
Durchſchnittspunkt liegt, oder *convergiren* nach dem
Durchſchnittspunkte zu, *entfernen ſich* dagegen *von ein-
ander immer weiter* oder *divergiren* auf der entgegenge-
ſetzten Seite des Perpendikels. Und zwar nimmt hier
ihr Abſtand ohne Gränzen zu, und kann deshalb
gröſser als jede angebliche Gröſse werden.

d. U.

LEHRSATZ 29.

Zwey Winkel BAC, DEF sind gleich, wenn ihre Schenkel nach einerley Seite zu untereinander parallel laufen, d. h. so, daſs je zwey der parallelen auf einerley Seite der andern Schenkel liegen. Fig. 38.

Man verlängere, falls es nöthig ist, den Schenkel DE des einen Winkels, bis er einen Schenkel des andern Winkels in einem Punkte G durchschneidet. Dann werden die beyden Parallellinien EF, AC von einer graden Linie DG durchschnitten, folglich sind, als äuſsere Winkel, DEF, DGC gleich *. Ueberdem sind auch DGC, BAC, als äuſsere Winkel an den Parallellinien GD, AB gleich; folglich auch die Winkel DEF, BAC.

* 25. A.

Anmerkung. Daraus, daſs die Schenkel zweyer Winkel untereinander parallel sind, läſst sich auf die Gleichheit beyder Winkel nur unter der Bedingung schlieſsen, daſs die parallelen Schenkel EF, AC nach einerley Seite der andern parallelen Schenkels ED, AB, und diese nach einerley Seite von jenen zu liegen [qu'ils soyent dirigés dans le même sens; ein Wort dem im Deutschen keins entspricht.] Auch sind die Winkel gleich, wenn die parallelen Schenkel *beyde* auf entgegengesetzten Seiten der andern liegen. Zwey Winkel wie DE'H, BAC, in welchen zwey der parallelen Schenkel E'D, AB diese Lage haben, die beyden andern E'H, AC aber auf entgegengesetzten Seiten der andern Schenkel liegen, sind nicht gleich, sondern ergänzen einander zu zwey rechten Winkeln.

LEHRSATZ 30.

Wenn man die Seite CA eines Dreyecks verlängert, so ist der von der Verlängerung AD und der Fig. 39.

andern nicht verlängerten Seite AB eingeſchloſsne äuſsere Winkel am Dreyeck BAD der Summe der beyden innern ihm entgegenſtehenden Winkel B und C gleich.

Ziehe durch den Winkelpunkt A parallel mit der
*Aufg.6 gegenüberſtehenden Seite BC die Linie AE *. An der die Parallelen durchſchneidenden graden Linie AB ſind die Wechſelswinkel B, BAE, an der andern ſie durchſchneidenden graden Linie CD die äuſseren Winkel C, EAD gleich. Folglich iſt B + C gleich BAE + EAD d. h. gleich dem äuſsern Winkel BAD.

[*Folgerung.* Der äuſsere Winkel iſt alſo gröſser als jeder der beyden Innern die ihm gegenüberſtehn.]

LEHRSATZ 31.

Die drey Winkel eines Dreyecks ſind zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.

Denn da nach dem vorigen Lehrſatz B + C = BAD iſt, ſo wird wenn man beyderſeits den dritten Winkel A hinzufügt, A + B + C = A + BAD = zwey rech-
* 2. ten Winkeln. *

Folgerung 1. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks, oder ihre Summe gegeben wird, ſo iſt auch der dritte Winkel (als der Unterſchied zwiſchen zwey rechten Winkeln und dieſer Summe) *bekannt.* Ihn zu finden lehrt Aufgabe 7.

Sind folglich *in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich, ſo ſind es auch die dritten Winkel*, und beyde Dreyecke gleichwinklig.

Folgerung 2. Kein Dreyeck kann mehr als Einen rechten oder Einen ſtumpfen Winkel haben. Denn hätte es deren zwey, so müsten die drey Winkel zusammengenommen grösser als zwey rechte seyn.

In jedem rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreyeck sind zwey Winkel spitz. Im *rechtwinkligen* beträgt die Summe der spitzen Winkel einen rechten Winkel, und im *rechtwinkligen gleichschenkligen Dreyeck* ist jeder der spitzen Winkel einem halben rechten gleich *. Die Winkel an der Grundlinie eines *gleichschenkligen Dreyecks* sind allemal spitz. * 12.

Folgerung 3. *Im gleichseitigen Dreyeck beträgt jeder Winkel zwey Drittel eines rechten* *. * 12. f.

[*Folgerung* 4. Nimmt man folglich auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels GCB ein beliebiges Stück CG und beschreibt darüber ein gleichseitiges Dreyeck *, so wird dadurch der rechte Winkel in zwey Stücke geschnitten, welche $\frac{2}{3}$ R und $\frac{1}{3}$ R betragen und halbirt man den Winkel im gleichseitigen Dreyeck GCD *, so wird *der rechte Winkel in drey gleiche Theile getheilt.*] Fig. 17. *II.E.11. Z. *Aufg. 5

LEHRSATZ 32.

Die Summe aller innern Winkel eines gradelinigten Vielecks beträgt so vielmal zwey rechte Winkel, als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat.

Es sey Fig. 5. ein Vieleck von beliebig viel Seiten. Zieht man die Diagonale AC so, dass sie ein Dreyeck ABC abschneidet, so bleibt ein Vieleck ACDEFG übrig, welches eine Seite weniger als das erste Vieleck hat, und dessen Winkel zusammengenommen, vermehrt um die Summe der Winkel des Dreyecks ABC,

d. h. um zwey rechte Winkel der Summe der Winkel des erſten Vielecks gleich ſind. — Folglich iſt die Summe aller Winkel eines *Vierecks* der Summe der Winkel eines Dreyecks und zwey rechten Winkeln, d. h. vier rechten Winkeln gleich; die Summe aller Winkel eines *Fünfecks*, der eines Vierecks und zwey rechten Winkeln, d. h. ſechs rechten Winkeln, und ſo ferner, indem die Summe aller Winkel für jede hinzukommende Seite um zwey rechte Winkel gröſser wird. Da nun unſer Satz vom Dreyeck, Viereck, Fünfeck gilt, ſo gilt er auch vom Sechseck u. ſ. w. Folglich beträgt *in jedem Viereck* die Summe aller Winkel ſo vielmal zwey rechte Winkel, als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat. [Geſetzt alſo es habe n Seiten, ſo iſt die Summe aller Winkel dieſes n Ecks gleich $(n-2) \times 2R$.]

Folgerung 1. In einem *gleichwinkligen Vieleck* erhält man die Gröſse jedes Winkels, wenn man die Summe aller, durch die Zahl der Winkel dividirt. Daher iſt *jeder Winkel im gleichwinkligen Viereck* ein rechter, im *gleichwinkligen Fünfeck* $\frac{6}{5}$ R; im *gleichwinkligen Sechseck* $\frac{8}{6}$ R oder $\frac{4}{3}$ R u. ſ. f; [überhaupt im gleichwinkligen n Eck, $\frac{(n-2) \times 2R}{n}$.]

Will man alſo lauter gleichwinklige Figuren von einer gleichen Anzahl von Seiten ſo um einen Punkt in einer Ebne zuſammen legen, daſs ſie ringsumher aneinander ſchlieſsen, und keine Lücke laſſen, ſo läſt ſich das nur mit 6 gleichwinkligen Dreyecken, oder mit 4 gleichwinkligen Vierecken, oder mit 3 Sechsecken, und mit keiner andern gleichwinkligen Figur bewerkſtelligen.]

[*Folgerung* 2. Verlängert man eine Seite des Vielecks, so entsteht ein äusserer Winkel, der als Nebenwinkel des innern, diesen zu zwey rechten Winkeln ergänzt. Verlängert man daher an jedem der Winkelpunkte eines n Ecks eine der Seiten, so sind *die n äussern Winkel des Vielecks*, die dadurch entstehn, *zusammengenommen gleich* dem, was der Summe aller innern Winkel des Vielecks an n rechten Winkeln fehlt, mithin allemal *gleich zwey rechten Winkeln.*

Doch gilt dieses nicht bey *Vielecken mit erhabnen Winkeln**, wiewohl für diese die Aussage des Lehrsatzes * E. 16.
wahr bleibt. Bey ihnen nimmt für jeden erhabnen Winkel die Summe der äussern Winkel mit zwey rechten Winkeln zu.]

[Anmerkung. Der hier geführte Beweis des Lehrsatzes ist unserm Verfasser eigen. Zieht man aus einem willkührlich *im* Vieleck angenommenen Punkte C nach den Eckpunkten grade Fig. 7.
Linien, so entstehn so viel Dreyecke als die Figur Seiten hat, im n Eck also n Dreyecke, deren Winkel zusammengenommen $n \times 2$ R betragen. Die Summe dieser Winkel übertrifft die Summe aller Winkel des n Ecks um die Winkel welche am Punkte C liegen, d. h. um vier Rechte *, oder 2×2 R, daher alle * 5. Z 2.
Winkel des n Ecks zusammengenommen $(n - 2) \times 2$ R betragen. Das ist der gewöhnliche Weg diesen Satz zu beweisen.]

[LEHRSATZ 33.]

Wenn man auf den Schenkeln eines Winkels A Fig. 40.
zwey Perpendikel BD, CE, errichtet, so durchschneiden sich diese unter einen Winkel G, welcher dem Winkel A gleich ist.

Daſs beyde Perpendikel ſich in irgend einem Punkte G durchſchneiden müſſen, folgt daraus, weil ſie ſonſt parallel ſeyn, alſo beyde ſowohl auf dem einen als dem andern Schenkel des Winkels A ſenkrecht ſtehn
*25. f. 1. müſten *, da denn dieſe Schenkel ſelbſt, gegen die Vorausſetzung, parallel wären. Hierbey giebt es nun *zwey Fälle*, je nachdem der Durchſchnittspunkt G auſserhalb der beyden Schenkel des Winkels A, oder zwiſchen ihnen fällt.

Liegt G *auſserhalb* der beyden Schenkel, ſo entſtehn zwey Dreyecke GFB, ACF, worin B und C als rechte Winkel, und überdem die Scheitelwinkel bey F gleich ſind. Folglich ſind auch ihre dritten Winkel A und G gleich, welches zu erweiſen war.

Liegt der Durchſchnittspunkt g der Perpendikel Bg, cg *zwiſchen* den Schenkeln des Winkels A, ſo entſteht ein Viereck ABgc, worin die Winkel bey B und c rechte ſind. Da nun die Summe aller vier Winkel des Vierecks nach dem vorigen Lehrſatz vier rechte beträgt, ſo iſt A + Bgc = 2 R. Es ſind aber auch als Nebenwinkel Bge + Bgc = 2 R, folglich iſt A = Bge, welches zu erweiſen war.

Anmerkung. Im *erſten Fall* iſt alſo *der Winkel den die beyden Perpendikel BG, CG ſelbſt einſchlieſsen*, dem Winkel A gleich. Im *zweyten* iſt es hingegen *der Nebenwinkel des Winkels Bgc*, den die beyden Perpendikel ſelbſt einſchlieſsen, oder der Winkel den eins der Perpendikel und die Verlängerung des andern umſpannt. Auf dieſe Beſtimmung muſs man bey der Anwendung dieſes Satzes, den ich in keinem Syſtem der Geometrie finde, ſorgfältig ſehn.

d. U.

LEHRSATZ 34.

Jedes Parallelogramm wird 1) durch eine Diagonale in zwey sich deckende Dreyecke getheilt; und 2) sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel desselben einander gleich. Fig. 41

Es sey ABCD ein Parallelogramm *, und AC eine Diagonale desselben. Diese bildet mit den beyden Paaren gegenüberstehender paralleler Seiten gleiche Wechselswinkel DAC = BCA und DCA = BAC *, folglich zwey Dreyecke ADC, ABC, die, da sie über die gemeinschaftliche Linie AC beschrieben sind, einander decken *. *25.A.5. * 25. * 7.

Deshalb sind zweytens die sich deckenden Seiten AD, BC, und AB, DC welche im Parallelogramm einander gegenüberstehn, gleich; ferner die gegenüberstehenden Winkel B = D und endlich auch, als Summen der gleichen Winkel DAC + BAC und BCA + DCA, die gegenüberstehenden Winkel A = C.

[*Folgerung* 1. Folglich *sind* überhaupt *Parallelen zwischen Parallelen* (nicht blos rechtwinklige *) *einander gleich.* Wenn z. B AB, CD, und zugleich EF, HI, parallel sind, so ist GH = OI und GO = HI. * 27. Fig. 34.

Daraus folgt dafs der *geometrische Ort* des Endpunkts G einer gegebnen graden Linie OG, welche auf einer zweyten CD unter einer gegebnen Lage, z. B. parallel mit HI aufsteht, eine Parallellinie AB mit der erstern ist. (Apoll. eb. Oert. I. 20) Steht sie auf einem Kreise unter einer gegebnen Lage auf, so ist ihr

Ort ein Kreis, wie aus dem folgenden Buche erhellen wird

Fig. 37. *Folgerung. 2. Werden umgekehrt Parallelen von zwey andern Linien so durchschnitten dass der Abschnitt auf der einen kleiner als auf der andern ist, so convergiren die durchschneidenden Linien* nach der Seite des kleinern Abschnitts zu einander, und treffen hier, gehörig verlängert, zusammen.]

Fig. 41. [Zusatz I. *Ein Parallelogramm wird also durch drey Stücke völlig bestimmt*, nemlich durch *zwey* aneinander liegenden *Seiten*, AB, AD, denen die gegenüberstehenden gleich seyn müssen, und durch *einen Winkel* z. B. den von AB, AD, eingeschlossnen Winkel A. Denn der Winkel C, der diesem gegenübersteht, ist ihm gleich, und die beyden Winkel, welche mit ihm an derselben Seite anliegen, ergänzen ihn wegen des Parallelismus der gegenüberstehenden Seiten zu zwey
* 25. rechten Winkeln *.

Hat folglich *ein Parallelogramm einen rechten Winkel, so sind sie alle recht und die Figur ist ein Rechteck.*

Das Parallelogramm aus drey gegebnen Stücken wirklich zu beschreiben, lehrt mit Hülfe des folgenden Satzes Aufg. 11, wo überdem die Möglichkeit der in Erkl. 19 erwähnten Arten der Parallelogramme dargethan wird.

Zusatz II. Unter allen Parallelogrammen ist das *Rechteck* das einzige das völlig bestimmt ist, wenn zwey Seiten gegeben werden; bey den übrigen kömmt es noch auf den Winkel an, unter welchem diese Seiten gegen einander geneigt ſind. Hierauf gründet ſich der Sprachgebrauch ABCD ein *Rechteck aus den beyden Linien AB, BC*, oder *ein Rechteck unter dieſen Linien* zu nennen, und es lediglich durch dieſe beyden Linien zu bezeichnen, z. B. durch ABBC oder ABC. So bedeutet alſo das Rechteck ABE ein Rechteck, welches aus den beyden Linien AB und BE beſchrieben iſt. Die Alten dehnten dieſen Sprachgebrauch ſelbſt ſo weit aus, daſs ſie ein ſolches Rechteck durch den Ausdruck: *das was zwiſchen den beyden Linien AB und BE eingeſchloſſen iſt*, bezeichneten. Fig. 43

Ein *Quadrat* wird durch eine Seite völlig beſtimmt, daher man die Quadrate durch ihre Seiten characteriſirt. So iſt Fig. 44. ein *Quadrat aus AB* beſchrieben, oder das *Quadrat der Linie AB*.

Zuſatz III. *Zwey Rechtecke aus gleichen Seiten decken ſich*, denn ſie ſind, nach dem was hier geſagt iſt, innerlich einerley, nur in ihrem Ort verſchieden, und müſſen deshalb congruiren *. *Sie haben* alſo auch ſtets einen *gleichen Flächenraum*. *Gr. 9.

Grade ſo *decken ſich zwey Quadrate welche über gleichen Seiten beſchrieben ſind.*

Die Sätze in dieſen Zuſätzen werden uns im dritten Buche von groſsem Nutzen ſeyn. d. U.]

LEHRSATZ 35.

Umgekehrt iſt jedes Viereck, worin die gegenüberſtehenden Seiten [oder die gegenüberſtehenden Winkel] einander gleich ſind, ein Parallelogramm. Fig. 41.

1. Ist im Viereck ABCD, AB = CD, und AD = BC; so theilt die Diagonale AC das Viereck in zwey Dreyecke, welche gleiche Seiten haben, folglich ein-
* 11. ander decken *, worin also die Winkel ACD, CAB und ACB, CAD, die gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich sind. Sind aber diese Winkel gleich, so müssen die einander gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel seyn. Folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

[2. Sind im Viereck ABCD die Winkel A = C, und B = D, so sind auch A + B = C + D. Alle Winkel des Vierecks sind aber zusammengenommen
* 32. vier rechten gleich *. Mithin müssen A + B, folglich auch A + D, zwey rechten Winkeln gleich seyn, und daher die Seiten AD, BC, und AB, DC, paral-
* 25. lel laufen *. Also ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.]

[*Folgerung.* Jedes Viereck mit vier rechten Winkeln ist also ein Parallelogramm, folglich nothwendig
*.E. 19. ein Rechteck *.

Auch ist jeder Rhombus und jedes Quadrat nothwendig ein Parallelogramm.]

[Anmerkung. Sind in einem Viereck zwey der gegenüberstehenden Winkel gleich, die beyden andern ungleich, so können nicht beyde Paar der gegenüberstehenden Seiten parallel laufen; das Viereck ist also ein Trapezium. Und doch wird es durch eine der Diagonalen halbirt. Dieses Merkmal reicht also bey einem Viereck nicht hin es zu einem Parallelogramm zu machen. Dazu wird das Merkmal erfordert, welches Lehrsatz 37 aussagt.]

LEHRSATZ 36.

Wenn zwey Seiten AB, CD eines Vierecks, welche einander gegenüberſtehn, gleich und parallel ſind; ſo ſind auch die beyden andern Seiten AD, BC gleich und parallel, und das Viereck iſt ein Parallelogramm.

Ziehe die Diagonale AC. Dieſe bildet mit den Parallelen AB, CD gleiche Wechſelswinkel BAC, DCA*. * 25.
Da überdem der Vorausſetzung nach die Seiten AB, DC gleich ſind und den Dreyecken ABC, DAC die Diagonale AC gemeinſchaftlich iſt, ſo decken ſich dieſe beyden Dreyecke.* Alſo ſind auch die Seiten * 7.
AD, BC gleich, folglich iſt das Viereck ABCD ein Parallelogramm.* * 34.

[Zuſatz. *Dagegen iſt ein Viereck kein Parallelogramm, wenn zwar zwey gegenüberſtehende Seiten gleich, aber nicht zugleich parallel*, oder wenn ſie parallel aber nicht gleich ſind.* Denn geſetzt ein ſolches Viereck wäre ein Parallelogramm, ſo wären beyde Paar der gegenüberſtehenden Seiten gleich und parallel*, gegen die Vorausſetzung.] * 34.

LEHRSATZ 37.

Die beyden Diagonalen AC, BD eines Parallelogramms theilen einander wechſelſeitig in zwey gleiche Theile. Fig. 42

[*Umgekehrt iſt jedes Viereck, deſſen Diagonalen ſich wechſelſeitig in gleiche Theile zerſchneiden, ein Parallelogramm.*]

In den beyden Dreyecken ADO, CBO ſind die Seiten AD, BC, nicht nur gleich, ſondern auch parallel, folglich ebenfalls die Wechſelswinkel A, C und D, B gleich. Alſo decken ſich beyde Dreyecke, und die den gleichen Winkeln A, C und D, B gegenüberſtehenden Seiten ſind gleich BO = OD, AO
* 7. = OC *. Es halbiren ſich alſo beyde Diagonalen wechſelſeitig.

[Halbiren ſich umgekehrt die beyden Diagonalen eines Vierecks im Punkte O, ſo decken ſich die Dreyecke welche an ihrem Durchſchnittspunkt einander gegen-
* 6. über liegen *, alſo auch die gegenüberſtehenden Seiten, daher das Viereck ein Parallelogramm iſt.

Folgerung. Ein Punkt O welcher in der Mitte der einen Diagonale eines Parallelogramms liegt, muſs folglich auch in der andern Diagonale, und zwar in deren Mitte liegen. Man kann ihn den *Mittelpunkt* des Parallelogramms nennen. Jede grade Linien, welche durch ihn gezogen wird, theilt das Parallelogramm in zwey
* 6. ſich deckende Figuren, und zwar, wenn es keine Diagonale iſt, in zwey ſich deckende Vierecke, wie ſich ohne Schwierigkeit, aus den ſich deckenden Dreyecken, die dann gebildet werden, zeigt.]

[Zuſatz. Da im Parallelogramm je zwey Winkel von Seiten, die untereinander gleich ſind, eingeſchloſſen werden, ſo muſs im ſchiefwinkligen Parallelogramm die Diagonale BD, welche den kleinern Winkeln gegenüberſteht, kleiner als die Diagonale

AC seyn, welche den grössern Winkeln gegenübersteht *. Im *Rechteck* sind dagegen die beyden Diagonalen gleich *, folglich auch die Theile die sie auf einander abschneiden, daher das gleichseitige Rechteck, d. h. das *Quadrat* durch seine beyden Diagonalen in vier untereinander gleichseitige, folglich sich deckende, gleichschenklige Dreyecke getheilt wird.]

* 10.
* 6. f. 2.
Fig. 43.
Fig. 44.
