Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 10. Wenn zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC zweyen Seiten DE, DF eines andern Dreyecks DEF gleich sind, und der Winkel BAC den die erstern einschliessen, ist größer als der Winkel EDF, ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Folgerung. Daraus folgt daſs im Dreyecke jede Seite AC gröſser als der Unterſchied zweyer Seiten
Gr.2.γ BC — BA iſt. Wegen beyder Sätze ſehe man B. II. Erkl. 11. Zuſ.

LEHRSATZ 9.

Fig. 20. *Nimmt man innerhalb eines Dreyecks ABC irgend einen Punkt O, und zieht von demſelben nach den Endpunkten einer der Seiten z. B. der BC, grade Linien OB, OC, ſo iſt die Summe dieſer beyden Linien kleiner als die Summe der beyden andern Seiten des Dreyecks, d. h. als $AB + AC$.*

Man verlängere die Linie BO bis wo ſie die Seite AC im Punkte D trift; ſo iſt im Dreyecke ODC die
. 8. f. Seite $OC < OD + DC$, folglich wenn man beyderſeits BO hinzufügt $BO + OC < BO + OD + DC$ d. i. $BO + OC < BD + DC$.

Nun aber iſt auch im Dreyecke ABD die Seite $BD < BA + AD$, folglich wenn man beyderſeits DC hinzufügt, $BD + DC < BA + AC$. Folglich iſt noch vielmehr $BO + OC < BA + AC$.

Anmerkung. Dagegen iſt der Winkel O den die beyden Linien im Dreyecke umſchlieſsen, gröſser als der Winkel A an der Spitze des Dreyecks. Der Beweis dieſes Satzes beruht darauf, daſs der äuſsere Winkel am Dreyecke gröſser iſt, als jeder der gegenüberſtehenden innern Winkel. Folglich $O > D > A$. Dieſe unmittelbare Folge aus Lehrſatz 30 beweiſt Euklid beſonders, ehe er an den gegenwärtigen Satz kömmt. Bey unſerm Verfaſſer müſte er ein Zuſatz zu Lehrſatz 30. werden.

LEHRSATZ 10.

Wenn zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC
Fig. 21 *zweyen Seiten DE, DF eines andern Dreyecks DEF*

gleich ſind, und der Winkel BAC den die erſtern einſchlieſſen, iſt gröſser als der Winkel EDF, den die andern einſchlieſſen, ſo muſs die dritte Seite BC, im erſten Dreyeck, gröſser ſeyn als die dritte Seite EF im andern Dreyeck, [und iſt umgekehrt BC > EF, ſo muſs auch der Winkel BAC > EDF ſeyn.]

Man denke ſich die Linie AG durch A ſo gezogen, daſs der Winkel CAG dem Winkel D gleich ſey *, mache AG gleich DE * und ziehe GC, ſo decken ſich die Dreyecke GAC und EDF, weil in ihnen der Conſtruction gemäſs zwey Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel gleich ſind *. Folglich ſind die dritten Seiten GC, EF einander gleich. Nun aber ſind in Abſicht der Lage des Punktes G drey Fälle möglich, indem dieſer Punkt entweder auſserhalb des Dreyecks ABC, oder auf die Linie BC, oder innerhalb des Dreyecks liegen kann. *Gr. 7. *Fo.3.α * 6.

Fall 1. Wenn G auſserhalb des Dreyecks ABC liegt. Als dritte Seite im Dreyeck iſt GC < GI + IC *; eben ſo AB < IA + IB; folglich auch GC + AB < GI + IC + IA + IB, d. h. < GA + BC. Nun aber iſt der Conſtruction gemäſs AB = GA. Alſo GC < BC *, und da GC gleich EF iſt, EF < BC. * 8. *G. 2.γ

Fall 2. Wenn G auf BC liegt. Dann iſt GC ein Theil der BC, folglich die der GC gleiche EF, < BC. Fig. 22.

Fall 3. Wenn G innerhalb des Dreyecks ABC liegt. Dann iſt nach dem vorigen Lehrſatz GA + GC < BA + BC, folglich, da GA = BA gemacht iſt, GC < BC, alſo auch die der GC gleiche EF < BC. Fig. 23.

Der Satz gilt alſo für jeden möglichen Fall, d. i. allgemein.

Wollte man den *umgekehrten Satz* leugnen, ſo müſte man behaupten, daſs, wenn BC > EF iſt, der Winkel BAC kleiner oder gleich D ſeyn könnte. Im erſten Fall müſte, nach dem eben bewieſenen, BC < EF; im zweyten Fall, dem folgenden Lehrſatz gemäſs, BC = EF ſeyn, welches beydes der Vorausſetzung widerſpricht. Alſo muſs der Winkel BAC gröſser als D ſeyn.

Anmerkung. In Simpſons Elementen folgt auf dieſen Satz ein ähnlicher Lehrſatz, deſſen Beweis die Theorie der Parallellinien vorausſetzt, und den Le Gendre übergeht, der aber doch gekannt zu werden verdient. Denn obgleich er auch bey Euklid fehlt, ſo iſt er doch, wie Simpſon bemerkt, zur geometriſchen Beſtimmung gröſter und kleinſter Werthe, von groſsem Nutzen. Dieſer Satz lautet wie folgt: *Wenn in zwey Dreyecken*
Fig 24. *ein Winkel ſammt der gegenüberſtehenden Seite gleich, ein zweyter Winkel aber in beyden ungleich iſt, ſo ſteht dem, unter dieſen Winkeln, welcher dem rechten am nächſten kömmt, eine gröſsere*
* Cf. II. 7. 24. 2. *Seite gegenüber* *.

Wenn z. B. zwey Dreyecke (man nehme in unſrer Figur die beyden ſpitzwinkligen ABC und DEF, oder die beyden ſtumpfwinkligen ABC' und DEF', oder ein ſpitzwinkliges und ein ſtumpfwinkliges,) wenn in dieſen Dreyecken der Winkel A = D, die gegenüberſtehende Seite BC = EF iſt, und dabey der Winkel C einem rechten Winkel näher kömmt, als der Winkel F; ſo muſs die Seite AB > DE ſeyn.

Ich theile hier nur Simpſons Vorbereitung zum Beweiſe mit, da ſie für den geübtern den Beweis zu führen hinreicht, der Beweis ſelbſt aber hier nicht an ſeinem Ort ſtehen würde. Aus den Winkelpunkten B, E fälle man auf die gegenüberſtehenden Seiten Perpendikel, nehme auf die Verlängerung dieſer Perpendikel Punkte I und K welche von den Seiten eben ſo weit als die Punkte B, E abstelin, und ziehe IC, KF, so wird mittelst Lehrsatz 6 und 10 bewiesen, daſs IB > KE, folglich das Perpendikel BG im erstern Dreyeck gröſser als das im zweyten EH ist. Vom gröſsern schneide man ein Stück BM, dem kleinern gleich, ab, und ziehe durch den Endpunkt dieses Stücks eine Parallellinie mit AC, so schneidet diese von der Seite AB ein Stück BN ab, welches gleich DE ist, woraus erhellet, daſs DE kleiner als AB ist.

Haben also zwey rechtwinklige Dreyecke gleiche Hypotenusen, so steht dem Winkel, welcher in beyden der gröſsere ist, auch eine gröſsere Seite gegenüber.

LEHRSATZ II.

Zwey Dreyecke die untereinander gleichseitig sind, sind auch untereinander gleichwinklig, und decken sich.* Fig. 19. * E. 20.

Es sey AB = DE, AC = DF, BC = EF, so behaupte ich, daſs auch die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel gleich sind, A = D, B = E, C = F, und daſs sich beyde Dreyecke EDF, ABC einander decken.

Denn gesetzt der Winkel A sey dem Winkel D nicht gleich, so muſs er entweder gröſser oder kleiner als der Winkel D seyn. Da die Seiten welche diese Winkel einschlieſsen der Voraussetzung nach in beyden Dreyecken gleich sind; so müſte, wäre A > D, dem vorigen Lehrsatz gemäſs, auch die dritte Seite BC > EF, wäre dagegen A < D, auch BC < EF seyn, welches der Bedingung daſs BC = EF ist, widerspricht. Also kann der Winkel A weder gröſser noch kleiner als D seyn, muſs folglich