Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 16. Man denke sich von einem Punkte A nach einer graden Linie DE die senkrechte Linie AB, und mehrere schiefaufstehende grade Linien AE, AC, AD etc. gezogen, so ist:
1) die senkrechte AB ...

Katheten AB, BF der Conſtruction gemäſs gleich
*6.Folg. ſind *: folglich wäre der Winkel BCF gleich dem Winkel BCA, welcher der Annahme nach ein rechter iſt. Alſo müſste auch der Winkel BCF ein rechter ſeyn: folglich, weil die Summe der beyden aneinander liegenden Winkel BCA + BCF zwey rechte Winkel be-
* 4. trüge, müſsten CA, CF in einer graden Linie liegen*, folglich wären zwiſchen den beyden Punkten A, F zwey verſchiedne grade Linien ABF, ACF möglich, welches Grundſatz 6 widerſpricht. Alſo ſind zwey verſchiedne ſenkrechte Linien von einem Punkte auſserhalb einer graden Linie, auf dieſe Linie unmöglich.

[*Folgerung.* Alſo iſt kein Dreyeck mit zwey rechten Winkeln möglich.]

[Anmerkung. Daſs auf eine grade Linie durch einen Punkt in ihr nur ein einziges Perpendikel möglich iſt, haben wir ſchon Lehrſatz 1. Zuſatz 2. bewieſen. Wie dieſe Perpendikel zu conſtruiren ſind, lehrt Aufg. 2, 3.]

LEHRSATZ 16.

Fig. 28. *Man denke ſich von einem Punkte A nach einer graden Linie DE die ſenkrechte Linie AB, und mehrere ſchiefaufſtehende grade Linien AE, AC, AD etc. gezogen, ſo iſt:*

1) *die ſenkrechte AB unter allen dieſen Linien die kürzeſte.*

2) *Unter den ſchiefſtehenden Linien ſind je zwey, z. B. AC, AE, welche auf entgegengeſetzten Seiten der ſenkrechten Linie AB gleich weit von B (d. h. ſo daſs BC = BE iſt) aufſtehn, gleich.*

3) *Von allen andern schiefstehenden Linien (z. B. AC, AD oder AC, AE) ist stets die die grössere, welche weiter von der senkrechten aufsteht.*

Man verlängere die senkrechte Linie AB um BF = AB, und ziehe FC, FD.

1. Da nach der Construction die Winkel ABC, CBF rechte, folglich gleich, und auch die Seiten AB, BF gleich sind, so decken sich die beyden über die gemeinschaftliche Seite BC beschriebnen Dreyecke ABC und FBC *. Folglich sind die dritten Seiten AC, CF einander gleich. Nun aber ist die grade Linie ABF kürzer als die gebrochne Linie ACF *, folglich auch AB die Hälfte der ABF kürzer als AC die Hälfte der ACF. Also ist die senkrechte Linie kürzer als jede schiefaufstehende.

* 6.

* E. 5.

2. Wenn BE = BC ist, so decken sich die beyden über AB beschrieben bey B rechtwinkligen Dreyecke ABE, ABC *: folglich sind die dritten Seiten AC, AE, und folglich je zwey schiefstehende Linien, welche gleich weit von B aufstehn, gleich. — Diese Linien müssen aber zu entgegengesetzten Seiten des Perpendikels AB aufstehn, weil sie sonst zwey Punkte A und B gemein hätten, folglich zusammenfielen, und nur Eine, nicht zwey verschiedne grade Linien ausmachten *.

*6. Folg.

*Gr. 6. F. 1.

3. Im Dreyeck ADF ist die Summe der beyden Seiten AD und DF grösser als die Summe der beyden Linien CA und CF, die von einem Punkte innerhalb des Dreyecks nach den Endpunkten der dritten Seite gezogen sind *. Also ist auch AD, die Hälfte von AD +

* 9.

DF grösser als AC, die Hälfte von AC + CF: folglich sind die schiefstehenden Linien länger, die weiter vom Perpendikel ab aufstehn.

Folgerung 1. Die *senkrechte Linie* ist das *wahre Maass des Abstands eines Punkts von einer graden Linie*, weil sie nur auf eine einzige Art vorhanden (2), und zugleich die kürzeste unter allen möglichen Linien ist, die sich vom Punkte zur graden Linie ziehn lassen. [Daher werden wir hinfüro den *Abstand eines Punkts von einer graden Linie*, und umgekehrt den *Abstand einer graden Linie von einem Punkte* stets durch das Perpendikel, welches vom Punkte auf die Linie gefällt wird, bestimmen. Wenn wir von der Grösse *eines solchen Abstands* reden, muss man darunter die Grösse dieses Perpendikels zwischen Punkt und Linie verstehn.]

Fig. 36. [Der *Abstand zweyer Linien AB, CD von einander* hängt vom Abstande der Punkte in der einen, von der andern Linie, ab. Folglich muss dieser Abstand durch die Grösse der Perpendikel BA, FE, DC, die man von den Punkten in der einen BD, auf die andere AC zieht, bestimmt werden. Sind diese Perpendikel insgesammt gleich, so sind die beyden Linien *gleich weit abstehend* (lineae aequidistantes), wo nicht, so sind sie *ungleich weit abstehend*.]

Folgerung 2. *Von einem Punkte lassen sich nach einer und derselben graden Linie nicht drey gleiche grade Linien ziehn.* Denn sonst müste es auf einerley Seite des Perpendikels zwey gleiche (nicht zusammenfallende) schief aufstehende grade Linien geben, welches nach 2 unmöglich ist.

[Zusatz I. Aus der Deckung der beyden Dreyecke ABC, ABE in (2) folgt die Gleichheit der Winkel C = E und der Winkel CAB = BAE ; so wie umgekehrt aus der Gleicheit dieser Winkel und der Seiten AC = AE, oder der Seiten BC = BE die Deckung der beyden Dreyecke. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

α, Die schiefen Linien AC, AE welche gleich weit von *der senkrechten Linie AB abstehn* (d. h. so dass CB = BE ist) sind sowohl gegen die Linie DE, als auch gegen die senkrechte AB beyde unter gleichen Winkeln geneigt.

β, Zwey schiefe Linien AC, AE, die unter gleichen Winkeln C = E auf die grade Linie DE aufstehn, sind gleich ; und überdem gleich weit vom Perpendikel AB entfernt, d. h. so, dass sowohl BC = CE, als auch der Winkel CAB = BAE ist, fallen folglich, wenn sie auf einerley Seite des Perpendikels liegen zusammen (2).

γ, Zwey schief - aufstehende Linien AC, AE die gleiche Winkel mit dem Perpendikel AB machen, sind gleich, und stehn von demselben gleich weit ab.]

[Zusatz. II. Jede der schiefstehenden Linien AE, AC, AD etc. steht auf DE unter ungleichen Nebenwinkeln *, einem spitzen und einem stumpfen auf. * E. 13.
Und zwar *liegt der spitze Winkel mit dem Perpendikel stets auf einerley, der stumpfe Winkel hingegen mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schiefstehenden Linie.* Denn jede schiefstehende Linie z. B. AC bildet

mit dem Perpendikel AB und dem zwifchen beyden liegenden Stück der graden Linie DE ein rechtwinkliges Dreyeck, worin der Winkel der fchiefftehenden Linie vorkömmt, der mit dem Perpendikel auf einerley Seite der fchiefftehenden Linie liegt. Nun ift das Perpendikel AB ftets kleiner als AC (1), folglich auch der Winkel C kleiner als der rechte Winkel B *, folglich jener Winkel ein fpitzer, dagegen fein Nebenwinkel ACD, der mit dem Perpendikel auf entgegengefetzter Seite der fchiefftehenden Linie AC liegt, ein ftumpfer.]

[*Folgerung* 1. Wenn zweyer fchiefftehender Linien AC, AD fpitze Winkel (oder auch ihre ftumpfe Winkel) beyde nach einerley Seite jener Linien zu liegen, fo liegen diefe Linien felbft beyde auf einerley Seite des Perpendikels AB. Wenn dagegen, wie bey AC, AE die fpitzen (oder auch die ftumpfen Winkel auf entgegengefetzten Seiten jener Linien, (folglich gegeneinander gekehrt) liegen, fo liegen diefe Linien beyde auf entgegengefetzter Seite des Perpendikels AB.]

[*Folgerung* 2. Folglich fällt das Perpendikel, welches aus der Spitze eines Dreyecks auf die gegenüberftehende Grundlinie gefällt wird, wenn beyde Winkel an der Grundlinie fpitz find, *innerhalb*, wenn einer diefer Winkel fpitz der andre ftumpf ift, *aufserhalb* des Dreyecks. — Ift keiner der Winel an der Grundlinie ein rechter, fo fällt das Perpendikel in die eine

Kathete

Kathete des rechtwinkligen Dreyecks, weil aus einem Punkt auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist. d. U.

LEHRSATZ 17.

Es sey EF eine auf der graden Linie AB, in deren Mitte C, aufstehendes Perpendikel, so ist 1) jeder Punkt in diesem Perpendikel von den beyden Endpunkten der graden Linie AB gleich weit entfernt; 2) jeder Punkt ausserhalb des Perpendikels hingegen von diesen Endpunkten ungleich weit entfernt. Fig. 29.

1. Da der Voraussetzung gemäſs AC = CB ist, so stehn zwey aus irgend einem Punkte D des Perpendikels nach A und B gezogene grade Linien DA, DB, vom Perpendikel gleich weit ab, sind also gleich. ** 16. 2. Und folglich steht jeder Punkt im Perpendikel von den beyden Endpunkten A, B gleich weit ab.

2. Es sey I ein Punkt ausserhalb des Perpendikels. Zieht man IA, IB, so muſs eine dieser beyden Linien z. B IA das Perpendikel in irgend einem Punkte D durchschneiden. Man ziehe DB. Nun ist IB < ID + DB *, und, da D ein Punkt im Perpendikel ist, * 8. nach (1) DB = DA; folglich IB < ID + DA d. i. < IA, folglich jeder Punkt, ausserhalb des Perpendikels von den Endpunkten A, B ungleich weit entfernt.

Folgerung 1. Umgekehrt muſs jeder Punkt, welcher von zwey Punkten A, B gleich weit absteht, in dem Perpendikel auf AB liegen, welches in der Mitte zwischen diesen Punkten aufsteht. Denn ausser-