Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 22. Wenn auf der geraden Linie AB, eine andere BD senkrecht und eine zweyte AC schief aufsteht, so dass der spitze Winkel BAC nach der Seite jenes Perpendikels zu liegt, so müssen BD, AC ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Anmerkung. Diesen Satz der bey *Euklid* und *Le Gendre* fehlt, habe ich aus *Simpson* entlehnt, den Beweis aber selbst geführt, da Simpson die Hauptsache, dass BC, EF auf einerley Seite des Perpendikels fallen müssen, nicht darthut, wozu ihm Sätze, wie die beym 16ten Lehrsatz nachgetragnen, fehlten. Dass dieser Satz übrigens allein unter der beygefügten Bedingung gilt, erhellt aus dem Beweise. Denn nur unter dieser Bedingung ist es nothwendig dass die schiefstehenden Linien BL, EF, beyde auf einerley Seite des Perpendikels liegen und sich decken. Ohnedem könnten sie wie BL, E'F auf entgegengesetzten Seiten des Perpendikels liegen, und dann würden sie ihrer Gleichheit ungeachtet nicht zusammenfallen. Die Deckung bliebe also ohne jene Bedingung zweifelhaft. — Wie, wenn zwey Linien als Seiten eines Dreyecks, und ein ihnen gegenüberstehender Winkel gegeben sind, das Dreyeck zu finden ist, lehrt Aufg. 10.

d. U.

LEHRSATZ 21.

Fig. 31. *Zwey grade Linien AC, BD, welche auf einer*
* E. 14. *dritten AB senkrecht stehn*, sind parallel, d. h. tref-*
* E. 15. *fen nie zusammen, so weit man sie auch verlängert*.*

Denn gesetzt sie träfen in irgend einem Punkte O
* E. 10. oberhalb oder unterhalb der Linie AB zusammen *; so hätte man einen Punkt O, von welchem zwey verschiedne Perpendikel OA, OB noch derselben graden
* 15. Linie AB giengen, welches unmöglich ist *.

[Hieraus erhellt die Möglichkeit parallaler Linien. — Die 15te Erklärung gehörte also hierher.]

LEHRSATZ 22.

Fig. 32. *Wenn auf der graden Linie AB, eine andere BD senkrecht und eine zweyte AC schief aufsteht, so dass*

der ſpitze Winkel BAC nach der Seite jenes Perpendikels zu liegt, ſo müſſen BD, AC genugſam verlängert [an der Seite der AB, auf welcher der ſpitze Winkel liegt] zuſammen treffen.

Aus verſchiednen Punkten F, C, P, der ſchiefſtehenden Linie AC ſeyen auf AB die Linien FG, CM, PN ſenkrecht gezogen.

Dieſe Perpendikel fallen insgeſammt auf die Seite der AC, auf welcher der ſpitze Winkel liegt *, d. i. der Vorausſetzung nach insgeſammt nach der Seite des Perpendikels BD. Die Punkte G, M, N in welchen ſie auf die AB aufſtehn, können nicht mit dem Punkte A zuſammenfallen, weil BAC kein rechter Winkel iſt. Eben ſo wenig können ſie in der entgegengeſetzten Verlängerung AL der Linie AB liegen. Denn ſonſt müſste das im Punkte A auf AB errichtete Perpendikel AE von dieſen Perpendikeln durchſchnitten werden, (wie z. B. von FH in K)*, und dann wären von dem Durchſchnittspunkte (K) zwey verſchiedne Perpendikel auf AL vorhanden (KA, KH) welches unmöglich iſt *: folglich müſſen die Punkte G, M, N in der Linie AB von A nach B zu liegen.

*16. Z. 2. · * Gr. 8. · * 15

Grade aus denſelben Gründen muſs, wenn AC gröſser als AF iſt, auch der Punkt M von G nach B zu in der Linie AB liegen. Sollte er mit G zuſammenfallen, ſo ſtünden in G auf AB zwey verſchiedne grade Linien GF, GC ſenkrecht, welches unmöglich iſt*. Sollte er in die entgegengeſetzte Seite der AB fallen, ſo würde das Perpendikel aus C das Perpendikel FG durchſchneiden, und aus einem Punkte auſserhalb der

*1. Z. 2.

AB auf ihr zwey verschiedne Perpendikel vorhanden seyn, welches eben so wenig möglich ist. Folglich muss der Punkt M von G nach B zu fallen, so dass AM grösser als AG ist.

Wenn man also auf AC stets in grössern Entfernungen Punkte nimmt, und aus ihnen senkrechte Linien auf AB zieht, so fällt der Punkt wo sie auf AB aufstehn, immer weiter und weiter von A ab. In diesem Wachsthum der Entfernungen AG, AM, AN Gränzen annehmen zu wollen, würde ungereimt seyn. Denn gesetzt man wollte behaupten irgend eine der senkrechten Linien z. B. CM sey die letzte, folglich die, deren Fusspunkt M am weitesten von A abstünde, so liesse sich allemal, auf die Art, wie es hier geschehn ist, dar-
* Fg. 2. thun, dass wenn man die AB verlängert *, ein aus irgend einem Punkte P der Verlängerung auf AB gefälltes Perpendikel PN in einer Entfernung AN, die grösser als AM ist, aufstehn müsste; ein Resultat, welches der Annahme, dass CM die letzte am weitesten von A entfernte senkrechte Linie sey, widerspricht.

Folglich stehn auf AB in jeder beliebigen, noch so grossen Entfernung von Punkte A Perpendikel, die aus einem Punkte der AC gefällt sind, auf: folglich auch in der Entfernung AB, und hier muss das Perpendikel mit der senkrechten Linie BD zusammenfallen, da in einem Punkte B einer graden Linie nur ein ein-
* I. Z. 2. ziges Perpendikel auf diese Linie möglich ist *: folglich müssen die Linen AC, BD genugsam verlängert, in irgend einem Punkte zusammentreffen, und zwar

in der Seite der AB, auf welcher der spitze Winkel BAC liegt.

[Anmerkung. Dieses ist der Fundamentalsatz in der *Lehre von den Parallellinien*, dessen Beweis, wie ihn Le Gendre führt, ich auf das Vortheilhafteste darzustellen, und, (wie man aus den Citaten sehn kann) durch Einschaltung früherer von Le Gendre übergangener Sätze in das System, ich noch besser zu begründen gesucht habe. Aus diesem Satze folgt der 24ste Lehrsatz, dessen Beweis, wie es scheint, *Euklid* für unmöglich hielt, und den in der That noch niemand, so viele Wege man auch eingeschlagen hat, elementarisch und völlig bindend dargethan hat. *Hr. Le Gendre* würde sich daher ein bleibendes Verdienst um die Geometrie erworben haben, wenn der hier mitgetheilte Beweis biedend und ohne Lücke wäre, und sich dagegen nichts anders einwenden liesse, als was Le Gendre selbst in einer Anmerkung erinnert, dass die Idee des Unendlichen dabey mit ins Spiel komme (welches, wenn es nur auf gehörige geometrische Art geschieht, nicht tadelnswürdig seyn könnte). Ich glaube aber an Hr. *Le Gendres* Beweis zweyerley aussetzen zu müssen.

Erstens wird im indirecten Beweise im Ersten Absatz unbewiesen behauptet, dass die als senkrecht angenommene FH das Perpendikel AE durchschneiden müsse; eine Lücke die jedoch leicht auszufüllen ist, wenn man nur die von unserm Verfasser übergangnen, Sätze vom Schneiden der Linien den Principien der Geometrie zufügt, wie ich das zu thun versucht, und deshalb auf Grundsatz 8 verwiesen habe.

Zweytens, und das ist die Hauptsache, thut dieser Beweis zwar überzeugend dar, dass, falls es in der Verlängerung einer graden Linie keine Gränzen giebt, (und dass es die nicht gebe liegt in Forderung 2.) es auch *kein letztes Perpendikel* aus Punkten der AC auf AB *geben könne*. Allein daraus folgt keineswegs, wie im dritten Absatz stillschweigend angenommen wird, dass es *in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte* A *keine Gränze geben könne*. Denn es wäre vielleicht doch denkbar, dass bey gleich weit entfernten Punkten auf der AC, die Perpendikel auf AB immer weniger von einander abſtünden, und ihre Entfernungen vielleicht in einer geometriſchen oder andern unendlichen Reihe die eine endliche Summe hat, abnehmen könnten, da denn für gewiſſe Entfernungen der BD, die AC ſich ihr aſſymptotiſch nähern würde, ohne ſie je zu erreichen. In dieſem Fall *wäre zwar eine Gränze* in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte A auf der Linie AB *vorhanden*, über die heraus für jede Entfernung von A kein Perpendikel aus einem Punkte in der AC die AB mehr duchſchnitte, allein dem ungeachtet gäbe es kein *letztes Perpendikel*, weil es bey allen Annäherungen ohne Ende keinen letzten Zuſtand giebt. Es ſcheint daher etwas übereilt zu ſeyn, wenn *Hr. Le Gendre* im vierten Abſatz aus dem was dargethan iſt (d. h. daraus daſs es kein letztes Perpendikel giebt) unmittelbar folgert, daſs in jeder noch ſo groſsen Entfernung von A ein Perpendikel aufſtehe; eine Folgerung die nur dann gültig wäre, wenn er dargethan hätte, daſs es in der Entfernung der Durchſchnittspunkte der Perpendikel auf der Linie AB, vom Punkte A an gerechnet, *keine Gränze* giebt. So lange er uns dieſes nicht beweiſt (und das möchte auf dem Wege, den er einſchlägt, kaum möglich ſeyn) können wir ſeinen Beweis nicht als bindend erkennen, ſondern müſſen ihn, ſo viel Scharfſinn er übrigens verräth, den nicht ganz geglückten Verſuchen die Schwierigkeit in der Theorie der Parallellinien zu heben, beyzählen. Unſerm Leſer wird er wenigſtens dazu dienen, daſs er einſieht, worauf die Schwierigkeit bey dieſem Satze beruht, welches mehreren, die ſich mit dieſer Theorie beſchäftigt haben, nicht ſcheint recht deutlich geweſen zu ſeyn. — Ueber die Verſuche die Theorie der Parallellinien auf einem andern Wege zu begründen, ſehe man die erſte unter den Bemerkungen, welche dieſen Elementen angehängt ſind.

d. U.

LEHRSATZ 23.

*Fig. 32. *25. An. *Wenn zwey grade Linien AC, BD mit einer dritten AB zwey* innere Winkel* *CAB, ABD*