Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Zweytes Buch. Der Kreis.

ZWEYTES BUCH.

DER KREIS.

Erklärungen.

[Die Vorstellung und die Beschreibung des Kreises gehört zu dem, was der Geometer bey jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, voraussetzt. Sie ist eine eigenthümliche, nicht von andern abgeleitete, und also ursprüngliche Art von Raumbeschreibung, die, sammt den Vorstellungsarten und Begriffen, welche unmittelbar darin liegen, zu den wahren Principien der Geometrie gehört, und schon von Euklid unter den Forderungen der Geometrie an der Spitze des Systems aufgeführt wird. Jeder, wer Geometrie treiben will, muss sich einen Kreis vorstellen, um einen gegebnen Mittelpunkt, mit gegebnem Halbmesser, einen Kreis erzeugen oder beschreiben können; das war unsre dritte Forderung unter den Principien. Die folgenden Erklärungen dienen grösstentheils nur das zu verdeutlichen, was in dieser geforderten Vorstellungsart liegt, und einiges, was unmittelbar daraus fliesst, herauszuheben. d. U.]

1.

Fig. 45. Der *Umfang des Kreises* oder die *Kreislinie* ist eine krumme Linie [welche ganz in einer Ebne liegt] und deren Punkte von einem einzigen Punkte, dem *Mittelpunkte* (*centrum*), insgesammt gleich weit entfernt sind.

Diese

Diese krumme Linie läuft in sich selbst zurück, und schliest einen Theil der Ebne, in welchem der Mittelpunkt liegt, völlig und nach allen Seiten zu ein. Die *Kreisscheibe* ist der von der Kreislinie ringsum begränzte ebne Flächenraum, folglich eine krummlinige ebne Figur *. [Unter *Kreis* pflegt man Kreislinie und Kreisscheibe beyde zusammengenommen zu verstehn. Auch deutet man gewöhnlich den Mittelpunkt des Kreises dadurch an, dass man sagt, der Kreis sey *um ihn* beschrieben.] *I.E. 16.

[Alle Theile der Kreisscheibe, und mithin alle Punkte und alle Linien in ihr, liegen *innerhalb* der Kreislinie, oder *im Kreise*, alle übrigen Theile der Ebene und alle Linien und Punkte in ihnen, *ausserhalb* der Kreislinie. Iene und diese liegen also auf *entgegengesetzten Seiten der Kreislinie* *, und haben in Rücksicht der Kreislinie eine entgegengesetzte Lage.] *I.E.10.

2.

Jede grade Linie zwischen dem Mittelpunkte C und einem Punkt im Umfange, wird ein *Radius* oder ein *Halbmesser des Kreises* genannt; so CA, CE, CD, CB. — Jede grade Linie, welche wie AB durch den Mittelpunkt geht, und von zwey Punkten im Umfange begränzt wird, ist ein *Durchmesser des Kreises.* Daraus folgt:

α) Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich *. So auch alle Durchmesser, deren jeder zwey Halbmessern gleich ist. * E. 1.

[β) Jeder Durchmesser wird vom Mittelpunkte in zwey gleiche entgegengesetzt liegende Theile ge-
*I. E. 10. theilt *.

γ) Jeder Punkt in der Ebne des Kreises steht vom Mittelpunkt um eine grade Linie ab, welche entweder dem Halbmesser *gleich*, oder *kleiner*, oder *größer* als der Halbmesser ist. Im ersten Fall liegt der Punkt in der Kreislinie selbst, im zweyten *innerhalb*, im dritten *ausserhalb* der Kreislinie und des Kreises.

Folglich liegt jeder Halbmesser und jeder Durchmesser ganz innerhalb, jede Verlängerung eines Durchmessers ausserhalb, und nur die beyden Endpunkte desselben auf der Kreislinie, und diese Linie ist der *geometrische Ort* eines Punktes, welcher von einem gegeb-
*I, E. 21. nen Punkte um eine gegebne Linie absteht *. (Apollonius I. 1.)]

3.

Jeder Theil der Kreislinie z. B. FHG ist ein *Kreisbogen*; [die Hälfte der Kreislinie insbesondere ein *Halbkreis*, und der vierte Theil der Kreislinie ein *Quadrant*. Manchmal versteht man unter diesen Benennungen auch die Hälfte oder den vierten Theil der Kreis-
*2 f; 7. Z scheibe. *

Alle Halbkreise, so auch alle Quadranten eines Kreises sind gleich.

4.

Jede grade Linie, welche von zwey Punkten in der Kreislinie begränzt wird, nennt man überhaupt eine *Sehne* oder *Chorde des Kreises*, und ins besondere eine *Sehne des Bogens*, der sich in den beyden Gränzpunkten der Sehne endigt. So ist FG die Sehne des Bogens FHG.

[Folglich ist jeder Durchmesser eine Sehne, und zwar eine Sehne die durch den Mittelpunkt geht *. * E. 2]

5.

Ein *Kreis - Abschnitt* (*Segment*) ist der Theil der Kreisscheibe, der zwischen einem Bogen und dessen Sehne liegt.

Zu jeder Sehne FG gehören zwey verschiedene Kreisbogen FHG, FEG, welche einander zur ganzen Kreislinie ergänzen, mithin auch zwey verschiedne Kreisabschnitte, welche zusammen die Kreisscheibe ausmachen. Häufig spricht man indess nur von *einem* Bogen oder Kreisabschnitt der zu einer Sehne gehört; und dann versteht man darunter den *kleinern* der beyden Bogen oder Abschnitte, es sey denn, dass ausdrücklich das Gegentheil erinnert werde.

Was man unter *ähnlichen Bogen* und unter *ähnlichen Kreisabschnitten* versteht, findet man Lehrsatz 29, Zusatz 3, und im vierten Buche erklärt.

6.

Ein *Kreis - Ausschnitt* (Sector) ist der Theil der Kreisscheibe, der zwischen einem Bogen DE und den beyden Halbmessern CD, CE, welche nach den Endpunkten des Bogens gezogen werden, liegt.

7.

Fig. 46. [*Einen Winkel in einem Kreis-Abſchnitt* BMN nennt man jeden Winkel wie A, deſſen Scheitel i Bogen dieſes Abſchnitts liegt, und deſſen Schenk durch die Endpunkte B, D des Bogens und der Seh gehn. Der Kreisabſchnitt BMND *faſst den Winkel* und der Winkel *iſt in dieſem Kreis-Abſchnitt eing ſchrieben.*

Hieraus erhellt, was ein *Winkel im Halbkreiſe* od ein Winkel der im Halbkreiſe eingeſchrieben iſt, gen will.]

8.

[Von einem *Winkel* deſſen Schenkel eine Kreis nie ſchneiden, ſagt man er *ſtehe auf dem Bogen*, de ſeine Schenkel umfaſſen oder einſchlieſsen, ſo z. der Winkel A auf dem Bogen BED.

Liegt der Scheitelpunkt eines ſolchen Winkels i der Kreislinie, ſo wird er ein *Winkel am Umfange* ge nannt, wie z. B. BAD. Liegt der Scheitelpunkt i Mittelpunkte des Kreiſes, ſo iſt es ein *Winkel am Mitte*

Fig. 45. *punkte*, wie z. B. der Winkel ECD.]

9.

Man ſagt *eine grade Linie iſt in einem Kreiſe einge ſchrieben*, wenn ſie ſich in zwey Punkte des Umfang endigt, (folglich eine Sehne des Kreiſes iſt) wie z. FG.

Ein Winkel iſt im Kreiſe eingeſchrieben, wenn deſſen

Fig. 46. Scheitelpunkt im Umfange liegt wie z. B. ∠ BAD.

Ein Dreyeck ist im Kreise eingeschrieben, wenn die drey Winkelpunkte insgesammt im Umfange liegen, wie z. B. BAD, da denn die Seiten des Dreyecks insgesammt Sehnen des Kreises sind;

und überhaupt nennt man *eine Figur im Kreise eingeschrieben*, (*oder dem Kreise eingeschrieben*,) wenn alle Winkelpunkte der Figur in der Kreislinie liegen, (folglich ihre Seiten insgesammt Sehnen des Kreises sind.) Vom Kreise sagt man dagegen er sey *um diese Figur beschrieben* (*oder der Figur umschrieben.*)

Diese Benennungen behalten dieselbe Bedeutung, wenn man von Linien, Winkeln oder Figuren spricht, die *in Vielecken eingeschrieben* sind, oder von einem *Vieleck, das um ein anderes beschrieben ist.*

10.

Ein Vieleck ist um einen Kreis beschrieben, (oder dem Kreise *umschrieben*,) wenn alle Seiten des Vielecks die Kreislinie *berühren* *. Der Kreis ist dann *in das Vieleck eingeschrieben*, (*oder dem Vieleck eingeschrieben.*)

* E. 11.

[Anmerkung. Noch vor dieser letzten Erklärung stellt Le Gendre folgende auf: „*Eine den Kreis schneidende Linie* ist die, welche die Kreislinie in zwey Punkten trifft; eine *berührende*, die mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat. Eben so haben *Kreislinien die sich berühren* nur einen einzigen Punkt gemein." Allein dieses sind offenbar abgeleitete Sätze, für die man einen Beweis erwartet, und die deshalb keineswegs zu Erklärungen taugen. Statt ihrer schiebe ich die folgenden beyden Erklärungen ein, welche die Fundamentalbegriffe über das Schneiden und Berühren der Kreislinien aussagen, die von Le Gendre angegebenen Merkmale begründen, und eine beträchtliche Lücke in dem System unsers Verfassers ausfüllen. d. U.

II.

[Weil die Theile der Kreisſcheibe und die übrigen Theile der Ebne auf entgegengeſetzten Seiten der Kreislinie liegen, und die Kreisſcheibe ringsum nach
* E. 1. allen Seiten zu von der Kreislinie begränzt wird *; ſo muſs jede ſtetig zuſammenhängende Linie, welche durch einen Punkt *im* Kreiſe und zugleich durch einen Punkt *auſser* dem Kreiſe geht, *ſich mit der Kreislinie in*
* Gr. 8. *irgend einem Punkte durchſchneiden* *. Denn wäre das nicht der Fall, ſo würde der Kreis nach irgend einer Seite zu nicht völlig begränzt ſeyn.

Fig. 47. α) *Alſo müſſen ſich ins beſondere ein Kreis EFD und eine grade Linie AB in irgend einem Punkte E durchſchneiden*, wenn die grade Linie durch einen Punkt innerhalb und einen Punkt auſserhalb der Kreislinie geht. — Grade Linien laſſen ſich aber zu den beyden entgegengeſetzten Seiten jedes Punktes in ihnen ſo weit verlängern, daſs ſie gröſser als jede
* Fo. 2. gegebne Linie werden *; folglich müſſen *alle grade Linien*, *welche* in der Ebne des Kreiſes *durch einen Punkt im Kreiſe gehn*, *gehörig verlängert*, *auch auf bey-*
* E. 2 γ. *den Seiten dieſes Punkts* durch Punkte auſserhalb * der Kreislinie gehn, alſo *die Kreislinie durchſchneiden*. Das geſchieht alſo in *zwey* Punkten, welche in der graden Linie zu entgegengeſetzten Seiten des Punkts im Kreiſe liegen.

Fig. 48. β) Eben ſo *durchſchneiden ſich zwey Kreiſe* wenn der eine HEG durch einen Punkt *im* andern Kreiſe und zugleich durch einen Punkt *auſserhalb* deſſelben, z. B. durch I und H geht. — Das iſt aber allemal der Fall,

wenn die *Summe* ihrer Halbmeſſer AF, BI gröſser und zugleich der *Unterſchied* derſelben kleiner als die grade Linie zwiſchen ihren Mittelpunkten AB iſt. Denn wenn $AF + BI > AB$ und $AF - BI$ oder was auf eins *E. 2.α.
herauskömmt * $AF - BH < AB$ iſt, ſo muſs er- * Gr. 2.
ſtens $AF > AB - BI$ d. h. $> AI$, zweytens $AF < AB + BH$ *, d. h. $< AH$ ſeyn. Folglich iſt I ein *E. 2.γ.
Punkt innerhalb und H ein Punkt auſserhalb der Kreislinie DEF, die mit dem Halbmeſſer AF um A beſchrieben iſt *, daher der Kreis HEIG die Kreislinie DEFG durchſchneiden muſs. Und zwar in einem Punkte E, der auſserhalb der graden Linie AB und ihrer Verlängerung liegt, weil ſonſt die Halbmeſſer BE, BI, BH nicht gleich ſeyn könnten *. *I.16.f.2.

Sind beyde Kreiſe mit *gleichem* Halbmeſſer beſchrieben, ſo werden ſie ſich folglich allemal ſchneiden, wenn ihr Halbmeſſer gröſser als die Hälfte von AB iſt.

Auch muſs jeder Kreis deſſen Mittelpunkt auf einer andern Kreislinie liegt, dieſe durchſchneiden.

Zuſatz. So oft zwey Kreiſe ſich in einem Punkte wie E durchſchneiden, entſteht, wenn man die Halbmeſſer AE, BE zieht, zwiſchen den beyden Mittelpunkten A, B und dem Durchſchnittspunkte E ein *Dreyeck* ABE, welches *gleichſeitig* iſt *, wenn man bey- *I.E.18.
de Kreiſe mit AB als Halbmeſſer beſchrieben hat; blos *gleichſchenklig*, wenn die Länge der Halbmeſſer zwar gleich, aber von AB verſchieden iſt; *ungleichſeitig*, wenn die Halbmeſſer weder untereinander noch mit AB gleich lang ſind. Zwey Kreiſe durchſchneiden ſich aber gewiſs in einem Punkte der auſserhalb der graden

Linie zwischen ihren Mittelpunkten liegt, wenn die Grösse ihrer Halbmesser und die Entfernung ihrer Mittelpunkte den beyden unter β) aufgestellten Bedingungen entsprechen.

So ist also die *Möglichkeit* dieser drey verschiednen Arten von Dreyecken, unabhängig von allen Lehrsätzen des ersten Buchs dargethan, und zugleich *die Construction des Dreyecks aus drey gegebnen Linien A, B, C* festgestellt, als unmittelbare Folge der Kreisbeschreibung, durch die sie unter den angeführten Bedingungen, vor allen Lehrsätzen und Aufgaben dieses Systems, begründet wird. Man beschreibe um die Endpunkte der einen dieser Linien A, mit den beyden andern, als
* Fo. 3 Halbmessern, Kreise *. Wenn die gegebnen Linien den Bedingungen unter β) entsprechen, (d. h. wenn $A < B + C$ und $> B - C$ ist) so durchschneiden sich diese Kreise in irgend einem Punkte ausserhalb der Linie
* Fo. 1. A, und die Halbmesser nach diesem Punkte gezogen* bilden ein Dreyeck, welches, da alle Halbmesser ein-
* E. 2. α. ander gleich sind *, aus den drey gegebnen Linien besteht. Dass diese Construction unmöglich wird, so oft auch nur einer der beyden erwähnten Bedingungen nicht genüge geschieht, wird in Lehrsatz 17 bewiesen werden.

Anmerkung. So wie die Construction des Dreyecks von den Sätzen über das Schneiden zweyer Kreise abhängt, so fliessen umgekehrt diese Sätze aus jener Construction, und in dieser Abhängigkeit trägt sie unser Verfasser im zwölften Lehrsatz dieses Buches vor. Allein mir scheint es nothwendig zu seyn, dass man sie, so weit es hier geschehn ist, im System vor der Construction der Dreyecke aufstelle, da sie diese Construction erst begründen, und ich glaube hierin zum Vortheil des Systems von unserm Verfasser abgewichen zu seyn. Schon *van Swinden* fand sich bewogen die angeführten Bedingungen, unter welche zwey Kreise sich schneiden, unter den *Grundsätzen* der Geometrie aufzustellen (wiewohl die Aussage seines sechsten Grundsatzes mangelhaft ist) und er bemerkt dabey, dass wenn gleich *Euklid* diesen Satz nicht ausdrücklich als *Axiom* aufführt, er sich dessen doch bey seinen drey ersten Sätzen stillschweigend bedient. *Wolf*, sagt er, habe ihn bewiesen, allein der Satz sey Sonnenklar und deshalb ein Axiom. Allein Sonnenklar ist er doch wahrlich nicht, und wird es höchstens erst dann, wenn man ihn, wie ich es hier versucht habe, aus dem Merkmale des Schneidens der Linien ableitet, die man bisher mit Unrecht ausser Augen gelassen hat.

Le Gendre übergeht den Beweis der Möglichkeit der Dreyecke ganz und gar, und lehrt die Construction derselben aus drey gegebnen Linien erst in der 8ten Aufgabe, nachdem er schon viele Eigenschaften des Dreyecks dargethan hat. Ueberdem gründen sich seine Beweise der ersten Aufgaben allesammt darauf, dass zwey Kreise unter den angeführten Bedingungen einander schneiden. Diese Behauptung sagt er aber nirgends ausdrücklich aus, weder als Grundsatz noch als Lehrsatz, sondern nimmt sie immer nur stillschweigend an. Sein System ist folglich in diesen beyden Rücksichten mangelhaft. Doch glaube ich durch die Einschaltung dieser eilften Erklärung und der Sätze über das Schneiden, von welchen sie abhängt, und die sie begründet, in die Prinzipien der Geometrie, diese Lücke ausgefüllt zu haben.

d. U.]

12.

[*Zwey Kreislinien berühren einander*, wenn sie einen Punkt I so miteinander gemein haben, dass die Theile, welche in der einen Kreislinie durch diesen Punkt abgeschnitten werden, beyde auf einerley Seite der andern Kreislinie liegen *; wenn mithin der eine

Fig. 49.

*J.E. 11.

Kreis sich entweder ganz innerhalb, oder ganz ausserhalb des andern befindet *. Im ersten Fall sagt man dass sie sich *innerlich*, im zweyten dass sie sich *äusserlich berühren*.
*E. 1.

Eben so *berühren sich eine grade Linie und ein Kreis*, wenn sie einen Punkt so miteinander gemein haben, dass die beyden durch diesen Punkt abgeschnittnen Stücke der graden Linie, zu einerley Seite der Kreislinie, und zwar beyde *ausserhalb* derselben liegen. Denn Linien innerhalb des Kreises durchschneiden die Kreislinie *, können sie also nicht berühren. — Eine grade den Kreis im Punkte F berührende Linie, z. B. LM, nennt man auch eine *Tangente des Kreises* im Punkte F.]
*E. 11. α
Fig. 47.

[LEHRSATZ I.]

1) *Zwey Kreislinien, welche mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, decken sich, und schliessen Kreisscheiben von gleicher Grösse ein.*

2) *Sind umgekehrt zwey Kreisscheiben gleich, so decken sie sich, und haben gleiche Kreislinien und gleiche Halbmesser.*

Fig. 51.
1. Sind die beyden Kreise ADBK und EGFL mit gleichen Halbmessern beschrieben, und man legt den Mittelpunkt des einen auf den Mittelpunkt des andern, so dass die Kreise in einer Ebne bleiben, so sind alle Punkte in beyden Kreislinien gleich weit von den zusammenfallenden Mittelpunkten entfernt. Also ist dann

kein Punkt in der einen Kreislinie ausserhalb der andern, beyde Kreislinien fallen folglich zusammen, und decken sich, mithin sind auch die Kreisscheiben gleich.

2. Sind die beyden Kreisscheiben gleich, so lege man sie wiederum so auf einander, dass ihre Mittelpunkte zusammen fallen. Gesetzt nun die Kreislinien deckten sich nicht, so müssten sie, nach dem oben bewiesenen, einen verschiedenen Halbmesser haben. Es sey also EO $>$ AC. Dann liegen alle Punkte in der um O beschriebnen Kreislinie ausserhalb der Kreislinie ADBK *, diese wird folglich von jener eingeschlossen, *E. 2. γ.
da denn die Kreisscheibe ADBK nur ein Theil der Kreisscheibe EGFL ist, ihr also nicht gleich seyn kann gegen die Voraussetzung. Wenn also die Kreisscheiben gleich sind, so decken sie sich; und dann sind auch die Kreislinien gleich, und mit gleichem Halbmesser beschrieben.

Folgerung 1. Nicht nur *Gleichheit* und *Ungleichheit zweyer Kreise*, sondern auch die *Congruenz* derselben hängt folglich lediglich von der Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Halbmesser ab. *Euklid* (B. III. Erkl. 1.) nimmt dieses als evident an.

Folgerung 2. Von *zwey concentrischen Kreislinien*, d. h. von Kreislinien die einerley Mittelpunkt C haben, Fig. 47.
schliesst die, welche mit grösserm Halbmesser CD $>$ CG beschrieben ist, die kleinere völlig ein. Beyde haben keinen Punkt gemein, und alle Punkte in beyden, die auf demselben Halbmesser des grössern lie-

gen, ſtehn gleich weit (um den Unterſchied GD der Halbmeſſer) von einander ab.

Folgerung 3. *Zwey Kreiſe, welche ſich ſchneiden oder berühren, können nicht einerley Mittelpunkt haben.* (*Euklid* II. 5 und 6.) Denn in dieſem Fall hätten ſie nicht nur einerley Mittelpunkt, ſondern auch einerley Halbmeſſer, fielen alſo zuſammen, und könnten ſich weder ſchneiden, noch berühren.

Anmerkung. Dieſe für die Lehre vom Kreiſe ſo wichtigen Lehrſätze fehlen bey Le Gendre und ich habe ſie ungeachtet ihres groſsen Nutzens noch in keinem Syſtem der Geometrie bewieſen gefunden. d. U.

LEHRSATZ 2.

Fig. 52. *Jeder Durchmeſſer, z. B. AB, theilt die Kreisſcheibe und die Kreislinie in zwey ſich deckende Theile.*

Denn wenn man den einen der Kreistheile, welche der Durchmeſſer AB abſchneidet, z. B. AEB auf den andern ADB liegt, ſo daſs AB in beyden nach wie vor zuſammenfällt; ſo muſs auch die krumme Linie AEB mit der krummen Linie ADB zuſammenfallen, weil ſonſt in beyden Punkte vorhanden ſeyn würden, die ungleich weit vom Mittelpunkte C abſtänden; ge-
* E. 1. gen den Begriff der Kreislinie *.

Folgerung. Alſo halbirt jeder Durhmeſſer AB die Kreisſcheibe und die Kreislinie, oder theilt beyde in Hälften, (*Halbkreiſe*,) zu denen dieſer Durchmeſſer
*E.3.u 4 als Sehne gehört *. Eines ſolchen Halbkreiſes Flächenraum iſt der Hälfte des Kreiſes, und ſein krummli-

niger Umfang der Hälfte der Kreislinie gleich. In so fern der Durchmesser eine Sehne ist, gehört er zu den Kreisabschnitten; in so fern aber der Durchmesser aus zwey Halbmessern * besteht, zu den Kreisausschnitten. E. 5. u. 6.

[LEHRSATZ 3.]

Wenn eine Kreislinie durch zwey Punkte A, B in zwey gleiche Bogen ADB, AEB, getheilt wird, so ist die grade Linie AB, welche von einem dieser Punkte nach dem andern gezogen wird, ein Durchmesser des Kreises. Fig. 52.

Denn gesetzt AB sey kein Durchmesser, so ist irgend eine andere grade Linie z. B. AF der Durchmesser, der durch den Punkt A geht. Dann sind ADF, AEF vermöge des vorigen Lehrsatzes gleich. Aber ADF ist < ADB und AEF > AEB. Folglich müsste noch mehr ADB > AEB seyn, welches der Voraussetzung dass ADB = AEB ist, widerspricht. Also ist es unmöglich dass eine von AB verschiedne grade Linie AF, mithin nothwendig dass AB ein Durchmesser des Kreises ist.

Anmerkung. Dieser Satz, der umgekehrte des vorigen, fehlt bey Le Gendre und in den übrigen Systemen der Geometrie, obgleich er häufig gebraucht wird. d. U.

[LEHRSATZ 4.]

Jede Sehne ED liegt ganz innerhalb, ihre Verlängerung ganz ausserhalb des Kreises. Fig 47.

Denn zieht man nach den Endpunkten der Sehne die beyden Halbmesser CE, CD, so müssen diese, weil

sie gleich sind, auf die Sehne ED schief, und zwar in
*I. 16. 2. gleicher Entfernung vom Perpendikel aufstehn *. Folglich ist jede grade Linie durch den Punkt C, die auf die Sehne zwischen E und D aufstehet, z. B. CH kleiner als CE, d. h. kleiner als der Halbmesser; hingegen jede auf die Verlängerung der Sehne schief aufstehende grade Linie, wie CI grösser als CE, d. h. grösser als
*I. 16. 3. der Halbmesser *. Mithin ist jeder Punkt der Sehne ED weniger, jeder Punkt in ihrer Verlängerung weiter, als um den Halbmesser, vom Mittelpunkte entfernt, daher die Sehne ganz innerhalb, ihre Verlän-
*E. 2. γ gerung ganz ausserhalb der Kreislinie liegt *.

Folgerung. 1. Also durchschneidet jede Sehne verlängert den Kreis.

Folgerung 2. Die beyden Kreisbogen, so wie die beyden Kreisabschnitte, die zu jeder Sehne gehö-
*Gr. 8. ren, liegen zu entgegengesetzten Seiten ihrer Sehne *. So also auch zwey Halbkreise zu entgegengesetzten Seiten ihres Durchmessers.

Anmerkung. Unser Verfasser übergeht diesen Lehrsatz mit Unrecht, den schon Euklid, doch auf eine andere Art bewies. d. U.

LEHRSATZ 5.

Fig. 52. *Jede Sehne die nicht durch den Mittelpunkt geht, ist kleiner als der Durchmesser.*

Denn wenn man aus den Endpunkten der Sehne AF die Halbmesser AC, FC zieht, so entsteht ein Dreyeck, worin $AF < AC + CF$, folglich kleiner
*E. 2. als der Durchmesser des Kreises ist *.

Folgerung. Alſo iſt der Durchmeſſer unter allen Sehnen und unter allen graden Linien, die ſich in einen Kreis einſchreiben laſſen, die gröſste.

[Jede begränzte grade Linie, die durch einen Punkt im Kreiſe geht, und gröſser als der Durchmeſſer iſt, muſs folglich die Kreislinie ſchneiden.]

LEHRSATZ 6.

Eine grade Linie kann nicht mehr als zwey Punkte mit einem Kreiſe gemein haben.

Denn geſetzt ſie könnte mit dem Kreiſe drey Pnnkte gemein haben, ſo müſsten dieſe drey Punkte vom Mittelpunkte des Kreiſes gleich weit entfernt ſeyn. Folglich gäbe es einen Punkt, von welchem ſich nach einer graden Linie drey gleiche grade Linien ziehen lieſen, welches unmöglich iſt *; daher kein Kreis mit einer graden Linie mehr als zwey Punkte gemein haben kann. * I. 16. f. 2.

LEHRSATZ 7.

In einerley Kreiſe, oder in zwey gleichen Kreiſen, gehören zu gleichen Bogen, gleiche Sehnen, und umgekehrt zu gleichen Sehnen, gleiche Bogen. Fig. 51.

1. Denn wenn die Halbmeſſer AC, EO, folglich die mit ihnen beſchriebnen Kreiſe AHBK, EGFL gleich ſind, ſo decken ſich die beyden Kreislinien *. * I. Sind alſo AD, EG gleiche Bogen, ſo laſſen ſie ſich ſo aufeinander legen, daſs ihre Endpunkte E, A und G, D zuſammenfallen, da denn die Sehnen EG, AD,

als grade Linien zwischen denselben Endpunkten, gleichfalls zusammenfallen müssen *, also gleich sind.
* Gr. 6.

2. Sind dagegen die Sehnen AD, EG gleich, und man zieht die Halbmesser AC, DC, EO, GO, welche der Voraussetzung nach insgesammt gleich sind, so müssen die Dreyecke ADC, EGO sich decken, folglich die Winkel C, O gleich seyn. Legt man also die sich deckenden Halbkreise AHB, EGF so auf einander, dass die Mittelpunkte, und die Punkte E und A, folglich die Halbmesser AC, EO, mithin auch jene Dreyecke, und ihre Eckpunkte G und D zusammenfallen, so decken sich die Bogen AD, EG, sind also gleich.

Derselbe Beweis gilt für verschiedne Bogen und Sehnen *eines* Kreises.

[Zusatz. Aus diesem Beweise erhellt zugleich:

1. Dass *in einerley Kreise oder in zwey gleichen Kreisen, zu gleichen Bogen gleiche Kreisausschnitte* ACD, EOG, *gehören* * und umgekehrt.
* E. 6.

2. *Dass in ihnen zu gleichen Sehnen AD, EG* (folglich auch zu gleichen Bogen) *gleiche Winkel am Mittelpunkte* O, C, und umgekehrt zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Sehnen und gleiche Bogen *gehören*, indem wegen Gleichheit der Halbmesser, so bald eins jener Stücke gleich ist, die Dreyecke ADC, EGO, einander decken.

Fig. 52. 3. Dass zwey Durchmesser wie AB, DE, welche auf einander senkrecht stehn, die Kreislinie sowohl als die Kreisscheibe in vier gleiche Theile, folglich in *Quadranten** zerschneiden. Denn sie bilden vier rechte,
* E. 3.

folg-

folglich gleiche Winkel am Mittelpunkte. — Jeder Winkel am Mittelpunkte ACD, der ein rechter Winkel ist, umspannt folglich einen Quadranten des Kreises.]

LEHRSATZ 8.

So lange von Bogen die insgesammt kleiner als der Halbkreis sind die Rede ist, gehört in einerley Kreis oder in gleichen Kreisen, zum grössern Bogen eine grössere Sehne, [ein grösserer Winkel am Mittelpunkte und ein grösserer Kreisabschnitt,] und umgekehrt. Fig. 51.

Denn ist der Bogen AIH > AID, so schliesst der Winkel am Mittelpunkte ACH den Winkel am Mittelpunkte ACD ein, ist also grösser als dieser *. Da nun diese Winkel beyde von Halbmessern, also von gleichen Schenkeln eingeschlossen werden, so ist in den Dreyecken ACH, ACD die dritte Seite AH > AD. * Folglich gehört zum grössern Bogen, der grössere Winkel am Mittelpunkte, und die grössere Sehne.

*I. E12β

* I. 10.

Ist umgekehrt die Sehne AH > AD so folgt eben so dass der Winkel ACH den Winkel ACD einschliesst, also der Bogen AIH > AID ist. Und ist der Winkel ACH grösser als ACD so muss, weil beyde von gleichen Seiten eingeschlossen werden, der grössere eine grössere Sehne, mithin auch einen grössern Bogen umspannen.

Anmerkung. Da den grössern unter zwey Bogen AID, AIH zum ganzen Kreise ein kleinerer Bogen AKBH < AKBD ergänzt; so gilt für *Bogen die grösser als der Halbkreis sind*, grade

das Gegentheil. Grösere Bogen haben kleinere Sehnen und umgekehrt, [Was aber die Winkel betrifft, so gilt für sie der Satz allgemein, wenn man *hineingehende Winkel* (angles rentrants) * mit in die geometrische Betrachtung aufnimmt, da denn
*I. E. 16.
zu Bogen gröser als der Halbkreis, *Winkel gröser als zwey Rechte* gehören. Von solchen Winkeln haben die grösern kleinere Ergänzungen zu vier Rechten]

LEHRSATZ 9.

Fig. 53. *Ein Halbmesser, welcher senkrecht auf eine Sehne steht, theilt die Sehne und ihren Bogen beyde in zwey gleiche Theile.*

Es sey CD senkrecht auf die Sehne AB, so stehn die Halbmesser CA, CB, welche man nach den Endpunkten der Sehne zieht, auf die Sehne schief auf, müssen sie also, da sie gleich sind, in gleicher Entfernung vom Perpendikel durchschneiden *, so dass AD = DB ist.
*I. 16. 2.

Ist nun der Halbmesser CG ein Perpendikel, welches in der Mitte der Sehne AB aufsteht; so sind alle Punkte desselben von den Endpunkten A, B der Sehne gleich weit entfernt *, also auch die Punkte G und H, so dass AG = GB, AH = HB ist. Zu diesen Linien, als gleichen Sehnen, gehören gleiche Bogen AG, GB und AH, HB *; mithin werden auch die zur Sehne AB gehörige Bogen AGB und AHB, beyde vom Halbmesser CD halbirt *.
* I. 17.
* 7.
*Au. 5. 1.

Folgerung 1. *Der Mittelpunkt C des Kreises, und die beyden Punkte D in der Mitte einer Sehne und G in der Mitte des dazu gehörigen Kreisbogens, liegen also immer in grader Linie, und zwar in einem Perpendikel auf die*

Sehne. Eine grade Linie die durch zwey dieser Punkte geht, muss also nothwendig auch durch den dritten gehn, und ein Perpendikel auf die Sehne seyn *. * Gr. 6. f. 1.

Folgerung 2. Umgekehrt *muss ein Perpendikel welches auf die Sehne in ihrer Mitte errichtet ist, durch den Mittelpunkt gehn*, indem durch einen Punkt nur ein einziges Perpendikel auf eine grade Linie möglich ist *. * I. 15.

[*Folgerung* 3. *Zwey Sehnen AB, DE deren keine ein Durchmesser ist, durchschneiden sich nicht unter rechte Winkel, und halbiren sich nicht.* Fig. 79.

Denn ist keine von beyden ein Durchmesser, so liegt der Mittelpunkt C des Kreises ausserhalb beyder; folglich auch die grade Linie CO vom Mittelpunkte nach dem Durchschnittspunkte O beyder Sehnen. Gesetzt nun sie durchschnitten sich im Punkte O rechtwinklig, so stünden in diesem Punkte zwey verschiedene grade Linien DO, CO auf die dritte AB senkrecht, welches unmöglich ist. Gesetzt beyde Sehnen halbirten sich im Punkte O, so stünde CO auf beyden in ihrer Mitte, also senkrecht, auf, folglich AO, DO beyde im Punkte O auf CO senkrecht, welches gleichfalls unmöglich ist.]

[*Folgerung* 4. *Auf jeder graden Linie PQ, welche zwey concentrische Kreise durchschneidet, werden zwischen den Kreislinien zwey gleiche Stücke PR, QS abgeschnitten.* Fig. 47.

Für Durchmesser ist dieser Satz schon oben bewiesen *. Geht die Linie PQ nicht durch den Mittel- * 1. f. 3.

punkt, so fälle man aus diesem auf ihr ein Perpendikel CV. Dieses halbirt sowohl die ganze Linie PQ, als auch das Stück RS, welches im kleinern Kreise liegt, als Sehnen beyder Kreise, daher VP — VR = VQ — VS, folglich PR, QS gleich seyn müssen.]

LEHRSATZ 10.

Fig. 54. *Durch drey gegebne Punkte A, B, C, welche nicht in grader Linie liegen, läſst sich stets eine Kreislinie, und zwar nur eine einzige Kreislinie ziehn.*

Verbinde die gegebnen Punkte durch die graden Linien AB, BC, halbire diese, und errichte auf ihrer Mitte die senkrechten Linien DH, FG, so müssen diese sich in irgend einem Punkte O durchschneiden. Denn gesetzt sie durchschnitten sich nicht, so wären sie parallel *, folglich stünde die Linie AD, welche auf DO senkrecht ist, gehörig verlängert auf beyde senkrecht *. Nun aber fällt die Verlängerung der Linie AB mit BC nicht zusammen, weil die drey Punkte A, B, C nach der Voraussetzung nicht in grader Linie liegen. Also gäbe es vom Punkte B zwey verschiedne Perpendikel BE, BF auf dieselbe grade Linie OF, welches unmöglich ist *. Die Perpendikel DH, FG müssen sich also nothwendig in irgend einem Punkte O durchschneiden.

*I. E. 15. *I. 25. f. 1. * I. 15.

Dieser Punkt steht gleich weit von den Endpunkten sowohl der Sehne AB, als auch der Sehne BC ab, weil er in den Perpendikeln liegt, die auf der Mitte dieser Sehnen errichtet sind. Also sind OA, OB, OC gleich, und eine mit dem Halbmesser OB um den

Punkt O beſchriebne Kreislinie, muſs durch die drey gegebnen Punkte A, B, C gehn *. Es iſt alſo alle. *E. 2. 7
mal möglich durch drey Punkte, welche nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beſchreiben *. *Au. 12.

Durch drey Punkte läſst ſich aber auch nur *eine einzige Kreislinie* beſchreiben. Denn geſetzt es wäre durch die drey Punkte A, B, C noch eine zweyte, von der erſten verſchiedne Kreislinie möglich, ſo müſte auch der Mittelpunkt dieſer ſowohl im Perpendikel DH als auch im Perpendikel FG, die in der Mitte der Sehnen aufſtehn, liegen *, beyde Perpendikel würden ſich al- *9. f. 2.
ſo in zwey verſchiednen Punkten durchſchneiden *, *1. f. 1.
welches unmöglich iſt *. *Gr. 6 f 4

Folgerung 1. Alſo *können zwey verſchiedne Kreislinien nicht mehr als zwey Punkte mit einander gemein haben.* Denn wären ihnen drey Punkte gemein, ſo hätten ſie einerley Mittelpunkt, wären alſo einerley Kreis, nicht zwey verſchiedne Kreiſe *. *1. f. 1.

[*Folgerung* 2. Durch die drey Winkelpunkte jedes Dreyecks läſst ſich ein Kreis beſchreiben, worin jede der Seiten eine Sehnen wird. Da nun die Perpendikel auf die Mitte dieſer Sehne, alle drey durch den Mittelpunkt gehn, ſo erhellt hieraus eine artige Eigenſchaft der Dreyecke, *daſs nemlich Perpendikel auf die Mitte der Seiten eines Dreyecks errichtet, ſich ſtets alle drey in einem Punkte durchſchneiden*, und zwar im Mittelpunkte eines Kreiſes, welcher dem Dreyeck umſchrieben iſt.]

LEHRSATZ II.

Fig. 55. 1) *Gleiche Sehnen ſind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, [und umgekehrt ſind alle Sehnen, die gleich weit vom Mitttelpunkte abſtehn, gleich.]*

2) *Von zwey ungleichen Sehnen iſt die Kleinere weiter als die Gröſsere vom Mittelpunkte entfernt.*

1. Es mögen die Sehnen AB, DE gleich ſeyn, ſo ziehe man auf ſie aus dem Mittelpunkt die ſenkrechten Linien CF, CG und die Halbmeſſer CA, CD. Die ſo entſtehenden rechtwinkligen Dreyecke ACF, DCG decken einander, weil ihre Hypotenuſen CA, CD als Halbmeſſer, und eine ihrer Katheten AF, DG als die
* I. 19. Hälften gleicher Sehnen gleich ſind *. Alſo ſind auch die dritten Seiten CF, CG, d. h. die Entfernung der
I.16.f1 Sehnen vom Mittelpunkte gleich. Iſt umgekehrt dieſe Entfernung für zwey Sehnen AB, DE gleich, ſo müſſen aus denſelben Gründen die halben Sehnen AF, DG mithin auch die Sehnen ſelbſt gleich ſeyn.

2. Iſt hingegen die Sehne AH > DE, ſo iſt auch
* 8. der Bogen ANH > DME *, daher es auf ihm einen Punkt B geben muſs, für welchen ANB = DME iſt. Zieht man die Sehne AB, und fällt auf ſie das Perpendikel CF, ſo wie auf AH das Perpendikel CI, ſo iſt offenbar CF > CO [indem AH mithin auch O zwiſchen den Punkten C, F liegt] und wiederum CO > CI als Hypotenuſe im rechtwinkligen Dreyeck COI; alſo noch viel mehr CF > CI. Nun aber gehören die Sehnen AB, DE der Conſtruction nach zu gleichen Bo-
* 7. gen, ſind alſo gleich*, und ſtehn folglich gleich weit

vom Mittelpunkte ab, so dafs CF = CG ist. Folglich mufs auch CG > CI seyn, also die kleinere Sehne DE weiter als die gröfsere AH vom Mittelpunkte abstehn.

Zusatz. Also mufs auch von zwey Sehnen, welche ungleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, diejenige die kleinere seyn, welche weiter vom Mittelpunkte absteht.

LEHRSATZ 12.

Jede grade Linie welche auf einem Halbmesser Fig. 56
in dessen Endpunkte senkrecht steht, berührt den Kreis;

und durch jeden Punkt der Kreislinie ist nur eine einzige Tangente möglich.

1. Ist die grade Linie BD auf den Halbmesser CA in dessen Endpunkte A senkrecht, so steht jede andre grade Linie z. B. CK die durch den Mittelpunkt geht,
auf BD schief auf *, mufs also gröfser als das Perpen- * I. 15.
dikel CA seyn *. Folglich liegt der Durchschnitts- *I. 16. 3.
punkt derselben mit BD weiter als um den Halbmesser
vom Mittelpunkte ab, d. h. aufserhalb des Kreises *. * E. 2.
Und also liegt auch die ganze Linie BD aufserhalb des Kreises. Sie berührt mithin die Kreislinie im Punkte
A, welchen sie mit ihr gemein hat *, und ist eine *E. 12. α.
Tangente des Kreises im Punkte A.

2. Gesetzt nun es gäbe aufser dieser Tangente BD noch eine zweyte grade Linie, EF, welche die Kreislinie im Punkte A berührte, so könnte diese nicht
senkrecht auf dem Halbmesser CA seyn *. Der Halb- * I. 15.

messer BA würde also auf ihr schief aufstehn, und folglich müste das Perpendikel aus dem Mittelpunkte
*I.16.1. auf diese Linie, kleiner als CA seyn *. Diese zweyte
* E. 2. Linie EF gienge also durch einen Punkt *im* Kreise *,
*.E. 11. muss also nothwendig den Kreis durchschneiden *, und kann ihn nicht berühren. Daher ist ausser der Linie BD, welche senkrecht auf dem Halbmesser in seinem Endpunkte aufsteht, keine andre grade den Kreis berührende Linie durch den Punkt A möglich.

[*Folgerung* .1 *Folglich muss* 1) *eine grade Linie* **CA**, *welche durch den Mittelpunkt des Kreises nach dem Berührungspunkte A gezogen wird, stets senkrecht auf die Tangente stehn;* und 2) *eine grade Linie welche senkrecht auf die Tangente im Berührungspunkte errichtet wird, stets durch den Mittelpunk des Kreises gehn.* Denn keine andre grade Linie berüht den Kreis, als die, welche auf dem Radius in dessen Endpunkte senkrecht steht; und durch einen Punkt einer graden Linie ist nur ein einziges Perpendikel möglich.]

[*Folgerung* 2. *Zwey Tangenten, welche durch die Endpunkte eines Durchmessers gezogen werden, laufen parallel*; denn sie stehn beyde auf dem Durchmesser senk-
* I 21. recht *.

Sind umgekehrt zwey Tangenten eines Kreises parallel, so ist die grade Linie durch die Berührungspunkte stets ein Durchmesser. Denn ein Durchmesser nach dem einen Berührungspunkte gezogen, steht auf der einen Tangente, folglich auch auf der mit ihr parallelen Tan-
*I.25.f.1 gente senkrecht *, muss also auch durch den zweyten Berührungspunkt gehn.

Mit einer Sehne, welche kein Durchmeſſer iſt, machen die Tangenten durch ihre Endpunkte ſpitze obſchon gleiche Winkel, und zwar mit den kleinern Sehnen ſpitzere Winkel. Denn die Halbmeſſer durch ihre Endpunkte ſtehn unter gleichen, und zwar auf den kleineren Sehnen unter gröſseren Winkeln auf.

Durchſchneiden ſich umgekehrt zwey Tangenten, ſo iſt die grade Linie durch ihre Berührungspunkte eine Sehne, die kleiner als der Durchmeſſer iſt.]

[*Folgerung* 3. Eine grade Linie IK, welche den Innern zweyer *concentriſchen Kreiſe* berührt, wird durch den Berührungspunkt H halbirt. Denn ſie iſt Sehne des gröſsern Kreiſes und CH ſteht auf ihr als einer Tangente am kleinern ſenkrecht *.] T. III. Fig. 4. * 9.

[*Folgerung*. 4. *Jede grade Linie welche einen Kreis durchſchneidet, muſs ihn in zwey Punkten durchſchneiden.* Denn durchſchneidet EF den Kreis im Punkte A, und man zieht den Halbmeſſer CA, ſo ſteht dieſer auf ſie ſchief auf, nicht ſenkrecht, (denn ſonſt würde EF die Kreislinie nach dem eben geführten Beweiſe nicht durchſchneiden). Folglich giebt es eine zweyte auf EF ſchiefaufſtehende Linie CG welche der CA, das iſt dem Halbmeſſer, gleich iſt, alſo einen zweyten Punkt G, welcher der graden Linie EF und der Kreislinie gemein iſt, das heiſst, einen zweyten Durchſchnittspunkt. Daſs es keinen dritten geben könne ſagt Lehrſatz 6.] Fig. 56.

[Zuſatz. So oft alſo eine grade Linie EF einen Kreis durchſchneidet, wird ein Stück von ihr AG ei- Fig. 58.

ne Sehne des Kreises, und dieses liegt ganz innerhalb
* 4. der Kreislinie *. Dagegen liegt die Tangente AD
ganz ausserhalb der Kreislinie. Folglich muss stets
zwischen beyden ein Bogen AHG liegen, so dass er von
AD und AG eingeschlossen wird. Gesetzt also man
wollte sich nach Analogie gradeliniger Winkel hier ei-
nen *krummlinigen Winkel* GHAD vorstellen, so würde
dieser stets von dem gradelinigen GAD eingeschlossen,
*I.E. 12. müste also *kleiner* als dieser seyn *. Nun aber kann der
gradelinige GAD kleiner gedacht werden, als jeder an-
gebliche Winkel; und so klein er auch gedacht wird,
so durchschneidet AF, weil es nur *eine* Tangente (AD)
giebt, allemal den Kreis, wäre also immer der krumm-
linige noch kleinere Winkel GHAD vorhanden.
Folglich müste dieser Winkel kleiner als jeder angeb-
liche seyn, könnte also gar keine Grösse haben, müste
also gleich o seyn.

Folglich machen im Berührungspunkte der Kreis und die Tangente gar keinen Winkel, beyde fallen zusammen, und will man hier doch von einem sogenannten *Berührungswinkel GHAD* sprechen, so ist dieser gleich o, d. h. er hat gar keine Grösse, ist gar nicht vorhanden.

Fig. 57. Hierauf beruht die Vorstellung *krummliniger Winkel.* Denn da im Berührungspunkte Tangente und Kreis zusammenfallen, keinen Winkel mit einander machen, so muss auch ein Kreisbogen AH mit irgend einer graden Linie AB denselben Winkel als seine Tangente IAK machen, und eben so zwey Kreisbogen AH AL mit einander denselben Winkel als ihre Tangen-

ten im Punkte A, AI, AB. Und diese Begriffe lassen sich in der höhern Geometrie auch auf alle andere krumme Linien übertragen.

Mithin *steht* insbesondere *jeder Halbmesser auf der Kreislinie senkrecht*; denn er macht mit der Tangente im Berührungspunkte rechte Winkel. — Jede Sehne, welche kein Durchmesser ist, macht dagegen in ihrem Endpunkte mit der Kreislinie ungleiche Winkel. — Endlich *stehn zwey concentrische Kreise überall gleich weit von einander ab*. Denn da die Halbmesser auf beyden senkrecht stehn, so geben die abgeschnittnen Stücke der Halbmesser den Abstand beyder von einander an *, *I.16.f 2 und diese Stücke sind überall gleich *] *1. f. 2.

[Anmerkung 1. Ein Winkel ist die Lage zweyer *grader* Linien gegen einander*. Krummlinige Winkel denken zu *I·E. 12. wollen, wäre also ungereimt, wenn nicht im Berührungspunkte die Tangente und die krumme Linie zusammenfielen, also krummlinige Winkel sich durch den Winkel der Tangenten im Berührungspunkte denken liessen. So muss man daher diesen Begriff erklären.

Nur eine grade Linie hat in allen ihren Theilen gegen eine Fig. 58. andre einerley Lage, und also lässt sich nur bey ihr aus der Lage eines Stücks GF auf die Lage der Linie bey A schliessen. Eine krumme Linie hat in allen noch so kleinen Theilen eine verschiedene Lage gegen eine grade Linie AB. Man kann also aus der Lage der Theile H, I nicht wie bey graden Linien auf die Lage der Theile im Punkte A schliessen. Man sieht daher auf welchen Missverstand folgende Einwendung gegen das hier Vorgetragne beruht. „Gesetzt HA, IA wären zwey Bogen die beyde die grade Linie AD im Punkte A berührten *, so müsten die Winkel * E. 12. HAD, IAD beyde 0, also beyde gleich seyn. Nun aber schliesst der Winkel IAD den Winkel HAD ein; also muss er grösser als HAD ſeyn, welches dem vorigen widerſpricht. Alſo kann der Berührungswinkel nicht gleich null ſeyn." Aber die Schlusfolge, *alſo muſs er gröſser als HAD ſeyn*, iſt falſch. Sie gilt dem angeführten nach nur für gradelinige Winkel, keinesweges für die Lage krummer Linien, auf deren Lage im Punkte A wir aus der Lage in H und I nicht ſo unmittelbar ſchlieſsen können. Daraus daſs der Bogen AI den Bogen AH einſchlieſt läſst ſich einzig und allein das folgern, daſs der einſchlieſsende Bogen *ſchneller* von der Tangente, als der eingeſchloſsne abweicht, daſs er mithin *krummer* oder *convexer*, der Bogen AH dagegen *flächer* oder *weniger gebogen iſt*, und mehr nichts.

Und doch haben geſchickte Mathematiker ſich jenen Trugſchluſs nicht nur zu Schulden kommen laſſen, ſondern ſogar mit Hitze als Wahrheit vertheidigt. (Man ſehe *Clavius* und *Taquets* Ausgaben *Euklids* B. 3. S. 16 beſonders die erſtere, wo dieſe Materie auf 20 klein gedrukten Octavſeiten mit den Gründen dafür und dawider ausgeführt wird; auch Clavius Werk de triangulis planis et ſphaericis und in *Wallis* Opera Mathematica Tom. II, p. 605 die Abhandlung de angulo contactus et ſemicirculi.) Ueberhaupt gehört dieſe an ſich nicht ſehr ſchwierige Materie zu den am mehrſten miſsverſtandnen in der reinen Mathematik. Selbſt *van Swinden* geräth hier in die irrige Meynung: „wenn man behaupte der krummlinige Winkel GHAD ſey kleiner als der gradelinige GAD, ſo ſtelle man keine Vergleichung zwiſchen den bloſsen Neigungen (Lagen) dieſer Linien an, *ſondern zwiſchen dem Raume den dieſe Winkel einſchlieſsen*, und verweiſt deshalb auf *Vietae Opera p. 382.* Das wäre aber doch fürwahr eine Sonderbarkeit der erſten Gröſse, wenn man an Flächenräume dächte und von Winkeln ſpräche, und etwas das mit der gerühmten Genauigkeit der Geometer gar ſehr im Widerſpruch ſtände.

Man ſieht hier abermals eine Probe, wie es in der Geometrie, da wo es auf Lage ankömmt, noch manches aus einer ſorgfältiger entwickelten Theorie der Lage, zu berichtigen und zu ergänzen giebt. *Le Gendre* hat dieſe Materie vom Berührungswinkel, die schon Euklid richtig vorträgt, sehr mit Unrecht ausgelassen; so auch *Thomas Simpson*. Hielten sie sie etwa noch für streitig, oder für zu schwierig. Für beydes erkennt sie nicht

d. U.

Anmerkung 2. *Die berührende Linie ist die Gränze für alle schneidende Linien, welche auf dem Durchmesser, der durch den Berührungspunkt geht, senkrecht stehn.* Denn die beyden Durchschnittspunkte dieser Linien mit dem Kreise, stehn gleich weit vom Durchmesser ab, und nähern sich immer mehr, wenn die durchschneidende Linie sich weiter vom Mittelpunkte entfernt. Rückt sie endlich um den Halbmesser vom Mittelpunkte ab, so fallen beyde durchschnittspunkte in den einen Berührungspunkt zusammen, und zwar in dem Durchmesser; daher die Tangente mit in die Reihe dieser schneidenden Linien *als letzte* aufzunehmen ist; *als Gränze* der diese sich ohne Ende fort näheren, ohne sie doch je zu erreichen, so lange sie schneidende Linien bleiben. Mann kann sich daher *die berührende Linie als eine schneidende denken, für welche die beyden Durchschnittspunkte mit einander und mit dem Durchmesser zusammenfallen*, und unter dieser Fiction, in der ein Widerspruch liegt, der sich jedoch selbst aufhebt, gelten von ihr alle Sätze der schneidenden Linien, in so fern sie mittelst dieser Fiction gehörig modificirt werden. Auch gründen sich auf diese Fiction die ersten Methoden an allen krummen Linien Tangenten zu ziehn, dergleichen *Fermat*, *Hudden* u. a. erdacht haben. — An einem gegebnen Kreise Tangenten verschiednen Bedingungen gemäss, oder umgekehrt zu einer gegebnen Tangente einen Kreis zu beschreiben, lehren Aufg. 14 und 13. d. U.

LEHRSATZ 13.

Wenn zwey Parallellinien AB, DE, beyde den Kreis durchschneiden, so sind die Kreisbogen MN, PQ welche zwischen ihnen liegen, gleich. Fig. 59.

[Die Stücke MP, NQ der beyden Parallellinien,
welche innerhalb der Kreislinie fallen, ſind Sehnen des
Kreiſes]. Ein Perpendikel CH aus dem Mittelpunkt
auf die eine dieſer Sehnen gefällt, ſteht auch auf die
*I.25.f.1 andre ihr parallele Sehne ſenkrecht *, halbirt alſo
beyde Sehnen, und beyde zu dieſen Sehnen gehörige
* 9. Bogen MHP, NHQ *. Folglich iſt MH = HP und
*Gr. 2. NH = HQ, alſo auch MH — NH = HP — HQ *,
das heiſt MN = PQ.

Fig. 60. Zuſatz I. Auch *wenn eine Tangente DE mit einer
Sehne MP parallel läuft, ſind die Bogen zwiſchen der Sehne
und dem Berührungspunkte H gleich.* Denn alsdann ſteht
12. f. 1. der Halbmeſſer CH auf die berührende Linie ſenkrecht,
I.25 f.1. folglich auch auf die ihr parallellaufende Sehne MP,
halbirt alſo dieſe Sehne, mithin auch ihren Bogen, ſo
* 9. daſs MH = HP wird *.

Fig. 51. [Zuſatz II. *Auch in gleichen Kreiſen ſchneidet
eine Linie MQ, welche mit der graden Linie durch die Mittelpunkte
CO parallel läuft, mit dieſer Linie gleiche Bogen ab.*

Denn wegen des Parallelismus mit CO ſteht die
Linie MQ von allen Punkten in CO, alſo auch von
beyden Mittelpunkten gleich weit ab. Die Sehnen
MN, PQ, welche beyde Kreislinien von MQ abſchneiden
* 11. ſind alſo gleich *, mithin ſind *erſtens* die zu dieſen
Sehnen gehörige Bogen MKN, PLQ gleich, ſo
wie ihre Unterſchiede von den gleichen Halbkreiſen,
d. h. die Bogen AM + BN = EP + FQ, und folglich
auch AM = BN = EP = FQ, indem die erſtern und
die letztern, als Bogen zwiſchen parallelen Sehnen eines
* 13. Kreiſes, gleich ſind *.

Zweytens ſind auch die Hälften der gleichen Sehnen MN, PQ, welche die Perpendikel aus den Mittelpunkten CR, OS auf ihnen abſchneiden, gleich, MR = RN = PS = SQ. Nun aber iſt RS = CO *, folglich ſind auch MP und NQ beyde gleich CO. *Mithin ſchneiden die ähnlich liegenden Theile beyder Kreislinien, von allen graden Linien, die mit der Linie durch ihre Mittelpunkte parallel laufen, gleiche Theile ab.* Umgekehrt iſt alſo der *geometriſche Ort* des Endpunkts P einer gegebnen graden Linie MP, welche in gegebner Lage, (z. B. parallel mit AF) mit ihrem andern Endpunkt M auf einer gegebnen Kreislinie ADBK aufſteht, eine gleiche Kreislinie EGFL, deren Mittelpunkt O, von C um gegebne Linien MP, in der gegebnen Lage, abſteht *.

* I. 34.

*Cf. I. 34 f. 1.

Anmerkung. Dieſer Zuſatz iſt im weſentlichen Satz 21. im erſten Buch von Apoll. ebnen Oertern, wird dort aber anders ausgedrückt und bewieſen. Der berühmte *Fermat* ſoll der Urheber deſſelben ſeyn.]

[LEHRSATZ 14.]

Sind umgekehrt zwey Bogen MN, PQ eines Kreiſes gleich, ſo ſind 1) die Sehnen, welche durch die übereinſtimmenden Endpunkte beyder gehn, MP, NQ, parallel. — 2) Die Sehnen welche durch die verkehrt liegenden Endpunkte beyder gezogen ſind, MQ, NP, durchſchneiden ſich ſo, daſs die ähnlich liegenden Theile in beyden gleich ſind. — 3) Auch wenn die Sehnen der beyden gleichen Bogen MN, PQ ſelbſt, ſich auſserhalb des Kreiſes ſchneiden, ſo ſind die Fig. 59.

abgeschnittnen Stücke in der Verlängerung beyder gleich.

1. Halbire den Bogen NQ durch den Halbmesser CH; so wird durch diesen Halbmesser auch die Sehne
* 9. NQ *, ferner, weil MN, PQ gleiche Bogen sind, auch der Bogen MHP und die Sehne MP dieses Bogens halbirt. Folglich stehn die Sehnen MP, NQ, welche durch die übereinstimmenden Endpunkte der beyden gleichen Bogen gehn, beyde auf die grade Linie CH
* I. 21. senkrecht; sie sind also parallel *.

2. Die Sehnen MQ, NP, müssen, weil sie die verkehrt liegenden Endpunkte der beyden gleichen Bogen verbinden, sich nothwendig in irgend einem
* Gr. 8. Punkte I durchschneiden *. Ueberdem sind sie gleich,
* 9. weil sie zu gleichen Bogen MHQ, NHP gehören *. Da nun auch die Sehnen MN, PQ gleich sind, so decken sich
* I. 11. die Dreyecke MPQ, PMN *, und die Winkel bey M und P sind gleich. Das Dreyeck IMP ist daher gleichschenklig *, und IM = IP, folglich auch, da die
* I. 13. ganzen Sehnen MQ, NP gleich sind, IN = IQ.

3. Durchschneiden sich die beyden Sehnen der gleichen Bogen MN, PQ in irgend einem Punkte O ausserhalb des Kreises, so ist das dadurch entstehende Dreyeck NOQ gleichschenklig, mithin NO = QO. Denn aus dem, was unter 2 bewiesen ist, folgt, daß die Winkel IMN, IPQ, folglich auch, wegen des Parallelismus der Sehnen PM und QN, die Winkel
* I. 25. QNO und NQO gleich sind *.

Folgerung 1. Weil in dem unter 2 betrachteten Fall, das Dreyeck MIP gleichschenklig ist, so liegt die

die Spitze desselben in dem Halbmesser CH, welcher auf der Grundlinie MP in ihrer Mitte senkrecht steht *. *I. 17. f. 3
Folglich *liegt der Durchschnittspunkt I der beyden Sehnen MQ NP stets in dem Halbmesser, der die Bogen MHP, NHQ halbirt.* — Umgekehrt geht die grade Linie, welche durch die Punkte H und I gezogen wird, stets durch den Mittelpunkt des Kreises *. — Endlich * Gr. 6.
schneiden zwey Sehnen, welche durch einen Punkt I eines Halbmessers unter gleichen Winkeln gegen denselben gezogen werden, gleiche Kreisbogen ab.

Folgerung 2. Weil eben so in dem unter 3 betrachteten Fall das Dreyeck MPO gleichschenklig ist, so liegt die Spitze desselben O, in der Verlängerung des Halbmessers CH, welcher auf der Grundlinie in der Mitte aufsteht. — Umgekehrt muss also eine grade Linie welche den Winkel C am Durchschnittspunkte halbirt, durch die Mitte der Sehnen MP und NQ und durch den Mittelpunkt des Kreises gehn; und grade Linien, welche unter gleichen Winkeln gegen die Verlängerung eines Halbmessers durch einen Pnnkt desselben gezogen werden, und den Kreis durchschneiden, schneiden in ihm gleiche Bogen ab.

Zusatz I. Diese Sätze lassen sich auch auf Tangenten übertragen. *Nimmt man auf beyden Seiten des Berührungspunktes H gleiche Bogen HM, HP, so läuft die Sehne durch ihre Endpunkte, MP, mit der Tangente DE parallel.* Denn zieht man nach dem Berührungspunkte den Halbmesser CH, so halbirt dieser den Bogen MHP, mithin auch die Sehne MP *, steht also auf ihr, so wie Fig. 60. * 9.

*12. f. 1. auf der Tangente ſenkrecht *, und Sehne und Tangente laufen alſo parallel.

Tangenten durch die beyden Punkte M und P gezogen, *12. f. 2. machen mit der Sehne MP gleiche Winkel *, bilden alſo, wenn ſie ſich in einem Punkte O durchſchneiden, ein gleichſchenkliges Dreyeck. Daher ſind *die abgeſchnittnen Stücke derſelben MO, OO gleich*, und ihr Durchſchnittspunkt fällt in dem Halbmeſſer CH, der *I. 17. f. 3 durch den Berührungspunkt geht *. Umgekehrt muſs eine grade Linie durch O und H auch durch den Mittelpunkt, und eine grade Linie, welche den Winkel bey O halbirt, ſowohl durch den Berührungspunkt, als auch durch den Mittelpunkt gehn.

Fig. 79. *Tangenten, welche von einem Punkte O auſserhalb des Kreiſes nach dem Kreiſe gehn, ſind überhaupt insgeſammt gleich.* Denn zieht man CO und die Halbmeſſer nach den Berührungspunkten CF, CG, ſo entſtehn rechtwinklige Dreyecke, worin die Hypothenuſe CO und eine der Katheten gleich ſind, die ſich deshalb de-
* I. 19. cken *, und worin OG = OF iſt.

Fig. 61. Zuſatz II. *Iſt ein Halbkreis ABC in eine grade Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 6 getheilt, und man verbindet die übereinſtimmenden Theilpunkte von den Endpunkten des Durchmeſſer an gerechnet durch grade Linien AC, HF, IG, ſo iſt die Summe aller dieſer parallelen Sehnen gleich dem Stück AK, welches eine grade Linie durch B und den nächſten Theilpunkt G gezogen, auf dem verlängerten Durchmeſſer abſchneidet.*

Denn wegen der Gleichheit der Theile AH, CF
*14. 1. und HI, FG ſind die Sehnen AC, HF, IG parallel *.

Eben so sind wegen Gleichheit der Bogen HI, CF und IB, FG die Sehnen HC, IFL, BGK parallel. Folglich sind HFLC, IGKL Parallelogramme, also HF = CL, IG = LK * und AC + HF + IG = AK. *I. 34. 2.

Zusatz III. *Ist ein Halbkreis ADB in eine ungrade Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 5, getheilt, und man verbindet die übereinstimmenden Theilpunkte durch grade Linien AB, DG, EF, und zieht nach den Endpunkten E, F der letztern dieser Linien die Halbmesser CE, CF; so sind alle Abschnitte jener Linien zwischen diesen Halbmessern EF, MN etc. zusammengenommen dem Halbmesser des Kreises gleich.* Taf. III. F. 62.

Denn theilt man auch den andern Halbkreis AHB auf dieselbe Art ein, in den Punkten H, I, K etc., so gehn erstens EC und FC verlängert als Durchmesser durch zwey Theilpunkte K, I *. Verbindet man zweytens die verkehrt liegenden Endpunkte der beyden gleichen Theile DE, HI, durch die Sehnen EH, DI, so durchschneiden sich diese, nach Folgerung 1, in einem Punkte L des Halbmessers CA, so dass CA = CL + LA ist. Nun sind aber wegen Gleichheit der Theile, die Sehnen FI, EH, DA welche gleiche Bogen abschneiden, parallel *. Eben so die Sehnen AB, DG, EF und die Sehnen EK, DI, etc. Mithin sind als Parallelen zwischen Parallelen, erstens DN = AC, und zweytens EF = LC = DM *, also auch DN − DM = AC − LC, d. h. MN = AL und folglich EF + MN = LC + AL = AC.

* 2. u. 3.

* 14. 1.

* I. 34. 1.

Grade so führt man den Beweis, wenn der Halbkreis in eine grösere Zahl von ungleichen Theilen getheilt ist.

Taf. III. F. 63. Zusatz IV. *Ist ein Kreis in sechs gleiche Theile getheilt, und man verbindet einen der Theilpunkte, A, mit denen, welche um zwey Theile von demselben abstehn durch grade Linien AC, AE; so theilen diese Linien die Sehne BF zwischen den übergangnen Theilpunkten, welche zunächst bey A liegen, in drey gleiche Theile.*

Denn erstens sind AC, BF, und zweytens auch AE, FB, zwey Sehnen, welche die verkehrt liegenden Endpunkte zwey gleicher Bogen AF, CB und AB, EF mit einander verbinden. Folglich durchschneiden
14. 2. sich diese Sehnen so, dass BH = AH und FI = AI ist.
Nun aber sind, wenn man CE zieht, die Bogen AC, CE, EA, folglich auch die Sehnen dieser Bogen
* 7. gleich *. Also ist das Dreyeck ACE gleichseitig. Da überdem CE parallel mit BF läuft, so ist das Dreyeck
*I.25.A. AHI, mit jenem Dreyeck gleichwinklig *, also eben-
*I21..f.2 falls gleichseitig, oder AH = HI = AI *. Mithin ist auch BH = HI = IF, folglich die Sehne BF auf diese Art in drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. Dieser sehr brauchbare Lehrsatz und die Zusätze fehlen bey Le Gendre. Zusatz 2 entlehne ich aus *Clavius* Euklid, Zusatz 3 u 4 aus *Kraffts* Institut. Geometr. sublim., wo als Urheber des erstern *La Hire* in den Mémoires de Mathematique. Paris 1692. p. 92, und des letztern *Gregor von St. Vincent* in seinem Opus geometricum prop. 96 de Circulo genannt wird. In den Beweisen bin ich indess von ihnen abgewichen. In den folgenden Büchern werden wir ähnliche interessante Sätze finden.
d. U.

[LEHRSATZ 15.]

Nimmt man ausserhalb oder innerhalb eines Kreises einen Punkt A und zieht durch ihn und den Mittelpunkt B eine grade Linie, welche die Kreislinie in den Punkten I und H durchschneidet; so hat Fig. 64.

1) unter allen Punkten der Kreislinie der Punkt I, der in der Linie AH mit dem Punkte A zu einerley Seite des Mittelpunkts B liegt, den kleinsten; dagegen der Punkt H, der mit A auf entgegengesetzter Seite des Mittelpunktes B liegt, den grössten Abstand vom Punkte A;

2) haben unter mehreren Punkten E, K, G in der Kreislinie, diejenigen den kleinern Abstand vom Punkte A, welche näher beym Punkte I liegen; und

3) stehn je zwey Punkte, die zu entgegengesetzten Seiten der Linie AH liegen und gleich weit von I entfernt sind, z. B. E, F, auch vom Punkte A gleich weit ab.

1. Denn zieht man nach den Punkten E, K, F, G in der Kreislinie die Halbmesser BE, BK, BF, BG und aus dem Punkte A die graden Linien AE, AK AF, AG, so bilden diese mit AB Dreyecke, in deren jedem, z. B. in ABE, der *Unterschied* je zweyer Seiten *kleiner* und zugleich ihre *Summe grösser* als die dritte Seite *, folglich AB — BE oder AB — BI, d. h. AI < AE und zugleich AB + BE oder AB + BH d. h. AH > AE ist. Folglich ist der Punkt I *weniger*, der Punkt H *weiter* als jeder andre Punkt E in der Kreislinie vom Punkte A entfernt; welches das erste ist. * I. 8.

2. Alle jene Dreyecke ABE, ABK, ABF, ABG haben unter einander zwey Seiten gemein, nemlich AB und die gleichen Halbmesser BE, BK, BF, BG. Folglich wird die Grösse ihrer dritten Seiten AE, AK, AF, AG von der Grösse der gegenüberstehenden Winkel ABE, ABK, ABF, ABG durch Lehrsatz 10. des ersten Buchs bestimmt. Alle diese Winkel sind aber zugleich Winkel am Mittelpunkte des Kreises um B,
* 7; 8. daher ihre Grösse von der Grösse ihrer Sehnen abhängt*, folglich von der gegenseitigen Entfernung der beyden Endpunkte dieser Sehnen, d. h. der Punkte E, K, F, G vom Punkte I. Ist der Punkt E weiter als K aber nicht so weit als G vom Punkte I entfernt, so ist
* I. 10. AE > AK und AE < AG *; welches das zweyte ist.

3. Sind endlich die Punkte E, F gleich weit von
* I. 6. I entfernt; so ist auch AE = AF *, da denn die beyden Punkte E, F zu entgegengesetzten Seiten der Linie AB liegen müssen, weil sie sonst (da die beyden Dreyecke AEB, AFB sich decken) zusammenfielen, und nicht zwey, sondern nur ein Punkt wären; welches das dritte ist.

Zusatz. Diese Sätze über die Entfernung eines Punktes von den Punkten in einer Kreislinie gelten gleichmäsig, jener Punkt liege *ausserhalb* oder *innerhalb* der Kreislinie, und der Beweis ist für beyde Fälle derselbe, nur die Lage der Linien etwas verschieden, wie dieses die beyden grossen Kreisen unsrer Figur darstellen, daher es unnöthig ist, mit Euklid (III. 8, 9) beyde Fälle besonders zu behandeln. *Auch gelten sie* *für jeden Punkt im Umfange*, für welche nur I und A zusammenfallen, wie im dritten kleinern Kreise unsrer Figur.

Folgerung. 1. *Von jedem Punkte A, welcher nicht der Mittelpunkt ist, lassen sich nach einer Kreislinie stets zwey gleiche grade Linien ziehn, welche zu entgegengesetzter Seite der Linie durch den Mittelpunkt liegen* *; *aber auch nicht mehr als zwey*, indem es in der Kreislinie nicht mehr als zwey Punkte giebt, welche von Einem Punkte in derselben gleich weit abstehn *. * (3) * Z.

Folgerung 2. *Kann man also von einem Punkte nach der Kreislinie mehr als zwey grade Linien ziehn, so ist dieser Punkt nothwendig der Mittelpunkt des Kreises.*

Folgerung 3. *Grade Linien, welche* von einem Punkte ausserhalb des Kreises so gezogen sind, dass sie *von der Kreislinie gleiche Bogen abschneiden*, sind gleich *. Deshalb sind von jedem Punkte ausserhalb des Kreises nur zwey und nicht mehr solche grade Linien möglich. Umgekehrt schneiden alle *gleiche* grade Linien, welche von einem Punkte ausserhalb des Kreises an die Kreislinie gezogen sind, von ihr gleiche Bogen ab. Solche Linien so zu ziehn, dass sie im Kreise Sehnen von gegebner Grösse bilden, oder dass zwey derselben Bogen von gegebner Grösse umspannen, lehrt Aufg. 15. *14. f. 3.

Folgerung 4. Auch alle Tangenten, welche von einem Punkte nach einer Kreislinie gehn sind gleich *. Folglich sind *von einem Punkte O ausserhalb* Fig. 79. *14. Z. 1.

eines Kreises nach dem Kreise stets zwey verschiedne, aber nicht mehr, Tangenten möglich. — Ist eine grade Linie OF, welche von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises nach der Kreislinie geht, einer Tangente OG aus diesem Punkte gleich, so ist sie selbst eine Tangente des Kreises. — Endlich geht eine grade Linie, welche den Winkel O halbirt, den die beyden Tangenten aus dem Punkte O nach der Kreislinie bilden, durch den Mittelpunkt des Kreises und steht auf der Sehne durch die Berührungspunkte, in
*14. Z. 1. deren Mitte senkrecht auf *.

Anmerkung. Der Lehrsatz und die Folgerungen, sind den Sätzen des ersten Buchs über die Entfernung eines Punktes von den Punkten einer graden Linie* analog, und zeigen sich für die Lehre des Kreises nicht weniger fruchtbar, als jene für die gradelinigen Figuren. Ich sehe daher den Grund nicht ab, warum sie Le Gendre übergeht, da er doch von jenen Sätzen des ersten Buchs einen so häufigen Gebrauch macht, und die fernern Sätze über das Schneiden und Berühren der Kreise blosse Folgerungen aus diesem Lehrsatz sind.

*I. 16.

d. U.

[LEHRSATZ 16.]

Fig. 49. u. 50. 1) *Zwey Kreise deren Mittelpunkte A, B um die Summe oder um den Unterschied ihrer Halbmesser α, β von einander entfernt sind, berühren sich und zwar im ersten Fall äusserlich im zweyten innerlich.*

2) *Ist die Summe ihrer Halbmesser grösser oder der Unterschied derselben kleiner, so haben sie keinen Punkt mit einander gemein, und liegen im ersten Fall*

der eine ganz ausserhalb, im zweyten der eine ganz innerhalb des andern.

Die grade Linie durch beyde Mittelpunkte durchschneide den um B beschriebnen Kreis in den Punkten I und H, nnd zwar sey I der Durchschnittspunkt welcher mit A auf einerley Seite von B liegt; so sind dem vorigen Lehrsatz gemäss alle Punkte in der Kreislinie um B *weiter* als der Punkt I, aber *nicht so weit* als der Punkt H vom Mittelpunkte A der zweyten Kreislinie entfernt *. * 14. 1.

1. Ist daher AI *gleich* dem Halbmesser α dieser zweyten Kreislinie, so ist zwar I ein Punkt in derselben, aber alle andern Punkte der Kreislinie um B stehn weiter von A als um den Halbmesser α ab, liegen also ausserhalb der Kreislinie um A. Mithin berühren sich beyde Kreislinien in diesem Fall *äusserlich* *. Wenn aber $\alpha + \beta = AB$ ist, so muss auch $\alpha = AB - \beta$ *, oder $\alpha = AB - BI = AI$ seyn. Folglich ist AI unter dieser Bedingung dem Halbmesser α gleich, und unter ihr müssen sich daher beyde Kreise *äusserlich berühren.* Fig. 49. * E. 12. * Gr. 2.

Ist AH *gleich* dem Halbmesser α, so ist zwar H ein Punkt in der Kreislinie um A, aber alle andere Punkte der Kreislinie um B sind von A weniger als um den Halbmesser α entfernt, liegen also innerhalb jener Kreislinie. Beyde Kreislinien berühren sich also in diesem Fall *innerlich* *. Wenn aber $\alpha - \beta = AB$ ist, so muss auch $\alpha = AB + \beta$ oder $\alpha = AB + BH = AH$ seyn. Folglich ist unter dieser Bedingung AH Fig. 50. * E. 12.

dem Halbmesser α gleich, und unter ihr müssen sich daher beyde Kreise *innerlich berühren*.

2) Ist dagegen AI *grösser* als der Halbmesser α so fällt der Punkt I, der unter allen in der Kreislinie um B am nächsten bey A liegt, mithin diese ganze Kreislinie, ausserhalb der Kreislinie um A und beyde haben keinen Punkt gemein. Das ist aber der Fall, wenn $\alpha + \beta > AB$ ist, da denn auch $\alpha > AB - \beta$ oder $> AB - BI$, d. h. $> AI$ ist.

Ist endlich AH *kleiner* als der Halbmesser α, so fällt der Punkt in der um B beschriebnen Kreislinie, welcher am weitesten von A entfernt ist, mithin diese ganze Kreislinie, innerhalb der Kreislinie um A, und beyde Kreislinien haben wiederum keinen Punkt gemein. Das ist aber der Fall, wenn $\alpha - \beta < AB$ ist, da denn $\alpha < AB + \beta$ oder $< AB + BH$ d. h. $< AH$ ist.

Folgerung 1. *Wenn zwey Kreise einander berühren, so liegt folglich stets der Berührungspunkt mit den beyden Mittelpunkten in einer graden Linie*, und zwar *zwi-*
Fig. 49. *schen* beyden Mittelpunkten wenn die Kreise *äusserlich*,
Fig. 50. *nicht zwischen ihnen*, wenn sie sich *innerlich* berühren. Denn nur unter diesen Bedingungen kann der Abstand ihrer Mittelpunkte der Summe oder dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich seyn. Die grade Linie, welche durch zwey jener Punkte gezogen wird, muss also immer auch durch den dritten gehn.

Folgerung 2. *Wenn umgekehrt zwey Kreislinien in einem Punkte I oder H, welcher in der graden Linie durch ihre Mittelpunkte liegt, zusammentreffen, so berüh-*

ren sie sich. Denn dann ist allemal die Entfernung ihrer Mittelpunkte entweder der Summe oder dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich; ein sehr einfaches Kennzeichen von Kreisen die sich berühren, welches in der Lehre von den Berührungen von vielem Gebrauch ist.

Folgerung 3. *Zwey sich berührende Kreise haben im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.* Denn da ihre Halbmesser AI, BI, welche nach dem Berührungspunkte gezogen werden, in grader Linie liegen *, so fallen die Perpendikel, welche auf beyde im Berührungspunkte I errichtet sind, mithin die Tangenten zusammen *. Ein Perpendikel auf die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte errichtet, geht also gewiss durch *beyder* Kreise Mittelpunkt.

* f. 1.

* 12. u. I. 1. Z. 2.

Folgerung 4. *Haben umgekehrt zwey Kreise in einem Punkte I den sie gemein haben, eine gemeinschaftliche Tangente, so berühren sie sich,* und zwar *innerlich,* wenn ihre Mittelpunkte auf einerley, *äusserlich* wenn sie auf entgegengesetzter Seite der Tangente liegen. Denn ihre Mittelpunkte liegen dann beyde in dem Perpendikel, welches auf die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkt I errichtet wird *, sind also im ersten Fall um den Unterschied der Halbmesser beyder Kreise, im zweyten um ihre Summe von einander entfernt. Die Kreise müssen sich also unserm Lehrsatz zu folge berühren, im ersten Fall innerlich, im zweyten äusserlich.

* f. 3.

Folgerung 5. Alle Kreise, die durch einen Punkt I einer Kreislinie gehn, und um einen Punkt

in dem Halbmesser IA, oder dessen Verlängerung, als Mittelpunkt beschrieben sind, berühren sich im Punkte I, weil sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente
*f. 4. haben *, und liegen ganz zu einerley oder entgegengesetzter Seite dieser Tangente, d. h. des Perpendikels welches auf AI im Punkte I errichtet wird.

Anmerkung. Der erste Theil dieses Lehrsatzes steht zwar bey Le Gendre, und macht bey ihm sogar zwey Lehrsätze aus, allein seine Beweise sind sehr mangelhaft, da er sich nicht auf den vorhergehenden Lehrsatz berufen konnte. Die fruchtbaren Folgerungen fehlen bey ihm alle bis auf die erste.

d. U.

[LEHRSATZ 17.]

T. III. F. 65. u. 66. *Wenn zwey um die Mittelpunkte C und O beschriebne Kreise sich innerlich oder äusserlich berühren so liegen, im ersten Fall die beyden übereinstimmenden Endpunkte E, G, im zweyten die verkehrt liegenden Endpunkte E, G zweyer paralleler Durchmesser DE, FG, mit dem Berührungspunkte I in grader Linie.*

Denn verbindet man die Mittelpunkte durch die grade Linie CO, so geht diese auch durch den Berührungs-
*16. f. 1. punkt *. Zieht man daher von dem Berührungspunkte nach den genannten Endpunkten der parallelen Durchmesser die graden Linien IE, IG so entstehn zwey
*E. 2. α gleichschenklige Dreyecke ICE, IOG, worin wegen des Parallelismus der Durchmesser die Winkel an der Spitze, mithin auch die Winkel an der Grundlinie

gleich sind *. Es sind also auch die dritten Winkel *I.25; 12
CIE, OIG gleich *, und folglich bilden, da CI und *I.31.f.1
IO in grader Linie liegen, auch AI und IO eine
grade Linie *. Der Berührungspunkt liegt folglich * I. 5.
mit den Endpunkten E und G der beyden parallelen
Durchmesser in grader Linie.

Zusatz. *Wenn umgekehrt zwey Kreise einen Punkt I gemein haben, und die Halbmesser OG, CE, welche man nach den Endpunkten einer graden Linie GE zieht, die durch den Punkt I geht, und beyde Kreise schneidet, sind untereinander parallel, so berühren sich beyde Kreise im Punkte I.*

Denn man ziehe die Halbmesser OI, CI, so sind
die Dreyecke IOG, ICE gleichschenklig, mithin die
Winkel E und EIC, G und GIO gleich. Nun aber
sind wegen des Parallelismus der Halbmesser, und weil
EG eine grade Linie ist, die Winkel E und G gleich *. *I.25 A.
Also sind auch die Winkel EIC, GIO gleich *, mit- * I. 5.
hin OI und IC in grader Linie *, und es liegt der *16.f.2.
gemeinschaftliche Punkt I beyder Kreislinien in der
graden Linie durch beyde Mittelpunkte. Folglich be-
rühren sich in ihm beyde Kreise *. *16.f.2.

Anmerkung. Diese Sätze entlehne ich aus *Pappus* mathematischen Sammlungen B. 7., wo sie als 15tes und 16tes Lemma aus Apollonius Werk von den Berührungen aufgeführt, aber auf eine schwierigere Art bewiesen werden. Auch ist der Lehrsatz *Archimedes* erstes Lemma im Buche von der Kugel und dem Cylinder. Noch ein paar ähnliche Sätze findet man Lehrsatz 25. Zus. 2. und folgende.

[LEHRSATZ 18.]

Fig. 48. *Zwey Kreiſe können ſich nur dann durchſchneiden, wenn ſowohl die Summe ihrer Halbmeſſer α, β gröſſer, als auch der Unterſchied derſelben kleiner als der Abſtand ihrer Mittelpunkte A, B iſt.*

Denn geſetzt die erſte dieſer Bedingungen fände bey zwey Kreiſen nicht ſtatt, und es wäre α + β nicht *gröſser* als AB; ſo müſte dieſe Summe entweder gleich AB, oder kleiner als AB ſeyn. Im erſten Fall würden ſie beyde Kreiſe berühren, im zweyten kei-
* 16. nen Punkt gemein haben *, könnten ſich alſo nicht durchſchneiden.

Fände die zweyte dieſer Bedingungen nicht ſtatt, und wäre α — β nicht *kleiner* als AB; ſo müſte dieſer Unterſchied entweder gleich AB, oder gröſser als AB ſeyn. Im erſten Fall würden ſich wiederum beyde Kreiſe berühren, und im zweyten keinen Punkt ge-
* 16. mein haben *, könnten ſich alſo nicht durcſchneiden.

Zuſatz. Daſs wenn beyde Bedingungen ſtatt finden, die Kreiſe ſich nothwendig durchſchneiden müſſen, haben wir ſchon als unmittelbare Folgen aus den
*E.II β. Principien geſehn *. Der dortige Satz wird alſo durch dieſe vervollſtändigt, und wir dürfen nun erſt dieſe Bedingungen als *Beſtimmung der Möglichkeit des Durchſchneidens zweyer Kreiſe* aufſtellen, ohne welche kein Schneiden ſtatt findet, und unter der allein die Conſtruction des Dreyecks aus drey gegebnen Linien mög-
*E.II.A lich iſt *.

[LEHRSATZ 19.]

Zwey Kreise die sich durchschneiden treffen sich stets in zwey Punkten, welche zu den entgegengesetzten Seiten der graden Linie durch beyde Mittelpunkte liegen. Fig. 48.

Umgekehrt durchschneiden sich alle Kreise, welche zwey Punkte gemein haben, oder die in einem Punkte ausserhalb der Linie durch ihre Mittelpunkte zusammen treffen.

1. Wenn zwey Kreise sich in einem Punkte E schneiden, so kann ihr Durchschnittspunkt nicht in der graden Linie DH liegen, welche durch die Mittelpunkte beyder Kreise geht *, liegt folglich zur einen Seite dieser Linie; daher zur andern Seite derselben in der einen Kreislinie ein zweyter Punkt F liegen muss, welcher eben so weit als jener vom Mittelpunkte A des andern Kreises entfernt ist *, folglich auf seinem Umfang liegt, also ein zweyter Durchschnittspunkt beyder Kreise ist. Und mehr als diese beyden Durchschnittspunkte sind nicht möglich *. *16. f. 2. *15 f. 1. *15 f. 1.

2. Haben zwey Kreise zwey Punkte E, F, gemein, so liegen diese ausserhalb der graden Linie DH zwischen ihren Mittelpunkten, und es muss AI < AE und AH > AE seyn *. Folglich ist I ein Punkt in dem um A beschriebnen Kreise, H ein Punkt ausserhalb desselben *, und folglich durchschneiden sich beyde Kreise. * 16. *E. 27.

3. Liegt endlich der Punkt E, worin zwey Kreise zusammentreffen, ausserhalb der Linie durch die Mittel-

punkte, so ist die Summe der beyden Halbmesser grö-
* I. 8. sser als der Abstand der Mittelpunkte *; also durch-
schneiden sich beyde Kreislinien.

Anmerkung. Zwey sich durchschneidende Kreise, und zwey Kreise die zwey Punkte gemein haben, sind also einerley Gegenstand. Le Gendre braucht diesen letztern Begriff zur Erklärung des erstern, d. h. des Schneidens zweyer Kreislinien
*E. 10. A. doch, wie wir schon bemerkt haben, in so fern mit Unrecht, als die Uebereinstimmung beyder Begriffe erst bewiesen werden muss. Es erhellt hieraus zugleich dass zwey Kreise die sich berühren nur einen Punkt gemein haben können, und dass umgekehrt alle Kreise die nur einen Punkt mit einander gemein haben, sich berühren, worauf Le Gendres Definition des Berührens zweyer Kreise sich gründet. d. U.

LEHRSATZ 20.

Fig. 48. *Wenn zwey Kreise sich schneiden, so wird ihre gemeinschaftliche Sehne von der graden Linie, die durch die beyden Mittelpunkte O, B geht, senkrecht durchschnitten und halbirt.*

Denn da zwey Kreise, die sich durchschneiden,
* 19. zwey Punkte E, G gemein haben *, so gehört die gra-
de Linie EG zwischen diesen Punkten als Sehne zu
beyden Kreisen. Ein Perpendikel, welches auf
diese Sehne in ihrer Mitte errichtet wird, muss folg-
lich sowohl durch den einen, als durch den andern
* 9. f. 2. Mittelpunkt gehn *. Also (da zwischen zwey Punk-
* Gr. 6. ten nur eine einzige grade Linie möglich ist *) muss
auch umgekehrt eine grade Linie DH, welche durch
die Mittelpunkte beyder Kreise A, B geht, die ge-
mein-

meinschaftliche Sehne EG senkrecht durchschneiden und halbiren.

[Anmerkung. Die Tangente zweyer sich berührender Kreise stimmt also in *der* Eigenschaft mit der Sehne zweyer sich schneidender Kreise überein, daſs die grade Linie durch die Mittelpunkte beyder Kreise auf sie senkrecht steht, und wir können sie also auch hier wieder als eine Sehne betrachten, bey welcher die beyden Durchschnittspunkte mit dem Kreise in einen zusammengefallen sind. In so fern kann man also den Berührungspunkt für einen doppelten Durchschnittspunkt nehmen.

d, U.]

LEHRSATZ 21.

Wenn in einerley Kreis oder in zwey gleichen Kreisen, zwey Winkel am Mittelpunkte ACB, DCE sich zu einander wie zwey ganze Zahlen verhalten; so müssen auch die beyden Bogen welche vor ihnen umspannt werden AB, DE sich wie dieselben Zahlen, und folglich wie jene Winkel verhalten. Fig. 67.

Man setze, z. B. die beyden Winkel ACB, DCE verhielten sich zu einander wie die beyden Zahlen 7 und 4; so heiſst das, jene Winkel sollen so gedacht werden, daſs sie von einem kleinern Winkel M grade so gemessen werden, wie die gegebnen ganzen Zahlen von der Einheit, daſs folglich der Winkel M als gemeinschaftliches Maaſs im ersten Winkel ACB genau siebenmal, im letztern DCE genau 4 mal enthalten sey *. Dann lassen sich also in jenem genau 7, in diesem genau 4 Winkeltheile (angles partiels) ACm, mCn, nCo . . , DCx, xCy . . . denken, welche insge-

* V. 2.

ſammt dem Winkel M, alſo auch unter ſich gleich ſind. Nun aber müſſen zu dieſen Winkeltheilen, als gleichen Winkeln am Mittelpunkte C in einerley oder
7. Z. 2. in gleichen Kreiſen, auch gleiche Bogen gehören, folglich auch die Bogentheile (arcs partiels) Am, mn, no . . . Dx, xy . . . welche von jenen Winkeltheilen umſpannt werden, unter ſich gleich ſeyn. Jedem Winkeltheil entſpricht aber ein Bogentheil. Folglich müſſen auch die ganzen Bogen AB und DE ſich wie die Zahlen 7 und 4 verhalten; alſo wie die Winkel. Dieſelbe Schluſsfolge findet bey jedem andern Zahlverhältniſſe ſtatt. So oft ſich alſo das Verhältniſs zweyer Winkel ACB, DCE in ganzen Zahlen ausdrücken läſst, verhalten ſich die Bogen AB, DE, welche aus ihrem Scheitel mit gleichem Halbmeſſer beſchrieben und von ihren Schenkeln umſpannt werden, wie die Winkel, oder es iſt

$$\angle ACB : \angle DCE = \text{bog. } AB : \text{bog. } DE$$

[d. h. wenn der Winkel ACB oder der n te Theil deſſelben im Winkel DCE m mal enthalten iſt, ſo muſs in dieſem Fall auch der Bogen AB oder deſſen n ter Theil in dem Bogen DE genau m mal enthalten ſeyn.]

Zuſatz. Grade auf dieſelbe Art erhellt umgekehrt, daſs *wenn in einerley Kreis oder in zwey gleichen Kreiſen zwey Bogen AB, DE ſich zu einander wie ganze Zahlen verhalten, auch die Winkel am Mittelpunkte, die auf ihnen ſtehn ACB, DCE, ſich wie dieſe Zahlen, und mithin wie die Bogen verhalten müſſen*, ſo daſs
$AB : DE = \angle ACB : \angle DCE$.

[Unter der Vorausſetzung eines Verhaltens wie zwey ganze Zahlen zu einander, iſt alſo ſtets das Verhältniſs ſolcher Bogen und ſolcher Winkel gleich, *ſind folglich Bogen und Winkel proportional* *.] * V. 2.

LEHRSATZ 22.

Wie auch zwey Winkel ACB, ACD ſich zu einander verhalten mögen, immer verhalten ſich auf dieſelbe Art zwey Kreisbogen AB, AD, welche um ihren Scheitelpunkt mit gleichem Halbmeſſer beſchrieben und von ihren Schenkeln umſpannt werden. Fig. 68.

Man lege den kleinern Winkel ACD ſo auf den gröſsern, daſs ihre Scheitel, der Schenkel CA, und ihre Kreisbogen zuſammenfallen *. Wenn nun die im Lehrſatz ausgeſagte Proportion, d. h. Gleichheit der Verhältniſſe, in irgend einem Fall nicht ſtatt fände, ſo müſte dann der Winkel ACB zum Winkel ACD ſich wie der Bogen AB zu einem Bogen AO, der *gröſser* oder *kleiner* als AD iſt, verhalten *, alſo folgende Proportion richtig ſeyn * 1. *V. 3. α.

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog. } AB : \text{bog. } AO$$

Der Bogen AO ſey *erſtens gröſser* als AD, ſo kann man ſich AD in lauter gleiche Theile getheilt denken, welche kleiner als der Unterſchied beyder Bogen, DO, ſind *, [z. B. in n,] da denn, wenn man dieſe Theile weiter nach O zu aufträgt, zwiſchen D und O wenigſtens ein Theilpunkt I fallen muſs. Zieht man nun den Halbmeſſer CI, ſo ſind ACD, ACI zwey Winkel am Mittelpunkte, deren Bogen AD, AI ſich wie zwey *Aufg. 5 Z. 2.

ganze Zahlen [n und n + 1] zu einander verhalten; folglich ist dann kraft des vorhergehenden Zusatzes

$$\angle ACB : \angle ACI = \text{bog. } AB : \text{bog } AI$$

Die Vorderglieder in den Verhältnissen dieser Proportion sind mit den Vordergliedern in der ersten Proportion einerley; folglich müssen die Hinterglieder proportional seyn, also

$$\angle ACD : \angle ACI = \text{bog. } AO : \text{bog } AI$$

[indem, wenn der Winkel ACB die Winkel ACD, ACI grade so misst, wie der Bogen AB die Bogen AO, AI, auch zwischen diesen Winkeln, und Bogen einer-
*V. 3. ε. ley Zahlverhältnis statt finden muss *.]

Nun aber ist der Bogen AO grösser als AI, folglich müsste auch kraft der letztern Proportion der Winkel ACD grösser als der Winkel ACI seyn, also der Theil grösser als das Ganze, welches ungereimt
*V. 3. δ. ist *. Also ist es unmöglich dass der Winkel ACB sich zum Winkel ACD, wie der Bogen AB zu einem Bogen, der grösser als AD wäre, verhalten könne.

Aus einer ähnlichen Schlussfolge erhellt, dass *zweytens* auch kein Bogen der *kleiner* als AD ist, mit den Winkel ACB, ACD und dem Bogen AB eine gültige Proportion bilden kann.

[Folglich muss die im Lehrsatz ausgesagte Proportion unter allen Umständen bestehn, da, bestände sie nicht, man in Ungereimtheiten verwickelt würde.] und es ist also immer

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog } AB : \text{bog. } AD.$$

[Zusatz I. Grade so beweist man den umgekehrten Satz, dass, *wie auch zwey Bogen aus gleichen Kreisen sich verhalten mögen, die Winkel an ihren Mittelpunkten, von deren Schenkel sie umspannt werden, sich grade auf dieselbe Art verhalten.*

So ist also die Proportionalität zwischen Winkel und Bogen allgemein dargethan, die beyden Bogen oder die beyden Winkel mögen durch einerley Bogen oder Winkel sich messen lassen oder nicht, d. h. *commensurabel* oder *incommensurabel* seyn, und folglich sich wie Zahlen verhalten oder nicht, d. h. ein *rationales* oder ein *irrationales Verhältniss* haben *. * V. 1.

Der hier geführte sehr deutliche und evidente *Beweis für diesen incommensurablen Fall*, den ich durch die zweyte Anmerkung zur fünften Aufgabe noch vervollkommnet zu haben glaube, scheint, so wie der analoge Beweis Buch 3 Lehrsatz 4, von Le Gendre aus Simpsons Elementen entlehnt zu seyn, wo man ihn im Wesentlichen in der Anmerkung zum dritten Satze des fünften Buches findet. Simpson bemerkt dabey dass schon *Euklid* im zwölften Buch seiner Elemente sich dieser Beweisart bedient, und dass sich mittelst derselben in jedem Falle die Schwierigkeiten, die aus der Incommensurabilität von Linien oder andern Ausdehnungen herrühren, leicht und befriedigend heben lassen.]

Zusatz II. Was in diesem und dem vorigen Lehrsatz über die Proportionalität zwischen Winkeln und Bogen bewiesen worden ist, gilt ebenfalls für *Kreisausschnitte* und *ihre Bogen*, welche grade so wie Winkel und Bogen von einander abhängen, und auf die der hier geführte Beweis sich ganz übertragen lässt. *Es verhalten sich also auch stets Kreisausschnitte in demselben Kreise oder in zwey gleichen Kreisen, wie ihre Bogen.*

Zusatz III. Weil die Winkel am Mittelpunkte eines Kreises, (und so auch die Kreisausschnitte,) mit den Bogen worauf sie stehn (die sie umspannen) proportional sind, d. h. mit ihnen so zusammenhängen, dass beyde sich nach einerley Verhältniss ändern, und wenn die eine dieser Grössenarten zu oder abnimmt, die andre nach gleichem Verhältnisse zu oder abnimmt; so sind wir berechtigt die eine zum *Maass* der andern zu brauchen. Wir wollen deshalb hinführo den Bogen AB, worauf ein Winkel am Mittelpunkte ACB (oder ein Kreisausschnitt) steht, für *das Maass dieses Winkels* ACB (oder des Ausschnitts) nehmen; wobey man sich aber wohl merken muss, dass, wenn man verschiedne Winkel (oder verschiedne Ausschnitte) durch solche Bogen, als ihr Maass, vergleichen will, die Bogen wie es der Lehrsatz voraussetzt, mit *gleichem* Halbmesser beschrieben seyn müssen.

[Dass hierbey von keinem *unmittelbaren* Messen, oder wie unser Verfasser sich nicht ganz richtig ausdrückt, von keinem absoluten Maass, die Rede seyn kann, versteht sich von selbst. Das *unmittelbare Maass* einer Grösse muss mit ihr völlig gleichartig seyn, sich von ihr in nichts als in der Grösse, und höchstens noch in der Form unterscheiden, daher Bogen sich nur durch Linien, und Winkel nur durch Winkel unmittelbar messen lassen. Wir müssen also zum unmittelbaren Messen für die Winkel einen Winkel zur Einheit annehmen, und dazu haben wir schon den *rechten Winkel* erwählt, auf den wir alle übrige Winkel als auf ihr gemeinschaftliches Maaſs, ihre Einheit, beziehn *. Da aber dieser Lehrsatz zeigt, daſs Winkel untereinander stets dasselbe Verhältniſs als die dazu gehörigen Bogen haben, so läſst sich aus dem Verhältniſs der Bogen auf das der Winkel schlieſsen, folglich mittelst der Bogen erfahren, wie oft ein Winkel oder ein bestimmter Theil desselben in dem andern Winkel enthalten ist, daher man *mittelst* der Bogen einen Winkel mit dem rechten, als dem Maaſse aller Winkel, vergleichen, folglich *mittelbar* messen kann *. Und von solchem *mittelbaren Maaſs* ist hier nur die Rede.] *I.1.Z.1. *A20.A

Nehmen wir den rechten Winkel zur Einheit, so muſs jeder spitze Winkel durch eine Zahl die zwischen 0 und 1 fällt, also durch einen ächten Bruch, ein stumpfer Winkel durch einen Bruch der zwischen 1 und 2 fällt, ausgedrückt werden, welches etwas unbequem seyn würde. [Um die Brüche zu vermeiden nimmt man daher in der Ausübung nicht den rechten Winkel selbst, sondern den neunzigsten Theil desselben, den man einen *Grad* nennt, und dessen Sexagesimal-Theile (die man nach der Ordnung durch *Minuten, Secunden, Tertien* bezeichnet) zum unmittelbaren Maaſs aller Winkel oder zur *Winkeleinheit*, und vergleicht, um die Gröſse eines Winkels in Graden, Minuten und Secunden zu erfahren, den Bogen, den ein Winkel umspannt, mit dem *neunzigsten Theil des Quadranten* und dessen Sexagesimaltheilen. *Der neunzigste Theil des Quadranten* (folglich der 360ste Theil der Kreislinie) wird gleichfalls ein Grad genannt, und dient, sammt seinen Sexagesimaltheilen (Minuten, Secunden, Tertien), allen Kreisbogen zum gemeinschaftlichen Maass oder zur Einheit, da denn jeder Winkel so viel Grad, Minuten und Secunden als sein Bogen enthält, jener *Winkelgrade*, dieser *Bogengrade* u.s., welches man gehörig unterscheiden muss. Hierauf beruht der Gebrauch aller Winkelmesser in der Ausübung.]

[Anmerkung 1. Den neunzigsten Theil des Quadranten oder *einen Grad findet man durch Probiren ohne Schwierigkeit*, indem man z. B. erst die Grösse der Sehne, die sich genau dreymal im Quadranten herumtragen läst, dann die Sehne die sich im Drittel sechsmal, und endlich die, die sich im Sechstel des Drittels genau fünfmal umhertragen läst, durch fortgesetztes Probiren aussucht. Denn da zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören, erhält man auf diese Art einen Bogen der 3. 6. 5 d. h. 90 mal im Quadranten enthalten ist, stellt also den neunzigsten Theil des Quadranten dar. Auf ähnliche Art läst sich jeder andre willkührliche Theil der Kreislinie finden, der Kreis also nach Belieben eintheilen. Allein dieses Probiren ist ein *mechanisches Verfahren*, welches blos für den vorgelegten einzelnen Fall den gesuchten Theil giebt; *kein Wissenschaftliches* welches aus allgemein gültigen Gründen abgeleitet, auf allgemeine Gültigkeit Anspruch machen könnte. Ein solches vermag, wie wir in
30. A. der Folge sehn werden, die Elementargeometrie nicht aufzustellen. Für die Eintheilung der Winkelmesser ist indess jenes mechanische Verfahren völlig hinreichend, besonders seitdem neuere Künstler, (der *Herzog von Chaulnes*, *Bird* und *Ramsden*) diese Eintheilungsmethode durch scharfsinnige Erfindungen ausserordentlich verfeinert und erleichtert haben.

Anmerkung 2. *Ein Winkelmesser* ist ein in Grade und kleinere Theile eingetheilter Kreis oder Kreisbogen. Bey denen die zum Messen und Auftragen der Winkel in Zeichnungen oder auf dem Papier beſtimmt ſind (*Transporteurs*) iſt der Mittelpunkt der Theilung durch eine Oefnung oder eine Spitze genau beſtimmt. Jeden Winkel den man meſſen, oder an einer Linie auftragen will, legt man ſo, daſs deſſen Spitze im Mittelpunkt fällt. Dann iſt er ein Winkel am Mittelpunkte des eingetheilten Kreiſes, faſst alſo ſo viel Winkelgrade, als auf dem Inſtrumente Bogengrade zwiſchen ſeinen Schenkeln liegen.

Bey den Winkelmeſſern die zum Meſſen auf dem Felde oder am Himmel beſtimmt ſind, (*Theodolite*, *Scheibeninſtrumente*, *ganze Kreiſe*, *Quadranten etc.*), drehen ſich genau im Mittelpunkt der Theilung ein oder zwey Lineale (*Alhidaden*) mit Dioptern oder mit Fernröhren. Die Winkel der Geſichtslinien nach zwey Gegenſtänden, auf die man die Fernröhre richtet, werden folglich Winkel am Mittelpunkte dieſer eingetheilten Kreiſe, und alſo durch die abgeſchnittnen Bogen gemeſſen. Hierbey kömmt alſo alles, nächſt der Güte der Eintheilung, darauf an, daſs die Alhidade oder das Fernrohr ſich genau um den Mittelpunkt der Theilung (oder mit der Theilung concentriſch) drehn. Sonſt ſind die abgeſchnittnen Bogen nicht das Maaſs der Winkel, die dann *excentriſch* wären *. * 25. A.

d. U.]

[Zuſatz IV. In *zwey verſchiednen Kreiſen*, *z. B. den concentriſchen EFD und KRG umſpannen gleiche Winkel am Mittelpunkte ECD ähnliche Kreisbogen**, *d. h. Bogen ED, KG, die ſich auf einerley Art zum ganzen Umfange verhalten*, nemlich wie der Winkel der ſie umſpannt zu vier rechten, und die daher *eine gleiche Menge von Graden enthalten*. Hierauf *beruht die Meſſung der Kreisbogen durch Winkelmeſſer*. Zieht man nemlich nach den Endpunkten eines Bogens DE, die Halbmeſſer, und legt einen Winkelmeſſer in der Ebne des Bogens ſo daſs ſein Mittelpunkt in den Mittelpunkt C fällt, ſo werden beyde Bogen concentriſch und die Schen-

Fig. 47.

*IV. E. 2

kel CE, CD schneiden auf beyden gleich viel Grade ab; daher man die Gradmenge von DE, aus der in GK unmittelbar ersieht.

Zusatz V. *Ein Winkel am Mittelpunkte ist recht, stumpf oder spitz* je nachdem er auf einem Bogen steht, der dem Quadranten gleich, oder gröſser oder kleiner als der Quadrant ist.

Zwey Halbmesser welche einen Halbkreis umspannen liegen in grader Linie, und die Schenkel eines *erhab-*
*I. E. 16. *nen Winkels* ACD * umspannen einen Kreisbogen EFD, welcher gröſser als der Halbkreis ist. — Ueberhaupt sind ein Winkel oder mehrere Winkel zusammen genommen, einem, zwey oder mehreren rechten Winkeln, oder einem stumpfen oder einen spitzen Winkel gleich, je nachdem sie zu ihrem Maaſs einen Quadranten, einen Halbkreis, oder einen Bogen haben, der kleiner als ein Halbkreis aber gröſser als ein Quadrant, oder der kleiner als ein Quadrant ist. d. U.]

LEHRSATZ 23.

Jeder einem Kreise eingeschriebne Winkel (d. h. jeder Winkel am Umfange) hat zu seinem Maaſse den halben Bogen worauf er steht.

Fig. 69. [Wenn der eine Schenkel eines eingeschriebnen Winkels, AE, durch den Mittelpunkt des Kreises C geht, so ziehe man den Halbmesser CB. Denn entsteht ein gleichschenkliges Dreyeck ACB, worin die Winkel A und B gleich sind, und der äuſsere Winkel
*I. 30. $BCE = B + A * = 2\,A$, folglich $A = \frac{1}{2}\,BCE$ ist. Nun ist aber BCE ein Winkel am Mittelpunkte, der

mit dem eingeſchriebenen Winkel BAE über demſelben Bogen BE ſteht, hat folglich dieſen Bogen zu ſeinem Maaſse. Alſo hat der Winkel A am Umfange, wovon ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht, den halben Bogen BE, worauf er ſteht, zu ſeinem Maaſse *. *21.Z.3.

Geht kein Schenkel eines eingeſchriebnen Winkels BAD durch den Mittelpunkt, ſo ziehe man durch die Spitze des Winkels den Durchmeſſer AE, welcher mit den Schenkeln des eingeſchriebnen Winkels, AB, AD, zwey Winkel am Umfange BAE, DAE bildet, welche der Bedingung des erſten Falls entſprechen, folglich zu ihrem Maaſs den halben Bogen haben, auf dem ſie ſtehn.]

Liegt nun der Mittelpunkt, folglich AE, zwiſchen beyden Schenkeln des gegebnen Winkels BAD, ſo iſt dieſer Winkel der Summe jener beyden Winkel BAE, DAE, gleich, hat folglich zu ſeinem Maaſse die Hälfte der Bogen BE + ED, d. h. die Hälfte des Bogens BD worauf er ſteht. — Liegt dagegen der Mittelpunkt, folglich auch AE, auſserhalb des Theils der Ebne den die beyden Schenkel AB, AD′ umſpannen, ſo iſt der gegebne Winkel am Umfange BAD′ dem Unterſchiede jener Winkel BAE, D′AE gleich*, hat folglich zu ſeinem Maaſs die Hälfte des Bogen D′E — BE, d. h. die Hälfte des Bogens BD′ auf welchem er ſteht. *I E.12γ

Alſo hat jeder in dem Kreis eingeſchriebne Winkel, oder jeder Winkel am Umfang, zu ſeinem Maaſse den halben Bogen, den er umſpannt.

Zuſatz I. *Alle Winkel in demſelben Kreisabſchnitt* * *ſind gleich*, *z. B. BAC, BDC, BEC etc.* Denn ſie ſtehn * Fig. 70. * E. 7.

auf demselben Kreisbogen BOC, dessen Hälfte sie zu ihrem Maasse haben. [Eben so sind Winkel in Abschnitten gleicher Kreise, welche in beyden über gleiche Bogen oder Sehnen stehn, gleich. — Sind umgekehrt in einem Kreise, oder in zwey gleichen Kreisen zwey Winkel am Umfange gleich, so umspannen sie gleiche Bogen, und stehn in gleichen Kreisabschnitten.

T. III. Fig. 77. Dasselbe ist bey allen *ähnlichen Abschnitten verschiedner Kreise*, wie AEB, ADC der Fall, d. h. bey Abschnitten, deren Bogen gleich viel Grade enthalten*. Denn die Ergänzungen ihrer Bogen zum ganzen Umfange ANB, ANC enthalten alsdann auch gleich viel Grade, folglich auch die Winkel in den Abschnitten, E, D, welche durch die Hälfte dieser Bogen, auf die sie stehn, gemessen werden. Die Winkel in ähnlichen Abschnitten sind also immer gleich. Und *sind umgekehrt in verschiednen Kreisen zwey Winkel am Umfange gleich, so sind die Bogen welche sie umspannen und die Abschnitte in welchen sie stehn ähnlich*, (d. h. enthalten gleich viel Grade.)

*IV. E. 2

Fig. 71. Zusatz II. *Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter*, z. B. der Winkel BAD. Denn zieht man den Halbmesser CA, so erhält man zwey gleichschenklige Dreyecke BCA, ACD, worin die Winkel bey A den Winkeln B, D gleich sind, also auch ihre Summe BAD $= B + D$ ist. Nun sind die drey Winkel B, D, BAD, als Winkel in einem Dreyecke, zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich *; also ist ihre Hälfte BAD einem rechten Winkel gleich. — Auch erhellt

* I. 31.

der Satz unmittelbar daraus, dafs BAD als Winkel im Umfang, der auf den Halbkreis steht, die Hälfte des Halbkreises, d. h. einen Quadranten zum Maafs hat; daher er nothwendig ein rechter ist *. *22. Z. 5.

[*Folgerung. Sind folglich drey grade Linien AB, AC, AD, welche in einem Punkte A zusammenstofsen gleich, und liegen zwey derselben, AB und AD, in grader Linie, so ist, wenn man BC, CD zieht, der Winkel BCD ein rechter.* Denn dann läfst sich um A mit dem Halbmesser AB ein Kreis beschreiben, der durch die Punkte B, C, D geht *, worin BD Durchmesser, also BCD ein Winkel im Halbkreise ist. Fig. 37 *E. 2. β

Halbirt man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyecks BCD im Punkte A, und zieht AC, (oder zieht man diese Linie so, dafs die Winkel B, BCA oder D, DCA gleich werden) so ist AC = AB = AD.

Errichtet man endlich auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks ABD, in ihrem Endpunkte ein Perpendikel CD, so durchschneidet diese den zweyten verlängerten Schenkel BA so, dafs AD den Schenkeln AB, AC, und der Winkel bey D dem Winkel bey O gleich wird. Denn dann ist A der Mittelpunkt eines Halbkreises durch B, C, D.]

Zusatz III. *Jeder Winkel BAC, der in einem Kreisabschnitt, gröfser als der Halbkreis eingeschrieben ist, ist ein spitzer Winkel;* denn er steht auf einem Bogen der kleiner als der Halbkreis ist, hat also zu seinem Maafs einen kleinern Bogen als den Quadranten *. — *Jeder Winkel BOC, in einem Kreisabschnitt der kleiner als der Halbkreis ist, ist dagegen ein stumpfer Winkel.* Denn Fig. 70 *22. Z. 5.

ihn misst die Hälfte eines Bogens, welcher grösser als der Halbkreis ist.

Anmerkung. Diese Sätze über die Vergleichung der Winkel, welche in Kreisen eingeschrieben sind, mittelst der Bogen die sie umspannen, (und die folgenden Sätze welche sie vervollständigen) gehören zu den fruchtbarsten in der Geometrie. Unmittelbar auf den hier bewiesenen beruhen einige nette *Eigenschaften sich durchschneidender Kreise*, wovon ich die erstere aus *Clavius* Euklid, die übrigen aus *Gregor von St. Vincenz* Opus Geometricum entlehne.

Fig. 72. 1. *Wenn ein Kreis ABC durch den Mittelpunkt C eines andern Kreises geht, und man zieht in ihm den Durchmesser der durch C geht, CA, so schneidet der zweyte Kreis, und der Bogen in ihm, von allen graden Linien, die durch den Punkt A gehn, gleiche Stücke LM, MN ab.* Denn zieht man CM, so ist AMC ein Winkel im Halbkreis, mithin CM senkrecht auf AN *, und folglich wird die Sehne LN des zweyten Kreises im Punkte M halbirt *.

* Z. 2.
* 9.

T. III. Fig. 78. 2. *Auch wenn zwey gleiche Kreise sich schneiden, und man beschreibt um ihre gemeinschaftliche Sehne * BC als Durchmesser einen Kreis, so wird jede grade Linie welche durch die Punkte B oder C geht, worin die Kreise sich schneiden, z. B. CM, von den drey Kreislinien halbirt.* Denn jede solche Linie bildet mit der Sehne BC einen Winkel BCM, welcher in beyden gleichen Kreisen ein Winkel am Umfange ist, und daher gleiche Bogen BF, BM umspannt *. Also sind auch die Sehnen BF, BM gleich *, und FBM ein gleichschenklig Dreyeck. Zugleich ist BLC als Winkel im Halbkreise ein rechter *, folglich BL ein Perpendikel auf die Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreyecks, und deshalb FL = LM *.

* 20.
* Z 1.
* 7.
* Z. 2.
*I.17.f.2

T. III. Fig. 76. 3. Durchschneiden sich zwey Kreise in den Punkten I, L und man beschreibt um L einen dritten Kreis, der beyde durchschneidet, *so liegen zwey der Durchschnittspunkte mit dem Punkte I in grader Linie.* Denn zieht man HI, HK und LH, LK welche als Halbmesser des dritten Kreises gleich sind, so sind auch

die Winkel LKH LHK, gleich. Jener steht, als Winkel am Umfang, auf dem Bogen INL = IHL *, daher beyde Winkel die * 7.
Hälfte dieser Bogen zu ihrem Maass haben. Der Winkel am Umfang IHL umspannt den übrigen Theil des Umfangs. Beyde, LHK, LHI haben also den halben Umfang zu ihrem Maass, sind also rechte Winkel *, und mithin liegen KH, IH in grader *22.Z.5.
Linie *. * I. 4.

4. *Wenn man über die Grundlinie BC eines Dreyecks ABC* T. III.
einen Kreis beschreibt, und dieser durchschneidet die Schenkel des Fig. 77.
Dreyecks, oder ihre Verlängerungen in den Punkten D, E, und man beschreibt ferner durch die Endpunkte eines der Schenkel, AB, und den Durchschnittspunkt des andern Schenkels mit der Kreislinie, E, einen zweyten Kreis, und eben so durch A, C, D, einen dritten Kreis; so entstehn dadurch ähnliche Kreisabschnitte über die Seiten des Dreyecks.

Denn zieht man BE, CD, so sind die Winkel BDC, BEC als Winkel am Umfange die über demselben Bogen BMC stehn gleich. Liegt folglich A *innerhalb* des Kreises über BC, so sind Fig. 77.
die Abschnitte dieser Winkel in allen drey Kreisen ähnlich, folglich BEC, BEA, ADC ähnliche Kreisabschnitte. — Liegt A *ausserhalb* des Kreises über BC, so sind auch die Nebenwinkel Fig. 77*
jener, d. h. die Winkel ADC, AEB gleich, umspannen folglich in beyden Kreisen Bogen AB, AC welche unter sich und mit der Ergänzung des Bogens BMC zum ganzen Kreise, d. h. mit dem Bogen BDEC ähnlich sind; daher auch in diesem Fall die Abschnitte über den drey Seiten des Dreyecks ähnlich sind.

Liegt A *auf* der Kreislinie über BC, so fallen die beyden Durchschnittspunkte D, E in einen Berührungspunkt zusammen *, und man muss dann über jedem Schenkel des Dreyecks * 20. A.
Kreise, welche den andern Schenkel berühren, beschreiben, um den folgenden Lehrsatz gemäss ähnliche Kreisabschnitte über alle drey Seiten des Dreyecks zu erhalten.

5. Aus diesen Sätzen folgt umgekehrt, dass *wenn man über die drey Seiten eines Dreyecks ähnliche Kreisbogen beschreibt, je zwey derselben sich in einem der Schenkel des Dreyecks oder in deren*

Verlängerung durchschneiden müssen. Mittelst desselben und des folgenden Lehrsatzes beweist *Gregor von St. Vincenz* in seinem grossen Geometrischen Werke (Prop. 11. bis 16, und 58 bis 64 de Circulo) eine Menge netter Eigenschaften vom Durchschnitt grader Linien, die durch die Spitze des Dreyecks A gehn, mit den Bogen der drey ähnlichen Kreisabschnitte, von denen ich hier nur ein Paar anführe, deren Beweis keine Schwierigkeit hat, uns hier aber doch zu weit abführen würde.

6. *Zieht man von dem Mittelpunkte des einen Kreisabschnitts BDC durch die Mittelpunkte der beyden andern grade Linien, so liegen die Durchschnitte dieser Linien mit den letztern Kreisbogen und die Spitze A des Dreyecks in grader Linie*; und dasselbe ist der Fall mit den beyden Punkten worin die *Tangente*, die am Bogen des Kreisabschnitts BEC in den Punkten B und C gezogen werden, die beyden andern Kreisbogen durchschneiden.

7. *Zieht man durch die Spitze A eine grade Linie, so sind die Stücke derselben, welche zwischen der Kreislinie BECM und den beyden andern Kreislinien liegen, allemal gleich.*

8. *Wenn ein Kreis, der um den Mittelpunkt des Abschnitts BEC beschrieben wird, den einen der beyden andern Kreise berührt oder schneidet, so berührt oder schneidet er auch den zweyten, und zwar schneidet er im letztern Fall von beyden ähnliche Bogen ab.* Und noch ein Paar solche Sätze, die ich übergehn muss,

d. U.

LEHRSATZ 24.

Fig. 74. 1. *Der Winkel BIE, den eine Tangente IB mit einer Sehne IE macht, welche die Tangente im Berührungspunkte durchschneidet, hat zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE der von beyden Linien eingeschlossen wird.*

[2. *Umgekehrt muss jede grade Linie IB, welche durch den Endpunkt einer Sehne IE gegen diese Sehne*

Sehne unter einem Winkel gezogen wird, den die Hälfte des von ihnen eingeschlossnen Bogens INE misst, den Kreis im Punkte I berühren.]

1. Zieht man nach dem Berührungspunkte I den Durchmesser DI, so ist erstens DIB ein rechter Winkel *, hat also als solcher zu seinem Maass die Hälfte *12 f. 1.
eines Halbkreises *, also auch die Hälfte des Bogens *22. Z 5.
DEI. Zweytens hat der Winkel DIE als ein Winkel am Umfang die Hälfte des Bogens DE zu seinem Maasse *. Folglich hat der Unterschied beyder Winkel * 23.
DIB und DIE, d. h. der Winkel DIE, zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE, welchen die Tangente IB und die Sehne IE umspannen. — Auch der Nebenwinkel desselben AIE hat daher zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens IME, welcher jenen Bogen zum ganzen Kreise ergänzt *. *22, Z. 5

[2. Ist dagegen IB so gezogen, dass der Winkel EIB die Hälfte des von beyden eingeschlossnen Bogens IE zu seinem Maasse hat, so sey ID der Durchmesser der durch den Punkt I geht. Zieht man die Sehne ED, so umspannen die Winkel D und DIE zusammengenommen den Halbkreis IED, haben also als Winkel am Umfange einen Quadranten zu ihrem Maasse *, und sind daher zusammengenommen * 23.
einem rechten Winkel gleich. Werden aber, nach der Voraussetzung, die Winkel EIB und D von demselben Bogen ID gemessen, so sind sie gleich, und also sind auch die Winkel BIE, DIE zusammengenommen einem rechten Winkel gleich. Folglich ist

AB ein Perpendikel durch den Endpunkt des Durchmessers, also eine Tangente des Kreises im Punkte I *.]

* 12.

[*Folgerung. Der Winkel BIE zwischen einer berührenden Linie und einer Sehne die durch den Berührungspunkt geht, ist gleich den Winkeln am Umfang, welche mit ihnen denselben Bogen IE umspannen* folglich den Winkeln in dem Kreisabschnitt, der mit der Tangente auf entgegengesetzter Seite der Sehne liegt. Denn alle diese Winkel werden von demselben Bogen gemessen. (Es gilt also auch hier von der Tangente, was von den Sehnen bewiesen ist.) Umgekehrt muss jede Linie IB, welche mit einer Sehne IE an ihrem Endpunkte einen Winkel macht, der den Winkeln im entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitt IME gleich ist, den Kreis im Punkte I berühren.]

Taf. III. F. 75.

[Zusatz I. *Eine grade Linie EG, welche durch den Punkt I geht, worin zwey Kreise sich berühren, schneidet von beyden Kreisen* **ähnliche Bogen** *und* **ähnliche Kreisabschnitte** *ab.*

Denn da beyde Kreise im Berührungspunkt eine gemeinschaftliche Tangente AB haben *, so bildet die grade Linie EG in beyden Kreisen mit der Tangente einen gleichen Winkel. Folglich müssen die Bogen IE, IG, deren Hälften diese Winkel unserm Lehrsatz zu folge messen, gleich viel Grade enthalten, oder gleiches Verhältniss zum ganzen Umfang haben, mithin ähnlich seyn *, und daher auch ähnliche Kreisabschnitte umspannen. Berühren die beyden Kreise sich *innerlich*, so ist GI ein Theil der Sehne IE, und

*16.f.3.

*IV.E.2.

die ähnlichen Kreisbogen liegen auf einerley Seite der Linie EGI. Berühren sie sich dagegen *äusserlich*, so liegen GI, IE auf entgegengesetzten Seiten des Berührungspunktes, und eben so die ähnlichen Kreisbogen zu entgegengesetzten Seiten der durchschneidenden Linie GE.

In *gleichen Kreisen* welche sich berühren, werden von jeder graden Linie durch den Berührungspunkt, *gleiche Stücke* abgeschnitten *. * 7.

Zusatz II. *Zieht man durch den Punkt I, worin zwey Kreise sich berühren grade Linien, und durch die beyden Punkte, worin sie einen jeden dieser Kreise nochmals durchschneiden, die Sehnen DE, FG; so sind diese Sehnen parallel.* Denn da beyde Linien in diesen Kreisen, nach Zusatz I. ähnliche Bogen IE, IG und ID, IF abschneiden, so sind die Winkel am Umfange, welche auf diesen Bogen stehn, D und F, auch E und G gleich *, mithin die Sehnen DE, FG parallel *, und *23.Z.1.
die Dreyecke IDE, IFG gleichwinklig. *1,25.A.

In *gleichen Kreisen* decken sich diese beyden Dreyecke *. In ihnen sind also die Sehnen DE, FG überdem noch gleich. Zieht man daher, wenn sich die Kreise äusserlich berühren, EF, DG, so sind auch diese Linien gleich, und DFG ist ein Parallelogramm. In *ungleichen Kreisen* ist, wenn IG kleiner als IE ist, auch FG kleiner als DE, und dann durchschneiden sich EF und DG. * Z. 1.

Zusatz III. *Haben umgekehrt zwey Kreise einen Punkt I gemein, und zwey grade Linien EG, DF durch-*

schneiden beyde im Punkte I so, dafs die Sehnen DE, FG durch die Durchschnittspunkte parallel sind; so berühren sich beyde Kreise im Punkte I. Denn man ziehe durch I am Kreise IDE die Tangente AB, so ist der Winkel DIA, dem
* 24. f. Winkel am Umfange E *, mithin auch, wegen des Parallelismus der Sehnen DE und FG, dem Winkel G
*I.25.A. gleich *. Ist daher, wie in Figur 75, IF ein Theil der Linie ID, so ist der Winkel FGI dem Winkel G gleich, d. h. dem Winkel in dem Kreisabschnitte, welcher mit IA auf entgegengesetzter Seite der Sehne IF
* 24. f. liegt, und daher berührt IA den Kreis IFG *. — Liegt IF in der Verlängerung von ID, wie in Fig. 75 *, so sind FIB, DIA Scheitelwinkel, folglich ist auch FIB gleich G, und also auch in diesem Fall IB eine Tangente am Kreise IGF. — In beyden Fällen haben also die Kreise eine gemeinschaftliche Tangente AIB, daher
*16. f.4. sie sich in beyden Fällen im Punkte I berühren *.

Taf. III. F. 76. Zusatz IV. Wenn zwey *gleiche Kreise* sich im Punkte I durchschneiden, so ist ihr *krummliniger Winkel* MIH d. h. der Winkel ihrer Tangenten im Berührungs-
*12. Z. punkte I *, dem Winkel gleich, welchen die Tangente IB, mit einer ihr gleichen Sehne ID des zweyten Kreises macht. Denn das Maafs des Winkels der beyden Tangenten IA, IB ist, weil IB zugleich eine Sehne des ersten Kreises ist, der halbe Bogen IMB. Das Maafs des Winkels BID ist eben so der halbe Bogen IHD. Die Bogen IMB, IHD sind aber als Bogen gleicher Kreise, die zu gleichen Sehnen IB, ID gehören,
* 7. gleich *, also auch die Winkel DIB, BIA.]

Anmerkung. Den ersten dieser Zusätze entlehne ich aus *Pappus* B. 4. S. 9, wo er mit unnöthiger Weitläufigkeit bewiesen wird; die beyden folgenden aus *Pappus* B. 7., wo sie das 7te 9te und 11te Lemma aus *Apollonius* Werk von den Berührungen ausmachen, und den letzten Zusatz aus *Krafft* und Vietas Opp. p. 382. d. U.

[LEHRSATZ 25.]

1. *Der Winkel AOD, unter welchem zwey Sehnen AB, DE eines Kreises sich durchschneiden, hat zu seinem Maass die halbe Summe der Bogen, welche seine Schenkel umspannen* $\frac{AD + BE}{2}$. Fig. 79.

2. *Der Winkel, unter welchem zwey verlängerte Sehnen AO', BO', oder eine verlängerte Sehne AO' und eine Tangente GO' sich durchschneiden, haben zu ihrem Maasse den halben Unterschied der Bogen, welche ihre Schenkel umspannen* $\frac{AD' - BE'}{2}$ *oder* $\frac{AG - GB}{2}$.

3. *Der Winkel FO'G unter welchem zwey Tangenten eines Kreises FO' GO' sich durchschneiden, hat zu seinem Maasse die Ergänzung des Bogens, welchen beyde Tangenten umspannen, zum Halbkreise, oder Halbkr. — FG.*

1. Durchschneiden sich die beyden Sehnen AB, DE selbst in einen Punkte O, so entsteht, wenn man BD zieht, ein Dreyeck OBD, worin der Winkel am Durchschnitt AOD der äussere Winkel, mithin AOD = B + D ist *. Dieser Winkel hat also zu seinem Maasse die Summe des Maasses der Winkel B und D, folglich die Bogen $\frac{AD + BE}{2}$ *.

* I. 30.
* 23.

2. Durchſchneiden ſich dagegen die Verlängerungen zweyer Sehnen, und man zieht BD, ſo entſteht Dreyeck D'O'B, worin der Winkel am Durchſchnittspunkt O' ein innerer, und mithin D'O'B = D'BA — D' iſt. Dieſer Winkel hat alſo zu ſeinem Maaſse den halben Unterſchied der Bogen AD', BE' oder $\frac{AD' - BE'}{2}$.

Daſſelbe iſt der Fall wenn die Tangente GO' und eine Sehne AB ſich in einem andern Punkte als im Berührungspunkte durchſchneiden. Denn auch dann entſteht, wenn man BG zieht, ein Dreyeck BGO', worin der Winkel am Durchſchnitt ein innerer, und O' = ABG — G iſt, folglich zu ſeinem Maaſse die Bogen $\frac{AG - GB}{2}$ hat.

3. Durchſchneiden ſich endlich zwey Tangenten GO', FO', und man zieht nach den Berührungspunkten die Halbmeſſer CG, CF, ſo entſteht ein Viereck CFO'G, welches zwey rechte Winkel F, G hat, und worin der dritte Winkel C als ein Winkel am Mittelpunkte durch den Bogen FG, welchen beyde Tangenten umſpannen, gemeſſen wird. Der vierte Winkel FO'G hat folglich zu ſeinem Maaſs den Halbkreis weniger dieſen Bogen, den die Tangenten, als Schen-
* I. 32. kel, umſpannen *.

Folgerung 1. *Unter Winkeln, welche auf denſelben Kreisbogen nach der hohlen Seite des Bogens zu ſtehen, iſt der Winkel, deſſen Spitze im Umfange liegt, gröſser als jeder deſſen Spitze auſserhalb der Kreislinie fällt, dagegen kleiner als jeder Winkel deſſen Spitze innerhalb der Kreislinie liegt.*

Folgerung 2. *Grade Linien welche von den End-punkten gleicher Bogen eines Kreises AB, EF etc. durch die Endpunkte eines andern Bogens CD gezogen sind, und entweder alle im Kreise oder alle ausser dem Kreise zusammentreffen, durchschneiden sich unter gleichen Winkeln O, Q etc.* Denn sie haben alle zu ihrem Maasse im ersten Fall die Summe, im letztern den Unterschied gleicher Bogen, AB, EF etc. und des Bogens CD. T. III. F. 104.

Folgerung 3. *Der Winkel O unter welchem zwey Tangenten sich durchschneiden, ist das Doppelte des Winkels GKH, welchen die Linie zwischen den Berührungspunkten mit dem Durchmesser durch den Berührungspunkt K bildet.* Denn GKH hat als Winkel am Umfange zu seinem Maase die Hälfte des Bogens HG, welcher (nach 3) den Winkel O misst. T. III. F. 78.**

Zusatz I. *Zieht man durch den zweyten Endpunkt dieses Durchmessers und durch den zweyten Berührungspunkt eine grade Linie HG, so durchschneidet diese die Tangente KO in ihrer Verlängerung so dass die Winkel I uud GKH, und die Linien OI, OG, OK, gleich sind.* Denn KGH ist als Winkel im Halbkreise ein rechter *; also steht GI auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks KGO in deren Endpunkt senkrecht, und durchschneidet daher den gegenüberliegenden Schenkel im Punkt I, so dass OI = OG = OK und I = G ist *.

*23 Z. 2.

*23. Z. 2. f. 1.

Zusatz II. Beschreibt man um ein gegebenes Dreyeck ABC einen Kreis, ferner um eine der Seiten z. B. um BC mit gleichem Halbmesser einen zweyten Kreis, und fällt dann von dem gegenüberstehenden Winkelpunkte A ein Perpendikel auf BC, welches die Fig. 78. u. 78*.

Kreise und diese Linie in den Punkten D, E, F durchschneidet; *so stehn die graden Linien welche man aus den beyden andern Winkelpunkten B, C durch den Punkt D zieht, ebenfalls auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks senkrecht.*

Denn weil die Kreise gleich sind, so gehören *erstens* zu der gemeinschaftlichen Sehne gleiche Bogen
* 7. BDC, BFC *, und diese halbirt beyde die grade Linie
durch die Mittelpunkte der Kreise, welche zugleich
* 20. auf BC senkrecht steht *. Mit dieser Linie läuft das
* I. 21. Perpendikel DF parallel *, daher die Bogen zwischen
*13. Z.2. beyden *, und also auch die Bogen BD, BF, und DC, CF gleich sind. *Zweytens* ist der Winkel BCH, dessen Spitze im Durchschnittspunkte beyder Kreise liegt, in beyden ein Winkel am Umfange, muss also in bey-
*23. Z.1. den gleiche Bogen BD, BH umspannen *, so dass also
Bog. BD = Bog. BF = Bog. BH.

Nun hat der rechte Winkel bey E zu seinem Maasse die Hälfte der Bogen AC + BF, und der Win-
* (1) kel bey G die Hälfte der Bogen AC + EH *. (in F. 78* VC + BD = AC + BH). Beyde Winkel sind also gleich, da die Bogen BF, BH und mithin die Bogen, welche beyde Winkel messen gleich sind. Also ist G so gut wie E, und aus denselben Gründen auch I ein rechter Winkel.

Da aus einem Punkte auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist, so *durchschneiden sich folglich die Perpendikel, welche aus den Mittelpunkten eines Dreyecks ABC auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, allemal in Einem Punkte D.* Und zwar steht dieser Punkt D mit jedem der Punkte F, H, K, (worin die Perpendikel, die aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, einen Kreis der um das Dreyeck beschrieben ist durchschneiden) von den Seiten des Dreyecks gleich weit ab, so dass DE = EF, DG = GH und DI = IK ist; (wie daraus erhellt, weil die Dreyecke DBF, DBH, DCK gleichschenklig* und BE, BG, CI Perpendikel auf ihre Grundlinien sind *. Eine artige Eigenschaft des Dreyecks, welche man mit der in Lehrsatz 10 Folgerung 2 vergleiche. * 7. *17. f. 2.

Anmerkung. Auf den ersten Theil dieses Lehrsatzes gründet sich eine Methode *Scheibeninstrumente oder ganze Kreise zu prüfen*, ob sie auch nicht an dem *Fehler der Excentricität* leiden *, und, gesetzt dies wäre der Fall, doch mit solchen fehlerhaften Instrumenten richtig zu messen. Dreht sich nemlich die Alhidade oder das Fernrohr nicht um den Mittelpunkt der Theilung, so sind die Winkel, welche abgeschnitten werden, keine Winkel am Mittelpunkte, sondern excentrische, wie O in Fig. 79. Folglich werden in solchen Instrumenten von den entgegengesetzt liegenden Endpunkten der Alhidade ungleiche Bogen abgeschnitten; und so oft das der Fall ist, leidet das Instrument am Fehler der Excentricität. Und dann werden, dem ersten Theil dieses Lehrsatzes zu folge, die Winkel durch die halbe Summe der beyden abgeschnittenen Bogen, die einander gegenüber liegen, gemessen. *22. A2.

Die beyden letzten Folgerungen und die beyden Zusätze entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* Satz 7, 50, 51 und 53 de Circulo, wo sie aber aus andern Gründen, und nicht so kurz bewiesen werden. d. U.

[LEHRSATZ 26.]

Die Spitzen aller gleichen Winkel, welche über derselbe graden Linie BC stehn, liegen insgesammt in Fig. 70.

einer Kreislinie, die durch die Endpunkte dieser graden Linie B, C geht.

Man ziehe durch B, C und die Spitze A eines
* 10. dieser Winkel eine Kreislinie *. Gesetzt nun, es fielen nicht alle Spitzen der andern Winkel in diese Kreislinie, sondern wie α oder β, so könnten der Winkel
* Folg. α, β nach dem vorigen Lehrsatz * nicht dem Winkel A gleich seyn, sondern β wäre grösser, α kleiner als A, gegen die Voraussetzung. Folglich sind alle solche Winkel in demselben Kreisabschnitt über der ge-
* E. 7. gebenen Linie BC befindlich *, welchen zu bilden Aufg. 16 lehrt.

Folgerung 1. *Ueber derselben graden Linie sind also auf einerley Seite nicht zwey verschiedene Kreisabschnitte möglich, welche denselben Winkel fassten*, folglich nicht
*IV.E.2. zwey verschiedene *ähnliche Kreisabschnitte**; und ähnliche Abschnitte über gleichen Linien decken sich und sind gleich (Euklid III. 23. 24.)

Folgerung 2. *Der Bogen des Kreisabschnitts über* BC, welcher den Winkel A fasst, ist *der geometrische Ort für die Spitze aller Dreyecke*, die über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen dieser Grundlinie
*I.E. 21. ein gleicher Winkel A gegenübersteht *. Oder er ist *der geometrische Ort* für die Aufgabe, *aus zwey gegebenen Punkten B, C zwey grade Linien zu ziehn, die sich unter einem gegebnen Winkel A durchschneiden.* Jeder Punkt im Kreisbogen BAC thut dieser Aufgabe genüge, und keiner der Punkte die ausserhalb desselben
* 25. f. liegen *.

Anmerkung. Diese lezte Folgerung ist im ersten Buch von *Apollonius* ebnen Oertern der zweyte Satz, und wird der nach der deutschen Uebersetzung folgendermaßen ausgedrückt: „Wenn zwey grade Linien, die einen Winkel von gegebner Gröſse einschlieſsen, durch zwey gegebne Punkte gehn, so liegt der Durchschnittspunkt dieser Linien auf einem der Lage nach gegebnen Kreisumfang, oder auch: so *berührt* ihr Durchschnittspunkt die hohle Seite eines der Lage nach gegebnen Kreises"; in welchem letztren Ausdruck der Begriff des Berührens unrichtig gebraucht wird. Uebrigens fehlt auch dieser wichtige Lehrsatz sammt den folgenden Zusätzen bey Le Gendre.

Zusatz I. *Wenn ein rechtwinkliges Dreyeck ABD mit einem andern rechtwinkligen EBD eine gleiche Hypotenuse hat, die eine Kathete AB aber kleiner als die Kathete EB des andern Dreyecks ist, so ist dagegen die zweyte Kathete AD des erstern gröſser als die Kathete ED des zweyten Dreyecks; und umgekehrt.* Denn legt man die Hypotenusen aufeinander, so fallen die Spitzen, unserm Lehrsatz zu folge, in einen Halbkreis *, und die Katheten jedes dieser rechtwinkligen Dreyecke werden Sehnen, deren Bogen sich zum Halbkreise ergänzen. Nun gehört zur kleinern Sehne der kleinere Bogen *, mithin die gröſsere Ergänzung zum Halbkreise, und also auch eine gröſsere Sehne der Ergänzung, d. i. eine gröſsere zweyte Kathete; und ist AB < EB so ist nothwendig AD > ED.

Fig. 71.
* 23 Z. 1.
* 8.

Zusatz II. Dasselbe gilt aus den nemlichen Gründen, *für alle Dreyecke, welche gleiche Grundlinie und gleiche Winkel an der Spitze haben*, und man kann daher diesen Satz allgemein so ausdrücken: *sind in zwey Dreyecken ABC, DBC, eine Seite BC und der ihr gegenüberstehende Winkel A, D in beyden gleich, hingegen ein Schenkel ungleich AB < DB, so ist der zweyte Schenkel*

Fig. 70.

in dem Dreyecke grösser, in welchem der erstere Schenkel der kleinere war, $AC > DC$; ein Satz, dem in der Anmerkung zu Lehrsatz 10 des ersten Buchs analog, statt dessen man sich gewöhnlich mit dem vorigen Satz, als Folgerung aus dem Pythagoreischen Lehrsatz begnügt. Auch der folgende intressante Satz fehlt in unsern Lehrbegriffen, obgleich er schon in einem Werke eines alten Griechen *Serenus* de sectione cylindri, Satz 46 und 47, vorkömmt.

T. III. Fig. 81. Zusatz III. *Ist ADEB ein beliebiger Kreisabschnitt, und D ein Punkt in der Mitte des Kreisbogens, so ist die Summe der beyden Schenkel jedes Winkels im Kreisabschnitt, z. B. des Winkels AEB, gleich der Sehne AG, welche durch Verlängerung des einen seiner Schenkel in dem Kreise entsteht, der um D als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser DA, beschrieben ist.* Denn man verlängere AD bis F, und ziehe FB, GB, so entstehn dadurch zwey Dreyecke FDB, GEB, wovon das erstere gleichschenk-
*E. 2. α lig ist *. Nun sind erstens die Winkel ADB, AEB
*23. Z. 1. als Winkel in demselben Kreisabschnitt *, folglich auch ihre Nebenwinkel FDB, GEB gleich. Zweytens sind die Winkel F und G gleich, als Winkel am Umfange des grössern Kreises, welche beyde über dem Bogen AB stehn. Mithin sind in den Dreyecken zwey Winkel des einen, denen des andern, also auch die
*I. 31. f. 1 dritten Winkel DBF, EBG untereinander gleich *. Nun aber sind in dem gleichschenkligen Dreyeck FDB die Winkel bey F und B gleich; folglich sind auch im Dreyeck GEB die Winkel bey G und B, mithin auch die Schenkel EG, EB gleich. Es ist also $AE + EB = AE + EG = AG$.

Folgerung 1. Unter allen Sehnen des gröſsern Kreiſes, iſt die, welche durch den Mittelpunkt D geht, d.h. der Durchmeſſer, die gröſste*. Die übrigen werden immer kleiner, je weiter ſie vom Mittelpunkte abſtehn, oder je gröſser der Bogen FG, (mithin auch DE oder der Winkel DAE) wird*. Folglich iſt die Summe der beyden Schenkel eines Winkels in einem Kreisabſchnitt, bey *dem* Winkel, deſſen Spitze in D liegt, die gröſte, und wird immer kleiner, je weiter die Spitze vom Punkte D ab, und je näher ſie bey der Sehne AB liegt.

* 5.

* 8.

Unter allen Dreyecken über derſelben Grundlinie und mit demſelben Winkel an der Spitze, iſt folglich im gleichſchenkligen die Summe der beyden andern Seiten am gröſsten. Auch iſt das gleichſchenklige Dreyeck auf einerley Seite der Linie AB nur auf eine Art, jedes der andern doppelt vorhanden.

Folgerung 2. Aus denſelben Gründen, woraus wir bewieſen haben, daſs $AG = AE + EB$ iſt, folgt daſs auch $BH = BE + EA$, folglich $AG = BH$ und $AE = EH$ iſt. Mithin umſpannen zwey ſolche verlängerte Schenkel einen Bogen und eine Sehne GH, welche dem Bogen und der Sehne AB gleich ſind; je zwey folglich gleiche Bogen und gleiche Sehnen.

LEHRSATZ 27.

1. *In jedem Viereck, welches in einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, ſind die gegenüberſtehenden Winkel zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.* Fig. 80.

[2. *Umgekehrt läſst ſich um ein Viereck, worin die Summe der gegenüberſtehenden Winkel zwey rechten gleich iſt, allemal ein Kreis umſchreiben.*]

1. Iſt das Viereck ABCD in einem Kreiſe eingeſchrieben, ſo umſpannen je zwey der gegenüberſtehenden Winkel die ganze Kreislinie, haben alſo, als Winkel am Umfange, zuſammengenommen die halbe
* 23. Kreislinie zu ihrem Maaſs *, und betragen alſo zwey
*22.Z.5. rechte Winkel *.

[2. Lieſse ſich umgekehrt um ein Viereck, deſſen gegenüberſtehende Winkel A + C zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich ſind, kein Kreis beſchreiben, ſo würde der durch die Eckpunkte A,
* 10. B, D beſchriebene Kreis * nicht durch den vierten Eckpunkt C gehn, ſondern dieſer müſste innerhalb oder auſserhalb der Kreislinie fallen. Dann würde aber der Winkel C gröſser oder kleiner ſeyn, als ein Winkel G am Umfange, der mit ihm über dem Bogen DAB
*25.f.1. ſteht *, und da dann dieſer letztere Winkel mit dem Winkel A zwey rechten gleich wäre, ſo müſste A + C gröſser oder kleiner als zwey rechte Winkel ſeyn, welches der Vorausſetzung widerſpricht.]

[*Folgerung* 1. Hier hat man alſo *die Bedingung unter der ſich durch vier gegebne Punkte ein Kreis beſchreiben läſst.* Dieſe Bedingung wird hier durch die Winkel gegeben. In B. 3. Lehrſatz 18 wird ſie durch Lineargröſsen angedeutet.

Auch ſieht man hieraus daſs ſich *kein ſchiefwinkligtes Parallelogramm in einen Kreis einſchreiben, oder ein Kreis* *ſich demſelben umſchreiben läſst.* Dieſes iſt nur bey Rechtecken, oder bey einem Trapez oder Trapezoid möglich. *Um jedes Rechteck läſst ſich aber ein Kreis beſchreiben.*

Folgerung 2. Verlängert man eine der Seiten eines Vierecks, welches einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, ſo iſt der äuſsere Winkel EAD ſtets dem innern gegenüberſtehenden C gleich.

Anmerkung. Laufen zwey Seiten eines Vierecks, welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, parallel, ſo ſchneiden ſie zwar gleiche Bogen ab *, daher auch die beyden andern Seiten, als * 13.
Sehnen gleicher Bogen, gleich ſind; deshalb braucht aber das Viereck kein Parallelogramm zu ſeyn. Denn aus dem Parallelismus zweyer, und die Gleichheit der beyden andern Seiten folgt nicht, daſs die parallelen Seiten auch gleich, und die gleichen auch parallel ſeyn müſsten. — Die Art *ein Dreyeck einem gegebenen Kreiſe einzuſchreiben oder zu umſchreiben*, und umgekehrt einen Kreis in ein gegebnes Dreyeck einzuſchreiben, lehrt Aufg. 17 und 18. Von der Einſchreibung der ordentlichen Vielecke in den Kreis, werden wir im fünften Buche handeln, auch in den beyden folgenden Büchern die Lehre vom Kreiſe noch beträchtlich erweitern.

[LEHRSATZ 28.]

Wenn man auf der Sehne eines Kreisabſchnitts T. III.
AEB ein Perpendikel ED errichtet, und nimmt auf Fig. 82.
der andern Seite des Perpendikels im Bogen einen Punkt G, und in der Sehne oder deren Verlängerung einen Punkt F, wovon jener von E, dieſer von D, eben ſo weit als dieſe letztern Punkte ſelbſt vom Punkte B abſtehn; ſo ſind G und F vom andern Endpunkte A

der Sehne gleich weit entfernt; oder wenn EG = EB und DF = DB ist, so ist immer AG = AF.

Ist das Perpendikel weniger als um den Halbmesser vom Punkte B entfernt, so liegt F in der Sehne, und G im Bogen des Kreisabschnitts. Ziehe EB, EF, GF, so ist, weil nach der Construction ED in der Mitte von FB senkrecht aufsteht, und die Bogen EB und EG gleich
*7; I. 13. sind, EB = EF = EG *, mithin der Winkel B =
* I. 12. EFB und EFG = EGF *.

Nun aber ist ABEG ein im Kreise eingeschriebner
* 27. Viereck, folglich sind die Winkel B + EGA = 2 R*, also auch EFB + EGA = 2 R. Als Nebenwinkel sind auch EFB + EFA = 2 R, folglich ist EGA = EFA, und zieht man von diesen gleichen Winkeln die gleichen FGF = EFG ab, auch AGF = AFG. Folglich ist das Dreyeck AGF gleichschenklig, und AG = AF.

Fig. 82*. 2. Ist BD gröser als der Halbmesser, so fällt F' in die Verlängerung der Sehne über A hinaus, und G' in dem Bogen, welcher den Bogen des Kreisabschnitts zum ganzen Kreise ergänzt. Zieht man EB, EF' und EG' so sind aus den nemlichen Gründen wie vorhin BEF' und F'EG' gleichschenklige Dreyecke, mithin die Winkel an ihren Grundlinien gleich, EF'G' = EG'F' und EF'B = EBF'. Ueberdem sind, als Winkel am Umfange, welche auf gleichen Bogen stehn, EG'A = EBF' mithin auch EF'B = EG'A, und zieht man diese gleichen Winkel von den erstern gleichen ab, EF'G' — EF'B' = EG'F' — EG'A das heisst AF'G' = AG'F'. Das Dreyeck AG'F' ist also auch in diesem Fall gleichschenklig, und AG' = AF'.

Anmerk.

Anmerkung. Der erste Fall dieses eleganten Satzes ist das dritte Lemma in *Archimeds* Werk über die Kugel und den Cylinder. Auch war der Fall desselben, wenn ABC ein Halbkreis ist, dem Astronomen *Ptolemäus* zur Berechnung des Canons der Sehnen unentbehrlich. Den zweyten Fall füge ich hinzu. Auch folgenden nicht unbrauchbaren Lehrsatz, den ich eben so wenig in einem der benutzten Werke finde.

d. U

[LEHRSATZ 29.]

Wenn eine grade Linie DE die Sehne eines Kreisabschnitts ABD unter einem Winkel AFD, welcher den Winkeln im Abschnitt gleich ist, durchschneidet, so steht der Durchmesser, welcher durch den Punkt A geht, auf der durchschneidenden Linie DE senkrecht, und die Durchschnittspunkte D, E sind vom Punkte A gleich weit entfernt. T. III. Fig. 83.

Denn zieht man AD, DB, AE, EB, so ist der Voraussetzung gemäss der Winkel AFD gleich dem Winkel ADB, und zweytens auch, als äusserer Winkel im Dreyeck AEF, den Winkeln AEF + FAE. Folglich ist der Winkel ADB, d. h. ADF + FDB gleich AEF + FAE, und da FDB und FAE gleich sind, indem beyde auf dem Bogen EB stehn, so sind auch ADF, AEF gleich, also auch die Sehnen und die Bogen AE, AD; weshalb der Durchmesser AG die Linie DE halbirt und auf ihr senkrecht steht*.

*I. 17. f. 2

Folgerung. Der Durchmesser der durch den Punkt A geht, steht auch auf allen graden Linien HG, KI senkrecht, welche die Verlängerung der Sehne unter einem Win-

kel, der dem Winkel des Abschnitts gleich ist, durchschneiden. Denn alle diese Linien laufen mit der Sehne DE
*I. 25. f. 2 parallel *. Nur durchschneiden sie weiterhin nicht mehr den Kreis.

[LEHRSATZ 30.]

T. III. Fig. 84. *Trägt man auf die Verlängerung einer Sehne AB, den Halbmesser des Kreises von B nach O auf, so schneiden die Sehne und der Durchmesser des Kreises, der verlängert durch O geht, von der Kreislinie zwey Bogen AD, BE′ ab, wovon jener das Dreyfache dieses ist, oder Bog. AD = 3. Bog. BE′.*

Denn zieht man die Halbmesser CB, CA, so sind die Dreyecke OBC und BCA gleichschenklig, folglich
* I, 12. sind die Winkel O, OCB, so auch A, B gleich *. Also sind als äussere Winkel B = 2 O und DCA = B + O = 3 O. Mithin ist auch DCA = 3 E′CB, und
* 22. also Bog. AD = 3. Bog. BE′ *.

Zusatz I. Verlängert man die Schenkel des Winkels O, und schneidet auf dieselbe Art auf beyden Schenkeln mit dem Halbmesser OB abwechselnd Punkte E′, F, G etc. ab, und zieht die Linien AE, EF, FG; so bilden je zwey derselben, die in demselben Punkte zusammenstossen, ein gleichschenkliges Dreyeck, worin die Winkel an der Grundlinie gleich sind, DCA = DEA, EAF = EFA, FEG = FGE etc. Mithin sind, als äussere Winkel, EAF = DEA + O = DCA + O = 4 O; FEG = EFA + O = EAF + O = 5 O etc., so dass *die gleichen Linien, welche zwischen* *den Schenkeln des Winkels O eingeschrieben sind, die Schenkel abwechselnd unter Winkeln durchschneiden, welche der Ordnung nach alle ganze Vielfache des Winkels O darstellen*; ein elegantes Theorem, worauf *Newton* die Formel für die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel gründet.

Anmerkung 1. Der Lehrsatz rührt von *Archimed* her, und ist sein 8tes Lemma von der Kugel und dem Cylinder; der ihn erweiternde Zusatz von *Newton*. Mittelst desselben könnte man *einen jeden gegebnen Winkel oder Kreisbogen in drey gleiche Theile theilen*, wäre es nur möglich eine Sehne und einen Durchmesser so zu ziehn, dass sie der Bedingung des Lehrsatzes genüge thun, d. h. *dass sie sich verlängert so durchschneiden, dass die Verlängerung der Sehne dem Halbmesser gleich ist*. Allein bloss durch Hülfe der graden Linie und des Kreises lässt dieses sich *nicht wissenschaftlich*, sondern nur mechanisch, durch Probiren oder durch Instrumente *bewerkstelligen* *. Wie man auch die Sache angreift, so wird man durch jenes Problem wieder auf das zurückgeworfen, einen Winkel oder Bogen in drey gleiche Theile zu theilen. *22.Z.3. A. I.

Auf jene für die Elementargeometrie gleich unauflösliche Aufgabe, führen *Vieta* in seinem *Supplementum Geometriae* Satz 9, und *Newton* in seiner *Arithmetica Universali* die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück, und ein Jesuit *Thomas Ceva* gründet darauf folgendes *Instrument*, welches dieses bewerkstelligen soll. Zwey Lineale, welche sich um den Punkt O drehen, sind durch vier andre Lineale AC, CD, CE, CB, welche sich insgesammt um ihre beyden Endpunkte drehen, und mit den Stücken OE, OB gleiche Länge haben, verbunden. Man öfnet das Instrument so dass ACD dem gegebnen Winkel gleich ist, so wird O der dritte Theil dieses Winkels seyn. (*Acta Erudit. A. 1695. p. 291*). Verbindet man mit diesen noch mehrere gleiche Lineale auf dieselbe Art, so erhält man ein Instrument, womit sich auch der vierte, der fünfte Theil Fig. 84.

u. ſ. f. eines Winkels, Newtons Satz zu folge, finden läſst, der-
gleichen der *Marquis von Hospital* in ſeinem *Tractatus de ſectioni-
bus conicis* I. *10. pr. 6.* beſchreibt. Dieſe Inſtrumente ſind aber
mehr ein Spielwerk als von wahrem Nutzen, indem man einen
beſtimmten Theil eines Winkels oder Bogens mit viel gröſserer
Genauigkeit mittelſt der Sehnen, entweder durch Probiren, oder
aus den Sehnentafeln findet.

Zuſatz II. *Wenn durch den einen Endpunkt eines
gegebnen Kreisbogens AB ein Durchmeſſer BI, und auf die-
ſen ſenkrecht der Halbmeſſer CD gezogen iſt, und dieſer
ſchneidet von einer Sehne AF; die durch den andern End-
punkt des Bogens geht, ein Stück EF dem Halbmeſſer des*
Fig. 85 *Kreiſes gleich ab; ſo iſt der Bogen FI der dritte Theil des
gegebnen Bogens AB, oder Bog. AB = 3. Bog. FI.*

Man ziehe den Durchmeſſer GH parallel mit der
* 14. Sehne AF, ſo ſind erſtens die Bogen AG, FH gleich*;
und *zweytens* ſind auch die Stücke dieſer Parallelen CH,
EF gleich, indem EF nach der Vorausſetzung dem
Halbmeſſer gleich ſeyn ſoll. Zieht man daher HF, ſo
* I. 36. iſt CEFH ein Parallelogramm *, und die Sehne HF
läuft mit CE parallel, wird folglich, da CI auf CD
ſenkrecht ſteht, gleichfalls vom Halbmeſſer CI ſenk-
*I.25.f.1 recht durchſchnitten *, und daher der Bogen HF im
* 9. Punkte I halbirt *. Nun aber ſind die Bogen HI, BG
als Maaſs gleicher Winkel gleich, und der Bogen GA
= HF = 2 HI. Folglich iſt BG = $\frac{1}{3}$. BA und alſo
auch Bog. AB = 3 Bog. FI. Halbirt man daher noch
*Aufg.5 den Bogen GA im Punkte K *, ſo iſt der Bogen AB,
und mithin auch der Winkel der ihn umſpannt, in
drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung 2. Alſo *auch auf dieſe Art lieſse ſich ein gegebner Bogen AB oder ein gegebner Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen*, wäre es nur möglich auf eine wiſſenſchaftliche Art die Sehne AF ſo zu ziehn, daſs das abgeſchnittne Stück derſelben EF dem Halbmeſſer gleich ſey; ein Problem worauf ſchon *Campanus von Novara*, der erſte Commentator Euklids zur Zeit der Wiederherſtellung der Wiſſenſchaften, in einer Scholie zum vierten Buch Euklids, die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurückführt. Allein auch dieſe Aufgabe wirft uns, wir mögen ſie in der Elementargeometrie angreifen, wie wir wollen, wieder auf die Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück. Denn geſetzt das Geſuchte ſey bewerkſtelligt, und vom gegebnen Punkte A aus, ſey eine Sehne AF durch einen gegebnen Halbmeſſer CD ſo gezogen, daſs EF dem Halbmeſſer gleich werde, ſo ſind, wenn man CA und CF zieht, die Dreyecke ACF und CFE gleichſchenklig, mithin $A = F$, und $\angle FCE = FEC = R - \frac{1}{2} F$ * und zugleich $FEC = A$ * I. 31.
$+ ACD$ *. Folglich iſt $R - \frac{1}{2} A = A + ACD$ oder $R -$ * I. 30.
ACD d. h. $ACB = \frac{3}{2} A$, oder $A = \frac{2}{3} ACB$. Um alſo AF gegen den Halbmeſſer CA unter dem gehörigen Winkel A zu ziehn, bey welchem AF von CD auf die verlangte Art geſchnitten wird, müſſen wir den Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen können.

Anmerkung 3. *Der Grund warum die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie überſteigt*, liegt darin, weil mittelſt des Kreiſes und der graden Linie, die ſich nur in zwey Punkten durchſchneiden, keine Frage, in der es auf drey oder mehrere Durchſchnittspunkte ankömmt, beantwortet werden kann, und daſs es bey der allgemeinen Aufgabe *irgend einen Kreisbogen*, oder *irgend einen Winkel* in drey gleiche Theile zu theilen, allemal auf drey oder mehrere Durchſchnittspunkte ankömmt. *Warum*, das finde ich bey andern Geometern nur angedeutet, und noch nicht ſo ganz befriedigend ins Klare geſetzt, wie dieſes vielleicht durch folgende Betrachtungen geſchieht.

Gesetzt wir *halbiren* den Bogen HF und den Winkel HCF durch die grade Linie CI, so scheint es zwar auf dem ersten Anblick als werde nur der Bogen FH und der Winkel HCF durch jene Linie und ihren Durchschnitt I mit dem Kreise halbirt. Allein was den *Kreisbogen* betrifft, so liegt zwischen den beyden Punkten H und F, als Endpunkten, nicht bloss der kleine Bogen HF, sondern es ist zwischen ihnen auch ein Bogen enthalten, der aus der ganzen Kreislinie P und dem Bogen HF zusammengesetzt ist, ferner der Bogen 2P + HF, 3P + HF u. s. f. Indem wir also die Hälfte des Bogens suchen, der sich in den Punkten H und F endigt, und beym wissenschaftlichen Verfahren von dem, was uns gegeben ist, ausgehn, d. h. davon, dass H und F Endpunkte des Bogens sind, fragen wir nach sehr viel mehr, als es auf dem ersten Anblick scheint, und als der Frager sich mehrentheils selbst bewust ist; nemlich nach der Hälfte aller jener Bogen, die sich in H und F endigen, d. h. HF, P + HF, 2 P + HF, 3 P + HF etc. Diese Hälften sind $\frac{1}{2}$ HF, $\frac{1}{2}$ P + $\frac{1}{2}$ HF, P + $\frac{1}{2}$ HF, $\frac{3}{2}$ P + $\frac{1}{2}$ HF etc., oder da $\frac{1}{2}$ HF = HI = GB ist, HI, $\frac{1}{2}$ P + GB, P + HI, $\frac{3}{2}$ P + GB etc. Alle diese halben Bogen liegen zwischen den Punkten H, I und H, B; zwischen jenen Punkten der erste, dritte, fünfte, etc., zwischen diesen der zweyte, vierte etc. Daher sind die beyden Punkte I und B *die halbirenden Punkte, welche jene ganze Reihe von Bogen insgesammt in zwey gleiche Theile theilen; und beyde Punkte finden sich zugleich*, auch wenn wir nur nach dem einen I fragen wollten, als Durchschnitt der halbirenden graden Linie CI mit der Kreislinie. Uns selbst unbewust erhalten wir also hier eine vollständige Antwort, welche in den zusammengesetztern Fällen die Mathematiker der vorigen Iahrhunderte nicht wenig befremdet und überrascht hat.

Eben das ist bey der *Theilung eines unbestimmten Bogens HF in mehrere gleiche Theile* der Fall; d. h. bey der Theilung eines Bogens, den wir blos dadurch denken, dass er zwischen den Punkten H und F liegt, und nicht etwa als einen bestimmten

Theil des Umfangs. Denn dann theilen wir durch ein wissenschaftliches Verfahren nie den kleinen Bogen HF allein, sondern immer zugleich alle Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen. Da wir davon ausgehn müssen, dass der zu theilende Bogen zwischen den Punkten H und F liegt, so passt die Schlussfolge, vermittelst der wir ein solches wissenschaftliches Verfahren begründen, immer zugleich auf alle Bogen, die sich in diesen Punkten endigen, muss also immer eine Zahl von theilenden Punkten geben, durch welche die Theile aller der Bogen, die sich in den Punkten H und F endigen, *zugleich* bestimmt werden. Dass diese stets mit der Anzahl der gesuchten Theile übereinstimmt, nimmt man leicht wahr. So finden wir bey der wissenschaftlichen Halbirung eines unbestimmten Bogens zwey, und bey der Trisection drey verschiedene Punkte, zwischen welchen die Drittel jener ganzen Reihe von Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen, enthalten sind.

Nun aber finden drey, und noch viel weniger mehrere Durchschnittspunkte zwischen zwey Kreisen oder zwischen einem Kreise und einer graden Linie nicht statt. Deshalb übersteigt die Theilung unbestimmter Kreisbogen in drey, fünf und mehrere solche gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie, und sie läst sich geometrisch nur durch Hülfe anderer krummer Linien bewerkstelligen. So zum Beyspiel werden wir mittelst der Kegelschnitte in den folgenden Büchern einen Bogen in drey gleiche Theile theilen.

Was die *Winkel* betrifft, so hat es mit ihnen völlig dieselbe Bewandniss. So gut wir erhabne oder hineingehende Winkel, welche grösser als zwey rechte sind annehmen musten *, können wir uns auch Winkel denken, die grösser als vier rechte, grösser als acht rechte, und so ferner sind. Denn aber liegen zwischen zwey Schenkeln HC, CF eine ganze Reihe von Winkeln, HCF, 4 R + HCF, 8 R + HCF etc, und diese werden insgesammt durch wissenschaftliche Theilung zugleich getheilt, daher von der Theilung der unbestimmten Winkel dasselbe gilt, was wir hier von der Theilung der Kreisbogen bemerkt haben.

V

Ich rede hierbey mit Fleiſs von der Theilung *unbeſtimmter Bogen und Winkel*, d. h. ſolcher Bogen die wir in Abſicht ihres Verhältniſſes zum ganzen Umfange, oder ſolcher Winkel die wir in ihrem Verhältniſs zu vier rechten ganz unbeſtimmt, und nur durch das Merkmal denken, das H und F ihre Endpunkte ſeyn ſollen. Denn nur von dieſen gelten unſere Gründe; nicht von einzelnen Bogen oder Winkeln, die wir als beſtimmte Theile der Kreislinie oder des rechten Winkels, alſo durch ein anderes Merkmal denken. Bey dieſen kann es allerdings Methoden geben, ſie in drey, oder fünf gleiche Theile etc. zu theilen, die aus ihrem Verhältniſs zum rechten Winkel oder zum Umfang abgeleitet werden, dergleichen wir beym rechten Winkel ſchon haben kennen gelernt *, der ſich ohne Schwierigkeit geometriſch in drey gleiche Theile theilen läſst.

* I.31.f.4

der Ueberſetzer.

ANHANG.

Aufgaben welche zu den beyden erſten Büchern gehören.

[Bey jeder der folgenden Aufgaben wird zuerſt die Conſtruction angegeben, vermöge der das geforderte geleiſtet, und alſo die Aufgabe aufgelöſt wird; und darauf bewieſen daſs die Conſtruction möglich iſt, und daſs man durch ſie grade das findet, was man ſucht. Beydes geſchicht mehrentheils in beſondern Abſätzen, denen die Wörter *Auflöſung*; *Beweis* vorzuſetzen überflüſsig geweſen wäre. Da dieſe Aufgaben in das Syſtem der Geometrie gehören, aus dem ſie blos herausgehoben ſind, ſo muſten ſie ſynthetiſch vorgetragen werden, und es würde Zweckwidrig geweſen ſeyn, der Auflöſung eine Analyſis vorauszuſchicken, obgleich dazu meiſt ein paar Worte hingereicht hätten. Le Gendre übergeht die einfachſten, unmittelbar in den Principien gegrüdeten Conſtructionen theils ganz, (wie z. B. das Bilden und Uebertragen gleicher grader Linien) *, theils trägt er ſie zu ſpath vor (z. B. die Conſtruction der Dreyecke aus drey gegebnen Linien); und macht überdem den Beweis der erſten Aufgaben von Sätzen abhängig, die es gar nicht nöthig geweſen wäre, dabey mit ins Spiel zu bringen, und die uns in logiſche Kreiſe verwickeln würden, wenn wir nicht dieſer Unbequemlichkeit durch die Anmerkung zur erſten Aufgabe abgeholfen hätten. Aus beydem entſtehn wahre Mängel in ſeinem Syſtem, die wir hier ſo viel als möglich zu verwiſchen geſucht haben.

d. U.

* Fo. 3. α. β.

AUFGABE I.

Fig. 86. *Eine gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.*

Um jeden der beyden Endpunkte A und B der gegebenen Linie, beschreibe man mit *gleichen* Halbmessern, von willkührlicher Länge (nur müssen sie grösser als die Hälfte von AB seyn) zwey Kreisbogen, *E.11 β. die sich in einem Punkte D schneiden *, und eben so, entweder mit demselben oder mit einem andern Halbmesser, um dieselben Endpunkte, zwey Kreisbogen, die sich in einem andern Punkte E schneiden. Zieht man durch beyde Durcschnittspunkte D, E eine grade *Fo. 1. Linie *, so behaupte ich, wird diese die gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile AC, CB zerschneiden.

Denn die Punkte D und E liegen jeder in zwey Kreislinien, welche um die Mittelpunkte A, B beschrieben sind, stehn also beyde gleich weit von den *E. 2. α. Endpunkten der gegebnen Linie AB ab *. Mithin müssen sie in einer graden Linie liegen, welche auf *I,17 f.1 AB in ihrer Mitte senkrecht steht *. Da nun durch zwey Punkte nur eine einzige grade Linie möglich ist, so muss DE selbst dieses Perpendikel seyn, also die gegebne Linie AB durch DE im Punkte C halbirt werden.

Anmerkung. Die Construction, mittelst welcher Le Gendre diese Aufgabe auflöst, dient eigentlich unmittelbar und zunächst *über der gegebnen graden Linie AB zwey verschiedne gleichschenklige Dreyecke ABD, ABE zu bilden*, wie wir das schon *E.11.Z. oben gelehrt haben *. Man könnte die Auflösung daher auch ſo ausdrücken. Beſchreibe über AB als Grundlinie zwey gleichſchenklige Dreyecke. und verbinde ihre Spitzen durch die grade Linie DE, ſo muſs dieſe die gegebne AB halbiren. Denn es entſtehn alsdann zwey Dreyecke ADE, BDE, die ſich decken, weil ſie untereinander gleichſeitig ſind *. Mithin ſind die Winkel bey D gleich, daher auch die Dreyecke ACD, DCB ſich decken, und CD ſenkrecht auf AB, in der Mitte zwiſchen den Endpunkten A und B aufſteht. Dieſe Linie halbirt alſo den Winkel D, und die Linie AB, und iſt zugleich ein Perpendikel auf die Linie AB, welches durch die beſtimmten Punkte C in der Linie, D auſserhalb der Linie AB geht. Und zwar iſt das der Fall, die Dreyecke mögen beyde auf einer oder auf entgegengeſetzter Seite der Linie AB liegen. Dieſes Perpendikel thut alſo den Aufgaben 1, 2, 3 und 5 (β) zugleich genüge, daher dieſe Aufgaben in das Syſtem nach I. 12 gehören. * I. 11.

d. U.

AUFGABE 2.

Auf eine grade Linie, durch einen in ihr gegebnen Punkt A, eine grade Linie ſenkrecht zu ziehn;

oder an einem gegebnen Punkt A einer graden Linie BC einen rechten Winkel zu bilden. Fig. 87.

Man nehme auf der gegebnen Linie zwey Punkte B und C, welche vom gegebnen Punkte A gleich weit entfernt ſind *, und beſchreibe um dieſe Punkte mit gleichen Halbmeſſern, gröſser als AB, zwey Kreisbogen, die ſich in irgend einem Punkte D ſchneiden *; ſo iſt, wenn man AD zieht, dieſes die geſuchte ſenkrechte Linie, und DAB ein rechter Winkel. *Fo. 3. α *E. 11. β.

Denn da der Punkt D gleich weit von B und von C abſteht, ſo liegt er in einer graden Linie, welche

auf BC in der Mitte zwischen B und C, folglich im
*I.17 f.1 Punkte A senkrecht aufstehet *. Die Linie AD ist daher das gesuchte Perpendikel, und DAB der verlangte rechte Winkel.

[*Andere Auflösungen.* Man nehme ausserhalb der gegebnen Linie einen beliebigen Punkt C, und beschreibe mit CA als Halbmesser um C einen Kreis; so durchschneidet dieser die gegebne Linie in A und
*E.11.α. einem zweyten Punkte B *. Zieht man von B aus den Durchmesser BE, und dann EA, so ist EAB ein Win-
*23.Z.2. kel im Halbkreise, also ein rechter *, also EA das gesuchte Perpendikel.

Oder man beschreibe über einen beliebigen Theil AB, der gegebnen Linie, ein gleichschenkliges Dreyeck ACB, und nehme auf der Verlängerung von BC, CE = CB = CA. Zieht man EA, so ist EAB ein
*23.Z.2. f. 1. rechter Winkel * und EA das gesuchte Perpendikel.

Diese letztern Auflösungen sind besonders bequem, wenn das Perpendikel auf dem Endpunkt einer Linie, die sich nicht verlängern läfst, errichtet werden soll.

d. U.

AUFGABE 3.

Fig. 88. *Von einem ausserhalb einer graden Linie gegebnen Punkte A, ein Perpendikel auf diese Linie zu fällen.*

Aus A als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreisbogen, der die gegebne Linie in zwey Punkten B und D durchschneide, [welches allemal geschehen mufs, wenn man auf der andern Seite der graden Li-

nie BD einen Punkt E nimmt *, und den Kreisbogen * Gr. 8.
mit AE als Halbmesser beschreibt *.] Sucht man dann *E.11.α.
den Punkt C, der zwischen B und D in der Mitte liegt *, * A. 1.
und zieht AC, so ist dieses das gesuchte Perpendikel.

Denn da sowohl A als auch C gleich weit von den Punkten B, D entfernt sind, so steht AC senkrecht auf BD, und zwar in der Mitte zwischen B und D *. *I.17.f.1

[*Eine andere Auflösung.* Um irgend einen Punkt B in der gegebnen Linie, beschreibe man mit dem Halbmesser BA einen Kreis, der jene Linie in F durchschneide, und um F mit FA als Halbmesser gleichfalls einen Kreis. Die grade Linie AE durch die Durchschnittspunkte beyder Kreise gezogen, ist das gesuchte Perpendikel *. * 20.

Zusatz. Auf eine ähnliche Art läst sich *ein Punkt finden, der in der Verlängerung einer graden Linie AB liegt,* Fig. 89. die zu kurz ist, als dass man sie mittelst eines Lineals mit Sicherheit verlängern könnte. Man beschreibe um A und B mit gleichen Halbmessern Kreisbogen, die sich in C, D schneiden, und aus diesen Punkten mit einem hinlänglich grossen Halbmesser Kreisbogen, die sich in einem Punkte E schneiden, so ist E der gesuchte Punkt. Denn da sich alsdann sowohl die Dreyecke ABC, ABD, als auch ∠BEC, BED decken, so sind die Winkel CBA, CBE beyde Hälften des Winkels CBD, mithin gleich. Es fallen daher BA, BE in eine grade Linie zusammen, und E liegt in der Verlängerung von BA.

d. U.

AUFGABE 4.

Fig. 90. 1. *An einem Punkte A der graden Linie AB einen Winkel zu bilden, welcher einem gegebnen Winkel K gleich ist.*

[2. *Durch einen Punkt R ausserhalb AB, nach dieser Linie eine grade Linie so zu ziehn, dass sie die AB unter einem gegebnen Winkel K durchschneide.*]

1. Beschreibe um den Scheitelpunkt K mit einem willkührlichen Halbmesser einen Kreisbogen, der die beyden Schenkel des Winkels in I und L durchschneide. Mit demselben Halbmesser beschreibe um A als Mittelpunkt einen Kreisbogen BO; und dann auch mit der Sehne IL, als Halbmesser, um B einen Kreisbogen, der jenen in irgend einem Punkte D durchschneiden

*E.11.β. muss *. Zieht man AD, so ist DAB der gesuchte Winkel, dem gegebnen Winkel K gleich.

Denn da die beyden Kreisbogen IL, BD zu gleichen Halbmessern und gleichen Sehnen gehören, so

* 7. sind sie gleich *, also auch die Winkel BAD, IKL *. [Dieses erhellt auch unabhängig von dem angeführten Satze des zweyten Buchs. Durch die Construction entstehn nemlich zwey gleichschenklige Dreyecke ABD, KIL, welche untereinander gleichseitig sind,

* I. 11. folglich sich decken *, daher der Winkel A dem gegebnen Winkel K gleich wird.]

[*Eine andere Auflösung.* Nimm auf dem einen Schenkel des gegebnen Winkels K einen Punkt M, und mache AP gleich KM, errichte in P und M Perpendikel

auf diese Linien*, nimm MN = PQ und ziehe AQ, *Aufg.2
so ist PAQ der gesuchte Winkel *.] *I.6. f.1.

[2. Um durch einen gegebnen Punkt R, ausserhalb der Linie AB, eine grade Linie nach AB unter einem gegebnen Winkel K zu ziehn, bilde man an einem beliebigen Punkt A dieser Linie, einen Winkel BAD = K und ziehe mit AD, durch den gegebnen Punkt R, parallel RS, so ist der Winkel RSA = DAB
= K* und RS die gesuchte Linie.] *I.25.A.

AUFGABE 5.

Einen gegebnen Kreisbogen oder einen gegebnen Fig. 91.
Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

1. Um den gegebnen *Kreisbogen* AB in zwey gleiche Theile zu theilen, beschreibe man mit gleichen Halbmessern um A und um B Kreisbogen, welche sich
in einem Punkte D durchschneiden *. Zieht man durch *E.11.β.
diesen Punkt und den Mittelpunkt C des Kreises, wozu der gegebne Bogen gehört, die grade Linie CD, so zerschneidet diese den Bogen in zwey gleiche Theile.

Denn da die Punkte C und D beyde gleich weit von den Endpunkten der Sehne AB entfernt sind, so steht die grade Linie CD auf der Sehne im ihrer Mitte
senkrecht *, und theilt also den Bogen AB in zwey *I.17.f.1
gleiche Theile *. * 9.

2. Soll ein gegebner *Winkel* ACB in zwey gleiche Theile getheilt werden, so beschreibe man um seinen Scheitelpunkt einen Kreisbogen AB und halbire ihn auf die eben gezeigte Art, so wird CD auch jenen

* 9. Winkel halbiren *. [Eine andre Auflösung ist in der Anmerkung zur ersten Aufgabe enthalten.]

Zusatz I. Um einen Kreisbogen oder einen Winkel in vier, in acht, in sechzehn gleiche Theile u. s. f. zu theilen, braucht man mit diesem Halbiren nur fortzufahren. [Ueber die Theilung eines Winkels oder eines Bogens in irgend eine andere Anzahl von gleichen Theilen, z. B. in 3 oder 5 gleiche Theile, siehe Lehrsatz 30. Anmerkung.]

[Zusatz II. Da uns nichts hindert dieses Halbiren, wenigstens im Gedanken, so weit fortzusetzen als man will, so kann man durch dasselbe allemal auf einen Theil kommen, welcher in einer gegebnen Linie A nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als eine jede gegebne Linie B ist; und eben so auf einen Bogentheil, welcher in einem gegebnen Kreisbogen nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als ein jeder gegebner Bogen ist.

d. U.

AUFGABE 6.

Fig. 92. *Durch einen Punkt A, der ausserhalb einer graden Linie BC gegeben ist, mit dieser graden Linie eine Parallellinie zu ziehn.*

Man beschreibe um A mit einem hinlänglich grossen Halbmesser einen Kreisbogen ED, welcher die gegebne Linie in E durchschneide. Mit demselben Halbmesser beschreibe man um E als Mittelpunkt den Kreisbogen

bogen AF, nehme ED gleich AF, und ziehe AD, ſo iſt dieſes die geſuchte Parallellinie.

Denn wenn man die grade Linie AE zieht, ſo ſieht man, daſs vermöge der Conſtruction in der vorigen Aufgabe die Wechſelswinkel AEF, EAD gleich, folglich die Linien BC, AD parallel ſind *. *I.25.A.

[*Zweyte Auflöſung.* Man ziehe durch den gegebnen Punkt A und irgend einen Punkt E der gegebnen Linie eine grade Linie EA, und bilde am Punkte A dieſer Linie eine Winkel HAE, welcher dem äuſsern Winkel bey E, gleich iſt *, ſo ſind GH, BC, wegen der Gleichheit der äuſsern Winkel parallel *. Um auf die leichteſte mechaniſche Art dieſe Gleichheit äuſserer Winkel zu bewerkſtelligen, dient das *deutſche Parallellineal* mit ſeinem materiellen unveränderlichen Winkel, den man längs der Linie AE verſchiebt. * A. 4. *I.25.A.

Dritte Auflöſung. Nimm in BC einen beliebigen Punkt F, und von dieſem aus ein Stück FC gleich FA, beſchreibe um C und A mit dieſer Linie als Halbmeſſer Kreisbogen, die ſich in einem Punkt D durchſchneiden, und ziehe AD, ſo iſt dieſes die geſuchte Parallellinie. Denn in den ſich deckenden gleichſchenkligen Dreyecken AFC, ADC ſind alle Winkel an der Grundlinie, mithin die Wechſelswinkel für FC, AD gleich.

Vierte Auflöſung. Beſchreibe um einen willkührlichen Mittelpunkt eine Kreislinie, die durch den gegebnen Punkt A gehe und die gegebne Linie in den T. III. Fig. 85.

Punkten G und H schneide; nimm den Bogen HF gleich GA und ziehe die Sehne AF, so ist AF mit der gegebnen Linie GH parallel *.]

* 13.

AUFGABE 7.

Fig. 93. *Aus zwey gegebnen Winkeln A und B eines Dreyecks, den dritten Winkel zu finden.*

Man ziehe eine grade Linie DF in unbestimmter Länge, und bilde an einem Punkte E dieser Linie einen Winkel DEG = A und FEH = B *, so ist GEH der gesuchte Winkel, weil er mit den beyden übrigen zusammengenommen zwey rechte Winkel bildet *. [So findet man also geometrisch, d. i. durch Construction, die Ergänzung zweyer Winkel zu zwey rechten, mithin zu zwey gegebnen Winkeln des Dreyecks den dritten.]

* A. 4.
*I. 31.

AUFGABE 8.

Fig. 94. *Wenn zwey Seiten A, B eines Dreyecks und der von ihnen eingeschlossne Winkel C gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

An irgend einem Punkte D einer unbestimmt gezognen graden Linie DE, bilde man einen Winkel EDH, der dem gegebnen Winkel C gleich ist *. Auf dessen Schenkel nimm DG = A, DH = B * und ziehe GH, so ist DGH das gesuchte Dreyeck *.

* A. 4.
*Fo.3. α
* I. 6.

AUFGABE 9.

Fig. 95. *Wenn eine Seite B und zwey Winkeln C und C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

Liegen die gegebnen Winkel nicht beyde an der gegebnen Seite an, so suche man nach Aufgabe 7. den zweyten anliegenden Winkel. Dann nehme man auf einer unbestimmt gezognen graden Linie ein Stück DE der gegebnen Seite gleich, und bilde an den Punkten D, E zwey Winkel, den anliegenden Winkeln gleich *, * A. 4 so ist, wenn ihre Schenkel sich in einem Punkte H durchschneiden, DEH das gesuchte Dreyeck.

[Die Schenkel durchschneiden sich aber nur dann, wenn die Summe der beyden gegebnen Winkel weniger als zwey rechte Winkel beträgt *; daher dieses die *I. 23. 24 *Bedingung* der Möglichkeit der Aufgabe ist. Wäre die Summe grösser als zwey rechte Winkel, so durchschneidet sich die entgegengesetzt liegende Verlängerung der beyden Schenkel *, und dann entstünde ein * I. 24. Dreyeck, worin die beyden Nebenwinkel der gegebnen Winkel, an der gegebnen Seite anliegen.]

Anmerkung. Hier folgt bey Le Gendre die Aufgabe, *aus drey gegebnen graden Linien A, B, C ein Dreyeck zu beschreiben*, von welcher wir an einer schiklichern Stelle * schon umständlich gehandelt haben. *E. 11. Z

AUFGABE 10.

Wenn zwey Seiten A und B und der der Seite B gegenüberstehende Winkel C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben. Fig. 96.

Man nehme auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels C, oder eines Winkels D welcher ihm gleich ist, DE = A, und beschreibe mit B als Halbmesser um den Punkt E einen Kreisbogen. Wenn dieser den andern Schenkel in einem Punkte F schneidet, so ist DEF das gesuchte Dreyeck.

Dieses Schneiden kann nur dann erfolgen, wenn die Linie B grösser als der senkrechte Abstand des
*I. 16. 1. Punkts E von dem andern Schenkel DF ist *, welches mithin die allgemeine *Bedingung* der Möglichkeit für diese Aufgabe abgiebt, die ohnedem unmöglich wird. Geschihet indess auch dieser Bedingung genüge, so muss, im Fall C, folglich auch D, ein *rechter* oder ein
*I. 16. 3. *stumpfer Winkel* ist, überdem B $>$ A seyn*, wie es
* I. 14. auch die Natur des Dreyecks mit sich bringt *; sonst findet auch unter der erstern Bedingung kein Schneiden des Schenkels DF statt.

Fig. 97. Ist hingegen C, folglich auch D ein *spitzer Winkel*, so mag die Seite B, welche diesem Winkel gegenübersteht, grösser oder kleiner als A seyn, immer wird, wenn der erstern Bedingung genüge geschieht, der Schenkel DF vom Kreisbogen, der mit B als Halbmesser um den Punkt E beschrieben wird, durchschnitten, nur dass, *wenn die gegenüberstehende Seite B kleiner als*
*I. 16. 2. u. Z. 2. Fig. 98. *die anliegende A oder ED ist*, der um E beschriebene Kreisbogen diesen Schenkel in *zwey* Punkten F und G, die
*II. 6. 2. zu einerley Seite des Scheitels D liegen *, durchschneidet, in welchem Fall wir *zwey Dreyecke* DEF, DEG bekommen, welche beyde gleichmäsig der Aufgabe genüge thun.

[Wenn also ein Dreyeck durch zwey Seiten und einen der gegenüberstehenden Winkel bestimmt wird, so ist diese Bestimmung im letzten Fall *zweydeutig*

Dieſe Zweydeutigkeit aber wird gehoben, wenn man zugleich anzeigt, ob das ſpitzwinklige oder das ſtumpfwinklige Dreyeck gemeint iſt *.] * I. 20.

AUFGABE II.

Fig. 99.

Wenn ein Winkel C und zwey ihn einſchlieſsende Seiten A und B eines Parallelogramms gegeben ſind, das Parallelogramm zu beſchreiben.

Man nehme eine grade Linie DE gleich A, bilde am Punkte D einen Winkel EDF gleich dem gegebenen Winkel C, nehme auf deſſen zweytem Schenkel das Stück DF gleich B, und beſchreibe um den Punkt E mit dem Halbmeſſer DF = B, und um den Punkt F mit dem Halbmeſſer DE = A zwey Kreisbogen, die ſich in einem Punkte G durchſchneiden werden, weil die Summe ihrer Halbmeſſer gröſser, und der Unterſchied ihrer Halbmeſſer kleiner als der Abſtand ihrer Mittelpunkte EF iſt *. Zieht man dann FG, EG, ſo iſt DEGF das geſuchte Parallelogramm. * I. 8. u. II. E. 11.

Denn vermöge der Conſtruction ſind die gegenüberſtehenden Seiten einander gleich, daher die vierſeitige Figur ein Parallelogramm iſt *; und zugleich iſt es aus den gegebenen Stücken beſchrieben. * I. 34.

Zuſatz. Iſt der gegebene Winkel ſpitz oder ſtumpf, ſo wird die Figur, wenn die gegebnen Seiten gleich ſind, ein *Rohmbus* *, wenn ſie ungleich ſind, ein *Rhomboides*. Iſt dagegen der gegebene Winkel ein rechter, ſo wird die Figur ein *Rechteck*, das, im Fall auch * I. E. 19.

die Seiten gleich sind, ein *Quadrat* wird; woraus also die Construction und die Möglichkeit dieser Arten von Vierecken erhellt.

AUFGABE 12.

Taf. III. F. 100. *Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises, oder eines gegebenen Kreisbogens zu finden.*

Man nehme in der Kreislinie oder im Kreisbogen willkührlich drey Punkte A, B, C, verbinde sie durch die graden Linien AB, BC, welche folglich Sehnen des gegebenen Kreises oder Bogens seyn müssen, halbire diese Sehnen, und errichte auf ihrer Mitte die
*A. 1. 2. Perpendikel DE, FG *, welche sich in einem Punkte O schneiden müssen. Dieser Punkt O ist der gesuchte
* 10. Mittelpunkt *,

Zusatz I. Mittelst derselben Construction läst sich

1) *ein Kreis bilden, der durch drey gegebene Punkte A, B, C, oder durch zwey gegebene Punkte A, B geht,* [welches letztere eine unbestimmte Aufgabe ist, die unendlich viel Auflösungen zuläst, indem jeder Punkt im Perpendikel DE der Mittelpunkt eines solchen Kreises, der durch die Punkte A und B geht, seyn
*I. 17. f. 3 kann *]

2) *Wenn ein Kreisbogen gegeben ist, der ganze Kreis, wozu er gehört, vollenden*; und

3) *ein Kreis einem gegebenen Dreyeck ABC umschreiben*, d. h. so bilden, dass die Kreislinie durch die drey

Winkelpunkte des gegebenen Dreyecks geht *. [Ist in * E. 9.
dieser letztern Aufgabe das gegebne Dreyeck bey B
rechtwinklig, so ist ABC ein Halbkreis *, und folglich *23.Z.2.
liegt dann der Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises *in der Hypotenuse* AC. Ist das Dreyeck bey B *stumpfwinklig*, so steht es in einem Kreisabschnitt, der kleiner als der Halbkreis ist *, und so fällt alsdann der *23.Z.3.
Mittelpunkt O *ausserhalb des Dreyecks*. Hat endlich
das Dreyeck lauter spitze Winkel, so steht jeder die- F. 107.
ser Winkel in einem Kreisabschnitt, der grösser als der
Halbkreis ist *, und der folglich den Mittelpunkt um- *23.Z.3.
schliesst. Der Mittelpunkt liegt dann also in dem
Theil, der allen drey Kreisabschnitten gemein ist,
d. i. *im Dreyeck* ABC.]

[Zusatz II. Liegen die drey gegebnen Punkte F. 101.
A, B, C, durch die ein Kreis gehn soll, so, dass die
Perpendikel DE, FG sich in einer zu weiten Entfernung
schneiden, als dass man den Halbmesser bequem fassen
könnte, so kann man durch folgende *Methoden noch mehrere Punkte in der Kreislinie, welche durch A, B, und C geht, einzeln finden*. Verbinde die drey gegebenen Punkte durch grade Linien, ziehe durch einen
derselben C, unter beliebigen Winkeln mit CB, grade
Linien CD, CE etc., und unter denselben Winkeln
mit AB, nach derselben Seite zu, grade Linien durch
den Punkt A *, so liegen die Durchschnittspunkte D, * A. 4.
E etc. in der Kreislinie durch A, B, C. Denn die
Winkel B, D, E sind insgesammt gleich, und sie umspannen alle die Sehne AC, daher ihre Spitzen in dem
Kreisbogen durch A, B, C liegen *. — Oder man * 26.

ziehe durch C, unter Winkeln gleich BAC, dem kleinſten der beyden die an AB anliegen, mehrere grade Linien, CG, CH u. ſ., und ſchneide mit CB als Halbmeſſer, von A, G etc. aus, Punkte G, H etc. unter ſpitzen Winkeln ab, ſo liegen dieſe Punkte in der Kreislinie, die durch A, B, C geht. Denn da die Winkel BAC, ACG, GCH etc. in dem geſuchten Kreiſe gleiche Winkel am Umfange ſind; ſo umfaſſen
* 7. ſie gleiche Sehnen CB, AG, GH *, und da überdem die Sehnen CG, CH näher nach dem Mittelpunkte zu
* 8. liegen, müſſen ſie zunehmen *, folglich AGC, GHC
* I. 14. kleine ſtumpfe Winkel ſeyn *, daher G, H etc. nothwendig in der Kreislinie durch A, B, C liegen.]

[AUFGABE 13.]

Um einen gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beſchreiben, der eine gegebene grade Linie oder einen gegebenen Kreis berührt.

F. 102. 1. Fälle vom Mittelpunkt C ein Perpendikel auf die gegebene Linie HI, ſo berührt der Kreis, welcher mit dieſem Perpendikel beſchrieben iſt, die gegebe-
* 12. ne Linie *.

Taf. II. Fig. 49. 2. Ziehe durch beyde Mittelpunkte eine grade Linie AB, ſo durchſchneidet dieſe den gegebenen Kreis in zwey Punkten I, H und Kreiſe mit AI oder AH
* 16. als Halbmeſſer beſchrieben, berühren den erſtern *.

F. 102. Zuſatz I. *Iſt blos der Mittelpunkt C des Kreiſes gegeben, der die Linie AB berührt, und man ſucht deſſen*

Halbmesser und den Berührungspunkt, so ziehe man nach einem beliebigen Punkt A in der gegebenen Linie die grade Linie CA, halbire sie in O, und beschreibe mit OA um O einen Bogen. Wo dieser die AB durchschneidet, da ist der gesuchte Berührungspunkt B, und zieht man CB, so ist dieses der gesuchte Halbmesser. Denn ABC ist als Winkel im Halbkreis ein rechter *, *23.Z.2. mithin BA ein Perpendikel auf dem Halbmesser CB in dessen Endpunkte, also eine Tangente *. * 12.

Zusatz II. *Sucht man einen Kreis der die grade Linie AD im Punkte D berühret, und zugleich durch einen gegebenen Punkt E geht*, so ziehe man DE, halbire diese Linie im Punkte F, und errichte auf ihr in diesem Punkte, so auch auf AD im Punkte D, Perpendikel. Wo beyde Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises *. * 10.

Grade so findet man den Mittelpunkt eines Kreises, der durch einen gegebenen Punkt geht, und einen andern Kreis in einem gegebnen Punkte berührt.

Zusatz III. *Um einen Kreis zu finden der zwey gegebene Kreise berührt*, beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser um den Mittelpunkt A des einen Kreises einen Kreisbogen, und um den Mittelpunkt B des zweyten der gegebnen Kreise ebenfalls einen Bogen, mit einem Halbmesser, der vom erstern um den Unterschied der Halbmesser der beyden gegebnen Kreise verschieden ist. Wo beyde Bogen sich schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten berührenden Kreises. Denn die graden Linien welche von Taf. II. Fig. 48.

dieſem Durchſchnittspunkte, die eine durch A, die andre durch B bis an die Kreislinien gezogen werden, ſind alsdann gleich lang, und ein Kreis mit dieſen Linien als Halbmeſſer um den gefundnen Durchſchnittspunkt beſchrieben, berührt ſowohl den einen als den andern Kreis, weil die Punkte, worin er mit ihnen zuſammen trifft, in der graden Linie durch die Mittel-
*16.f.2. punkte liegen *.

Soll der Mittelpunkt des berührenden Kreiſes mit den Mittelpunkten A, B, der beyden andern in grader Linie liegen, ſo ziehe man durch die Mittelpunkte A, B der gegebnen Kreiſe eine grade Linie, welche die Kreiſe in den Punkten D, I, F, H ſchneide. In je zwey dieſer Punkte aus verſchiedenen Kreislinien kann die Berührung geſchehn. Den Abſtand dieſer beyden Punkte halbire man, ſo erhält man den Mittelpunkt des dritten Kreiſes, der die gegebnen in dieſen Punkten
* 16. berührt *.

Soll der dritte Kreis den Kreis um A in einem andern gegebnen Punkte berühren, ſo ziehe durch dieſen Punkt einen Durchmeſſer, und beſchreibe um B, mit einem Halbmeſſer der vom Halbmeſſer des Kreiſes um A, um den Unterſchied der Halbmeſſer der beyden gegebnen Kreiſe verſchieden iſt, einen Kreisbogen; ſo iſt der Durchſchnitt dieſes Bogens mit jenem Durchmeſſer, der Mittelpunkt des geſuchten berührenden Kreiſes.

AUFGABE 14.

T. III. F. 102. *Durch einen gegebnen Punkt A eine Tangente an einen gegebnen Kreis zu ziehn.*

1. Liegt der gegebne Punkt A' *auf der Kreislinie*, so ziehe den Halbmesser CA', und errichte auf ihn in seinem Endpunkte die senkrechte Linie IH, so ist IH die gesuchte Tangente *. * 12.

2. Liegt der gegebne Punkt A *ausserhalb des Kreises*, so ziehe nach ihm aus dem Mittelpunkte eine grade Linie CA, theile diese in zwey gleiche Theile im Punkte O, und beschreibe um diesen mit dem Halbmesser OC einen Kreis, der, weil er durch den Mittelpunkt und einen Punkt ausserhalb des um C beschriebnen Kreises geht, diesen durchschneiden muss *, *.E.12.β und zwar in zwey Punkten B, D, welche zu entgegengesetzten Seiten der Linie CA liegen, und von dem Durchschnittspunkte E derselben mit der Kreislinie, so auch vom Punkte A, gleichweit abstehn *. Zieht man * 19. AB, AD, so ist jede beyder Linien die gesuchte Tangente. — Denn zieht man die Halbmesser CB, CD, so sind die Winkel ABC, ADC, Winkel im Halbkreise, also rechte; folglich stehn AB, AD auf den Halbmessern CB, CD in ihren Endpunkten senkrecht, sind also Tangenten am gegebnen Kreise *. *15. f. 4.

Zusatz. *Um an einem Kreise mit einer gegebnen Sehne parallel eine Tangente zu ziehn*, fälle man vom Mittelpunkte auf die Sehne ein Perpendikel, und ziehe an dem Punkte, wo dieses den Kreis durchschneidet eine Tangente, so läuft diese mit der gegebnen Sehne parallel *. * I. 21.

[AUFGABE 15.]

In einem gegebnen Kreise eine Sehne einzutragen, welche einer gegebnen Linie MN (kleiner als der F. 103.

Durchmesser) gleich ist, und 1) durch einen gegebnen Punkt P geht, oder 2) einer gegebnen graden Linie Q parallel läuft.

Man beschreibe aus einem beliebigen Punkte A in der Kreislinie, mit der gegebnen Linie MN als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den erstern Kreis in B durchschneide, und ziehe AB, so ist AB eine Sehne des gegebnen Kreises, von der verlangten Grösse MN. Zieht man auf die Mitte dieser Sehne, aus dem Mittelpunkte, die grade Linie CD, und beschreibt mit ihr als Halbmesser um C einen Kreis, so berührt dieser die grade Linie AB, welche auf dem Halbmesser in
*9f.1;12. dessen Endpunkte senkrech steht *.

1. An diesem Kreise ziehe man vom gegebnen
* A. 14. Punkte P aus eine Tangente PE *, so ist das Stück dieser berührenden Linie, welches innerhalb des erstern Kreises liegt, d. h. FG, die verlangte Sehne.

2. Vom Mittelpunkte fälle man auf die gegebne Linie Q ein Perpendikel, und ziehe durch den Punkt H, wo dieses den zweyten Kreis berührt, an diesem
* A. 14. Kreise eine Tangente *, so ist das Stück IK dieser Tangente, welches innerhalb jenes Kreises liegt, die verlangte Sehne.

Denn als Tangenten an dem innern Kreise, stehn beyde Sehnen FG, IK auf den Halbmessern CE, CH
* 12. senkrecht *, sind also beyde vom Mittelpunkte um den Halbmesser CD, folglich eben so weit als die Sehne AB entfernt, mithin dieser Sehne, und der gegebnen Li-
* 9. nie MN, gleich *. Die erstere geht aber durch den

Punkt P, die letztere ist zugleich mit Q auf CH senkrecht, also mit Q parallel *. *I. 21.

Sowohl für die erste als für die andre Aufgabe, giebt es in jedem Kreise zwey Sehnen, auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, welche ihr genüge thun.

Zusatz. Mittelst dieser Auflösung ist man auch im Stande folgendes zu bewerkstelligen: 1. *Von einem gegebnen Punkte P ausserhalb eines Kreises, nach dem Kreise zwey grade Linien so zu ziehn, dass sie zwischen sich Bogen EF, GH abschneiden, welche zusammengenommen den Bogen zwischen den Schenkeln eines andern Winkels, dessen Spitze O ausser dem Kreise liegt, gleich sind.* F. 104.

Man ziehe nemlich nach dem eben gelehrten Verfahren, vom Punkte P aus die graden Linien PE, PF so, dass die Sehnen FH, EG, welche die Kreislinie auf ihnen abschneidet, den Sehnen AC, BD auf den Schenkeln des Winkels O gleich sind. Es gehören alsdann zu jenen und zu diesen Sehnen gleiche Bogen, deren Unterschiede, d. h. die Bogen AB + CD, und EF + GH auch gleich seyn müssen.

2. *Von einem gegebnen Punkte O in der Verlängerung einer Sehne AC an, eine grade Linie so zu ziehn, dass die Bogen zwischen ihm und dieser Sehne, einem gegebnen Bogen AE gleich sind.* Ziehe zwischen den gegebnen Punkten C und E die Sehne CE, und eine zweyte Sehne BD so, dass sie verlängert durch den gegebnen Punkt O gehe, und der erstern CE gleich sey *; so ist dieses die gesuchte grade Linie. Denn *14. (2) wegen Gleichheit der Sehnen sind die Bogen CA + AE,

und DC + CA + AB gleich, mithin die Bogen AE
*Gr. 2. β $= DC + BA$ *.

Anmerkung. Aufgabe und Zusatz entlehne ich, doch mit verkürzten Beweisen aus Gregor von St. Vincenz.

d. U.

AUFGABE 16.

F. 105. *Ueber eine gegebne grade Linie AB einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebnen Winkel C fasst, (d. h wo jeder in diesem Kreisabschnitt*
* E. 7. *eingeschriebne Winkel, dem Winkel C gleich ist* *.)

Man verlängere die gegebne Linie AB, und bilde am Punkte B und der Verlängerung BD, einen Winkel DBE, dem gegebnen Winkel C gleich. Auf dem Schenkel BE errichte man im Punkte B ein Perpendikel, so auch auf der gegebenen Linie AB in deren Mitte, und beschreibe aus dem Durchschnittspunkt O beyder Perpendikel als Mittelpunkt, mit OB als Halbmesser einen Kreis, so erhält man den gesuchten Kreisabschnitt AMB.

Denn BE ist, als ein Perpendikel auf dem Halbmesser OB in dessen Endpunkt B, eine Tangente des
* 12. Kreises im Punkte B *, und wird im Berührungpunkte von der Sehne AB durchschnitten. Folglich hat der Winkel ABF, mithin auch dessen Scheitelwinkel DBE,
* 25. zu seinem Maasse den halben Bogen BKA *, und ist jedem Winkel im Kreisabschnitte AMB, der zur ent-
* 25. f. gegengesetzten Seite der Sehne liegt, gleich. Nun ist aber DBE der Construction gemäss dem gegebnen Winkel C gleich; also der Kreisabschnitt AMD der Gesuch-

te, indem er über der Linie AB steht, und den Winkel C fasst.

[Anmerkung. Wäre der gegebne Winkel C ein *rechter*, so fiele das Perpendikel BO mit der Sehne AB zusammen, und es gäbe keinen Durchschnittspunkt O. Dann aber wissen wir ohnedem dass der gesuchte Kreisabschnitt, der über AB beschriebene Halbkreis ist. Mehrere Aufgaben, welche diese begründet, erwähnt Lehrsatz 26. Folg. Um in einem gegebnen Kreise einen Abschnitt zu bilden welcher einen gegebnen Winkel fasst, verfährt man grade auf dieselbe Art.]

[*Eine andere Auflösung.* Errichte auf dem einen Schenkel CG des gegebnen Winkels C, im Scheitelpunkte, ein Perpendikel CI, und ziehe an den Endpunkten A, B der gegebnen Linie, unter dem Winkel ICH, zwey Linien AO, BO, und zwar, wenn der gegebne Winkel stumpf ist, unterhalb, wenn er spitz ist, oberhalb der Linie AB. Ein Kreisbogen, um ihren Durchschnittspunkt O beschrieben, bildet den verlangten Kreisabschnitt AMB.

Denn der Winkel O am Mittelpunkte ist nach der Construction gleich 2R — 2ICH *. Folglich ist im zweyten Fall jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB halb so gross *, d. h. gleich R — ICH, und also dem gegebnen Winkel C gleich. Im ersten Fall ist jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB der halben Ergänzung dieses Winkels zu vier rechten, d. h. R + ICH, also auch dem gegebnen Winkel C gleich.] * I. 31. * 23.

[Zusatz. *Es sind drey Punkte A, B, C gegeben, die so liegen, dass der Mittelpunkt des Kreises der durch sie geht, zu weit abliegt, als dass man ihn nach Aufgabe 12* F. 106.

darstellen könnte; aus einem derselben A, eine grade Linie zu ziehn, welche nach dem Mittelpunkte dieses Kreises zu läuft.

Verbinde die drey Punkte durch grade Linien, und ziehe durch A die grade Linie AD, unter einem Winkel BAD, welcher dem Winkel an dem gegenüberliegenden Punkte C gleich ist; so ist ein Perpendikel auf AB im Punkte A, die gesuchte Linie. — Denn der Winkel C ist in dem erwähnten Kreise ein Winkel am Umfange, der den halben Bogen AB zum Maafs hat. Dieser ist folglich auch das Maafs des Winkels BAD, mithin mufs, da BA eine Sehne ist, AD eine Tangen-
* 24. Z. te des Kreises im Punkte A seyn *, also das Perpendikel AM nach dem Mittelpunkte des Kreises
* 12. laufen *.]

[AUFGABE 17.]

Ein Dreyeck, welches mit einem gegebnen Dreyeck
F. 107. *PQR gleichwinklig ist, 1) in einen gegebenen Kreis einzuschreiben, und 2) um einen gegebenen Kreis zu umschreiben.*

1. Nach dem Punkte A der Kreislinie, welcher einer der Winkelpunkte des einzuschreibenden Dreyecks werden soll, ziehe den Halbmesser OA, und trage den Winkel Q zweymal neben einander am Punkte
*Aufg. 4 O dieser Linie *. Durchschneidet der dritte Schenkel den Kreis in B, so ziehe AB und mache den Winkel ABC gleich P, so ist, wenn man AC zieht, ABC das verlangte Dreyeck, welches mit dem gegebenen PQR gleich-

gleichwinklig iſt. Denn der Winkel C iſt gleich der Hälfte des Winkels AOB *, folglich gleich Q. Da * 23. auch B gleich P iſt, ſo müſſen die dritten Winkel R, A ebenfalls gleich *, alſo beyde Dreyecke unter ein- * I. 31 f. 1 ander gleichwinklig ſeyn.

Eine andere Auflöſung. Ziehe durch A eine Tangente GH an dem gegebnen Kreiſe *, und mache A. 14. am Punkte A den Winkel GAC gleich P, den Winkel HAB gleich Q, und ziehe BC, ſo iſt ABC das geſuchte Dreyeck. Denn die Winkel, welche die Tangente mit den beyden Sehnen, die durch den Berührungspunkt gehn, bildet, ſind den Winkeln in den entgegengeſetzt liegenden Abſchnitten gleich *, alſo * 25. B = GAC = P und C = HAB = Q, und folglich iſt das eingeſchriebene Dreyeck ABC mit dem gegebenen PQR gleichwinklig.

2. Verlängere eine Seite PQ des gegebenen Dreyecks, und mache DOE = RQS und DOF = RPT. Durch D, E und F ziehe man Tangenten an dem gegebnen Kreiſe, ſo bilden dieſe das geſuchte Dreyeck ABC, welches dem Kreiſe *umſchrieben*, und mit dem gegebenen PQR gleichwinklig iſt. — Denn da bey D, E, F rechte Winkel ſind, ſo ſind die einander gegenüberſtehenden Winkel in den Vierecken BDOE und ADOF in jedem zuſammengenommen zwey rechten Winkel gleich *. Folglich B gleich dem Neben- * I. 32. winkel von RQS, d. h. gleich Q, und A gleich dem Nebenwinkel von RPT, d. h. gleich P. Mithin iſt

das umschriebene mit dem gegebenen Dreyeck gleichwinklig.

AUFGABE 18.

Einen Kreis, 1) in ein gegebnes Dreyeck ABC einzuschreiben; 2) um ein gegebnes Dreyeck zu umschreiben.

F. 108. 1. Theile zwey der Winkel des Dreyecks, A, B, durch die graden Linien AO, BO, welche sich in einem Punkte O schneiden müssen *, in zwey gleiche Theile; fälle vom Punkte O auf eine der Seiten des Dreyecks ein Perpendikel OD, und beschreibe mit OD als Halbmesser, um O als Mittelpunk, einen Kreis; so ist dieser der gesuchte, in dem Dreyeck ABC eingeschriebene Kreis.

* I. 24.

Der so gefundene Punkt O steht nemlich von allen Seiten des gegebnen Dreyecks gleich weit ab, indem die Perpendikel auf die Seiten des Dreyecks, OD, OE und so auch OD, OF, gleich sind. Denn sie sind Katheten in rechtwinkligen Dreyecken ODB, OEB und ODA, OFA, wovon die ersten, so wie die letzten, sich wegen Gleichheit der Hypothenusen und eines der spitzen Winkel decken *. Die drey Fusspunkte der Perpendikel, D, E, F liegen also im Umfange der Kreislinie, welche um O mit dem Halbmesser OD beschrieben ist *. Diese Kreislinie berührt folglich die drey Seiten des Dreyecks ABC *, und ist daher in dem gegebenen Dreyeck eingeschrieben *.

* I. 18. f. 2
* E. 2. γ.
* 12.
* E. 16.

2. Die Methode einen Kreis um ein gegebenes Dreyeck zu beschreiben, steht in Aufgabe 12.

[Zusatz I. Zieht man noch CO, so decken sich auch die beyden rechtwinkligen Dreyecke COE, COF, daher die Linie CO den Winkel C ebenfalls halbirt. Folglich *durchschneiden sich die graden Linien, welche die Winkel eines Dreyecks halbiren, alle drey in einem Punkte*, und zwar in dem Punkte, welcher von allen drey Seiten gleich weit entfernt ist, und deshalb *einem Kreise, der dem Dreyeck eingeschrieben wird, zum Mittelpunkte dient*. Diese Linien zertheilen das ganze Dreyeck in drey kleinere Dreyecke, wovon ein jedes über eine Seite des Gröſsern als Grundlinie steht, und worin die Perpendikel aus den Spitzen auf die Grundlinien gleich sind.]

[Zusatz II. Die Seiten des Dreyecks werden durch diese Perpendikel so zerschnitten, daſs 1) an jedem *Winkelpunkte gleiche Stücke anliegen*, und 2) *jedes abgeschnittene Stück sammt der gegenüberliegenden Seite, dem halben Umfang des Dreyecks gleich ist*. Das erstere folgt aus der bewiesenen Deckung der kleinen rechtwinkligen Dreyecke, und hieraus wiederum die zweyte Behauptung. Denn bezeichnet man den *halben Umfang des Dreyecks* mit S, so ist $S = AD + BE + CF$, und setzt man in diesem Ausdruck der Folge nach, statt der darin vorkommenden Linien, das Stück an demselben Durchschnittspunkt, welches ihr gleich ist, so erhält man für den *halben Umfang* S eines Dreyecks, folgende Ausdrücke:

$$S = AD + BE + EC = AD + BC = AF + BC$$
$$S = AF + BE + CF = BE + AC = BD + AC$$
$$S = AD + BD + CF = CF + AB = CE + AB$$

Und daraus laſſen ſich umgekehrt wieder Ausdrücke für die Gröſse der abgeſchnittenen Stücke ableiten, welche uns in der Folge von Nutzen ſeyn werden.

$$AD = AF = S - BC$$
$$BE = BD = S - AC$$
$$CF = CE = S - AB.$$

Fig. 78* [Zuſatz III. Vergleicht man die Lage des hier betrachteten Durchſchnittspunkts (O) dreyer grader Linien, welche *die Winkel eines Dreyecks halbiren*, mit der Lage des gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkts (C) *dreyer Perpendikel*, welche auf der Mitte jeder der drey Seiten eines Dreyecks errichtet ſind*, oder was dasſelbe ſagt, die Lage der *Mittelpunkte* des dem Dreyeck *eingeſchriebenen*, und des *umſchriebnen Kreiſes*; und mit dieſen *drittens* den Punkt (P), worin die Perpendikel welche aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberſtehende Seiten gefällt ſind, alle drey ſich durchſchneiden *, und *viertens* den Punkt (S), worin, wie wir in den folgenden Büchern ſehn werden, die drey graden Linien, die aus den Winkelpunkten nach den Punkten in der Mitte der gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, ſich durchſchneiden, (den Schwerpunkt des Dreyecks); ſo erhält man folgende intereſſanten Sätze. 1) *Im gleichſchenkligen Dreyeck liegen dieſe vier Punkte in einer graden Linie, und zwar im Perpendikel, welches aus der Spitze des Dreyecks auf die Grundlinie gefällt wird.* Denn dieſes Perpendikel halbirt zu-

* 10.

*24 Z. 2.

gleich den Winkel an der Spitze und die gegenüberstehende Grundlinie *. 2) *Im gleichseitigen Dreyeck fallen diese Punkte alle vier in einem Punkt zusammen.* Denn jedes Perpendikel, welches aus einem Winkelpunkte auf die gegenüberstehende Seite gefällt wird, halbirt im gleichseitigen Dreyeck diese Seite und den Winkel an der Spitze *. *I.17.f.2 *I.17 f.1

3) *In keinem ungleichseitigen Dreyeck liegen diese Punkte alle vier in grader Linie.* Denn sonst müfste eins der Perpendikel, welche aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, zugleich diese Seite und den Winkel an der Spitze halbiren, da das Dreyeck denn nothwendig gleichschenklig wäre.

4) *Der erste O, und der vierte S, dieser Durchschnittspunkte* (der Mittelpunkt des eingeschriebnen Kreises, und der Schwerpunkt) *liegen bey jedem Dreyecke innerhalb desselben; der zweyte, C', und dritte, P*, aber (der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, und der Durchschnittspunkt der Perpendikel aus den Spitzen) *liegen in spitzwinkligen Dreyecken innerhalb, in stumpfwinkligen ausserhalb des Dreyecks* * *und* in *rechtwinkligen*, jener auf der Hypotenuse, dieser in der Spitze des rechten Winkels.] *A.12.Z 1; I.16 Z.2.f.2.

Anmerkung. Ueber die Lage dieser *vier merkwürdigen Punkte* bey jedem Dreyeck, hat *L. Euler* eine interessante algebraische Untersuchung angestellt, (*Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* in den Nov. Comment Ac. Sc. Petropol. ad. A. 1765) in welcher er den sehr netten Satz darthut, *dass in jedem Dreyeck drey dieser Punkte, nemlich C', P und S in grader Linie liegen*, und zwar so, dass immer S zwischen C' und P liegt, und PS das Doppelte von C'S, oder

PS = 2. CS ist, wie man dieses auch in unserer Figur wahrnimmt. Hat man also zwey dieser Punkte, so findet man den dritten durch eine sehr leichte Construction. Auch lehrt *Euler* in dieser Abhandlung, wie man, wenn die drey Punkte O, P, S gegeben sind, aus der Lage dieser drey Punkte das Dreyeck ABC finden kann, welches von der Auflösung einer Cubischen Gleichung abhängt, deren drey Wurzeln die Zahlausdrücke für die Seiten dieses Dreyecks sind.

d. U

AUFGABE 19.

F. 109. *Das Verhältniss zweyer grader Linien AB, CD, welche gegeben sind, in Zahlen auszudrücken, oder das Zahlverhältniss dieser Linien zu finden.*

Trage auf die grössere Linie AB, die kleinere CD
*Fo.3.α so oft stetig nebeneinander, als es angeht *, wir wollen setzen zweymal. Wird jene durch diese nicht genau gemessen, so bleibt ein Stück BE, kleiner als CD, übrig.

Trage ferner auf CD diesen Rest BE wieder so oft stetig nebeneinander, als es angeht, in unserm Fall einmal, da denn aufs neue ein Rest DF bleibt, der kleiner als BE ist.

Trage diesen zweyten Rest DF wieder auf den ersten BE so oft es angeht nebeneinander, in unserm Fall einmal, wobey der Rest BG bleibt.

Trage diesen dritten Rest BG wieder auf den zweyten DF so oft es angeht nebeneinander, und so fahre fort.

[Bey diesem Verfahren kömmt man nun entweder zuletzt auf einen Rest, der den vorhergehenden genau *misst*, oder man *erreicht nie einen solchen Rest*, so lange man auch fortfährt, welches letztere, wie wir im folgenden Buche sehn werden, allerdings bey gewissen Linien der Fall ist.

Erster Fall. Kömmt man endlich auf einen Rest der den vorhergehenden genau misst, und folglich in ihm nach irgend einer ganzen Zahl enthalten ist, *so ist dieser letzte Rest das gemeinschaftliche Maass der beyden gegebnen Linien AB, CD.* Sieht man ihn als Einheit an, so lassen sich alle vorhergehenden Reste, mithin AB, CD selbst, in Beziehung auf ihn als *Zahlen* ausdrücken, woraus sich denn das *Zahlverhältniss* der beyden gegebnen Linien AB, CD findet. Und zwar ist dieser letzte Rest *das grösste gemeinschaftliche Maass* der beyden gegebnen Linien, und daher ihr so gefundnes Zahlverhältniss sogleich *in kleinsten Zahlen* (in Primzahlen unter sich) ausgedrückt.]

Denn gesetzt in unserm Beyspiele sey BG jener letzte Rest, welcher den vorhergehenden DF genau misst, und zwar sey BG genau zweymal in FD enthalten, so ist, wenn man BG zur Einheit nimmt, also $BG = 1$ setzt, $FD = 2$; ferner, da FD und BG zusammengenommen gleich EB sind, ist $EB = 1.2 + 1 = 3$; und da wieder EB und FD zusammengenommen gleich CD sind, ist $CD = 1.3 + 2 = 5$, und da endlich zwey CD und BE zusammengenommen gleich AB sind, so ist $AB = 2.5 + 3 = 13$. Folglich lassen sich alsdann die beyden gegebnen Linien AB, CD, in Beziehung auf BG als Einheit, durch die Zahlen 13 und 5 ausdrücken; in beyden ist BG nach ganzen Zahlen enthalten, in AB 13 mal, in CD 5 mal, und dieser letzte Rest ist mithin für beyde gegebne Linien ein gemeinschaftliches Maafs.

Er ist aber auch *ihr gröſstes gemeinschaftliches Maaſs.* Denn wer dieses leugnen wollte, müste behaupten irgend eine grade Linie M > BG könnte ein gemeinschaftliches Maafs der beyden gegebnen Linien AB und CD seyn. Nun aber wird ein Theil der Linie AB, nemlich AE, von CD gemessen (AE = 2 . CD), folglich müste auch der Unterschied von AB und AE, d. h. EB, und da EB = CF ist, auch CF von der Linie M gemessen werden. Wird aber CD und zugleich das Stück derselben CF von M gemessen, so muſs nothwendig auch das zweyte Stück FD = EG von M gemessen werden, und da das wieder eben so bey EB und dem Stück EG der Fall ist, so muſs auch ihr Unterschied GB von M genau gemessen werden folglich M *entweder gleich* oder *kleiner* als BG seyn, welches der Voraussetzung daſs M > BG sey widerspricht. Es ist also kein gröſseres gemeinschaftliches Maaſs beyder Linien AB, CD möglich, als der so gefundene letzte Rest BG, dieser mithin ihr gröſstes gemeinschaftliches Maaſs.

Aus diesem Beweise erhellet zugleich, 1) *daſs jede Linie M, welche zwey gegebne grade Linien AB, CD genau miſst, auch ihr gröſstes gemeinschaftliches Maaſs GB genau messen müſse.* — 2) Daſs *die beyden Zahlausdrücke* der gegebnen Linien AB, CD, welche auf diese Art gefunden werden (13 und 5) keinen gemeinschaftlichen Factor haben können, also *Primzahlen unter sich* *ſind*, und *das Verhältniſs beyder Linien in kleinſten Zahlen* 13 : 5 *ausdrücken.*]

Dieſes Zahlverhältniſs ſagt aus, daſs die beyden Linien grade ſo wie dieſe beyden Zahlen aus einander entſtehn, und daſs folglich, wenn AB in 13 gleiche Theile getheilt wird, 5 ſolcher Theile die Linie CD ausmachen. Nähme man daher nicht BG ſondern AB zur Lineareinheit, ſezte alſo AB = 1, ſo müſte CD durch den Bruch $\frac{5}{13}$ ausgedrückt werden, indem dann CD 5 ſolchen Theilen, wovon in der Lineareinheit 13 gleiche enthalten ſind, gleich ſeyn würde. Und ſezte man umgekehrt CD = 1 ſo wäre AB durch die Zahl $\frac{13}{5}$ auszudrücken.

[Zweyter Fall. *Kömmt man auf keinen Reſt der den nächſt vorhergehenden genau miſst*, man mag das angegebne Verfahren ſo weit fortſetzen als man nur immer will, *ſo giebt es für die beyden gegebnen Linien AB, CD kein gemeinſchaftliches Maaſs*, d. h. keine Linie die ſelbſt, oder deren noch ſo kleine Theile, in beyden Linien zugleich genau enthalten wären, und beyde ſind alſo *incommenſurabel*; wovon wir im folgenden Buche ein Beyſpiel an dem Verhältniſſe zwiſchen der Seite und der Diagonale eines Quadrats werden kennen lernen. Da alsdann beyde Linien ſich nicht auf einerley Einheit beziehn, nicht durch einerley Einheit, oder noch ſo kleine Theile derſelben, ſich ausdrücken laſſen; *ſo giebt es kein Zahlverhältniſs, wodurch ein ſolches incommenſurables Verhältniſs ſich völlig ausdrücken lieſse.* Vernachläſſigt man aber den letzten Reſt und nimmt z. B., wenn BG in dem vorhergehenden Reſt FD zwar nicht genau, aber doch beynahe zweymal enthalten ist, an, es sey genau FD = 2 BG; so findet man ein Zahlverhältniſs, welches von dem incommensurablen nur um wenig abweicht, und das sich demselben um so mehr nähert, je weiter man auf dem angegebnen Wege fortgeschritten ist, und je weiter der vernachlässigte Rest hinaus fällt; so daſs man in diesem Fall wenigstens ein Zahlverhältniſs findet, welches dem Verhältniſs der incommensurablen Linien so nahe kömmt als man nur immer will, und das sich demselben ohne alles Ende nähern läſst, wiewohl es dasselbe nie erreichen, nie völlig erschöpfen kann.]

[Zusatz I. Dieser Satz begründet *die Methoden grade Linien* unmittelbar *zu messen*, und sich *über das Verhältniſs zweyer grader Linien völlig ins Klare zu bringen.* Dieses ist man nur dann, wenn man weiſs, wie oft die eine Linie die andere, oder einen bestimmten Theil derselben, in sich enthält, wenn man also das Zahlverhältniſs beyder kennt, und um dieses zu erforschen muſs man die eine Linie mit der andern, oder mit einem Theil derselben, als Einheit vergleichen; grade darin besteht aber *das Messen.* Dieses kann man *entweder* auf die Art, welche hier gelehrt ist, bewerkstelligen, indem man Rest auf Rest nebeneinander trägt; *oder* man hat einen *Maaſsſtab* d. h. eine grade Linie, welche nach irgend einer Lineareinheit und deren Theilen, so klein als man sie zur jedesmaligen Absicht nöthig hat, eingetheilt ist (z. B. nach Zollen und Decimal- und Centesimaltheilen des Zolls.) Trägt man die gegebne zu meſſende Linie auf den Maaſsſtab auf, ſo ſieht man ſogleich wie viel dieſer Lineareinheiten und deren Theile ſie enthält, z. B. 8, 25, erhält alſo auf dieſe Art mit gröſster Leichtigkeit den *Zahlausdruck* der gegebnen Linie in Beziehung auf die angenommne Lineareinheit des Maaſsſtabs. Verfährt man eben ſo mit der zweyten Linie, ſo findet man auch ihren Zahlausdruck in Beziehung auf dieſelbe Lineareinheit, z. B. 14,75 und dann iſt das *Zalverhältniſs* der beyden gegebnen Linien 8, 25 : 14, 75 oder 33 : 59.]

[Zuſatz II. Geſetzt wir ſehn die gröſsere der beyden gegebnen Linien AB, CD als Lineareinheit an, ſetzen alſo AB = 1, ſo iſt der Zahlausdruck von CD, d. h. $\frac{CD}{AB}$, ein ächter Bruch, der in unſerm Fall, wo AB die Linie CD zweymal und noch das Stück EB in ſich enthält, gleich iſt, $\frac{CD}{2CD+EB} = \frac{1}{2+\frac{EB}{CD}}$, indem der Bruchwerth unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerley Gröſse dividirt werden. Nun aber war CD = EB + FD, EB = FD + GB und FD = 2 GB, alſo iſt $\frac{EB}{CD} = \frac{EB}{EB+FD} = \frac{1}{1+\frac{FD}{EB}}$; $\frac{FD}{EB} = \frac{FD}{FD+GB} = \frac{1}{1+\frac{GB}{FD}}$ und $\frac{GB}{FD} = \frac{1}{2}$. Dieſe Werthe der Folge nach in den erſtern Ausdruck geſetzt, geben

$$CD = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} \cdot AB \text{ (oder } CD = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q}}}} \cdot AB$$

wenn überhaupt $AB = m . CD + EB$, $CD = n . EB + FD$, $EB = p . FD + GB$ und $FD = q . GB$ ist;) so dass also auf diesem Wege die eine Linie in Beziehung auf die andre als Einheit, durch einen *Stuffenbruch* ausgedrückt wird, dessen Werth sich entweder aus der Lehre von der Addition und Division der Brüche in jedem Fall finden, oder durch eine allgemeine algebraische Formel darstellen, und nach ihr berechnen lässt. Und zwar ist diese Formel folgende $CD = \frac{(1+pq).n+q}{(1+pq)(1+mn+mq)}$, wie man leicht findet, wenn man den Werth des Bruchs Stuffenweise vom untersten an, den Regeln der Bruchrechnung gemäss entwickelt,

z. B. $p + \frac{1}{q} = \frac{pq+1}{q}$, $\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q}} = \cfrac{1}{\cfrac{pq+1}{q}} = \frac{q}{pq+1}$

u. s. f. So berechnet ist der Werth unsers Stuffenbruchs, $CD = \frac{5}{13} . AB$, wie oben. Wenn bey zwey Linien sich darthun liesse, dass dieser Stuffenbruch, der die eine in Beziehung auf die andre als Lineareinheit ausdrückt, ins Unendliche fortliefe; so wäre dadurch, dem zweyten Fall gemäss, *die Incommensurabilität der beyden gegebnen Linien* dargethan. Beyspiele davon werden wir im folgenden finden.]

Anmerkung. Schon *Euklid* lehrt durch die Methode des *ersten Falls das gröfste gemeinschaftliche Maafs zweyer grader Linien* oder auch zweyer *Zahlen finden*, ersteres gleich zu Anfang des *zehnten Buchs*, welches von der *Incommensurabilität ausgedehnter Gröfsen handelt*, (Satz 3) letzteres an der Spitze des ersten seiner drey arithmetischen Bücher (Buch VII. Satz 2), wo überhaupt die ersten Sätze, den ersten Sätzen des zehnten Buchs parallel laufen, (und von denen *Clavius* meint, Euklid habe diese Bücher blos zum Behuf des zehnten Buchs seinen Elementen einverleibt.) Ferner zeigt er, dafs um *dreyer Linien* (X. 4.) oder dreyer *Zahlen* (VII. 3.) *gröfstes gemeinschaftliches Maafs zu finden*, man dieses zuerst für zwey derselben, und dann aufs neue für ihr gefundenes Maafs und für die dritte Linie oder Zahl suchen müsse. Endlich beweist er auch, dafs wenn unser *zweyter Fall* eintritt, beyde Linien *incommensurabel* seyn müssen (X. 2), und dafs, wenn man die Methode auf zwey gegebne *Zahlen* überträgt, und man kömmt bey ihnen auf keinen Rest, gröfser als die Einheit, der in dem nächst vorhergehenden Reste genau aufgeht, bey solchen Zahlen etwas Aehnliches statt findet; indem sie dann Primzahlen unter sich sind, und keinen gröfsern gemeinschaftlichen Factor als die Einheit selbst haben (VII. 1.)

Die fernern Sätze Euklids, dafs *commensurable Gröfsen sich wie Zahlen*, *incommensurable* Gröfsen hingegen *nicht wie Zahlen verhalten*, und dafs umgekehrt alle Gröfsen für die sich ein genaues Zahlverhältnifs finden läfst, *incommensurabel* seyn müssen, (X. 5-8. und VII. 4.) sind unmittelbare Folgerungen aus unserm Beweise. Und aus diesen Sätzen fliefst wiederum, das *zwey incommensurable Gröfsen* mit jeder dritten beyde zugleich commensurabel oder incommensurabel sind, und eine mit ihnen commensurable Summe haben, und umgekehrt; dafs hingegen, wenn von *zwey commensurablen Gröfsen* die eine mit einer dritten commensurabel ist, die andre mit ihr incommensurabel seyn mufs, und dafs beyde mit ihrer Summe incommensurabel sind, und umgekehrt (X. 12 - 17)

Diese Sätze dienen *Euklid* jedoch nur zu einer Art von Einleitung in die Materie, welche den eigentlichen Gegenstand des *zehnten Buchs* ausmacht, nemlich in die *Untersuchung über die Abhängigkeit, welche zwischen der Commensurabilität und Incommensurabilität von Rechtecken oder Quadraten und deren Seiten statt findet.* Diese Untersuchung, die Euklid zur Theorie der regulären Körper braucht, stellt er zwar mit grosem Scharfsinn, aber auf einem ganz geometrischen Wege an, auf welchem sie so weitläufig und schwierig wird, dass man dieses Buch mit Recht für das schwerste in den Elementen hält, und dass *Wolf* behauptet „es sey so dunkel, dass ein Anfänger unmöglich das geringste davon verstehn könne". Seitdem man in der neuern Mathematik in den *Wurzelgrösen* ein Mittel gefunden hat, incommensurable Grösen arithmetisch darzustellen, und sie als sogenannte *Irrationalzahlen* mit unter die Zahlbegrifte aufzunehmen, stehn uns weit einfachere und leichtere Methoden zu Geboth, das, was wir von dieser Untersuchung brauchen können, arithmetisch zu entwickeln und zu erörtern, ohne dass wir der grosen Menge von Distinctionen zwischen irrationalen Linien verschiedner Art, des Heers von Kunstwörtern welche diese Materie bey Euklid besonders erschweren, und des zehnten Theils der Sätze die bey Euklid vorkommen, von Nöthen hätten; eine Erleichterung die besonders daher rührt, dass wir, statt Rechtecke und Quadrate aus commensurablen und incommensurablen Linien, die Producte
* III. 4. aus rationalen und irrationalen Zahlen betrachten *.
An. 1.

Euklid lehrt wie man zu jeder gegebnen Linie 13 verschiedne Arten von irrationalen Linien darstellen kann, die er insgesammt genauer untersucht, und mit besondern abschreckenden Kunstwörtern bezeichnet, (z. B. nach Lorenz Uebersetzung: *Mediale*, *Binomiale*, *erste und zweyte Bimediale*, *grösere und kleinere Irrationale*, *Apotome*, *erste und zweyte Medialapotome*, *des Rationalen und Medialen Quadratseite*, *die zwey Mediale Gebende etc.* (X. 112.), und zeigt, wie auser diesen 13, (die sich nach unsrer Art insgesammt aus Rationalzahlen, Quadrat- und Biquadratwurzeln ausdrücken und zusammensetzen lassen) „noch unzählige andre Irrationalle nien entstehn, die mit keiner unter jenen einerley sind" (X. 116.) (die nemlich auf Wurzeln vom 8ten, 16ten und fernern Graden beruhen. Der letzte Satz in diesem Buche thut dies Incommensurabilität zwischen der Seite und dem Durchmesser eines Quadrats dar. Irrationallinien (ein Ausdruck, den schon Euklid hat) welche sich auf Wurzeln von andern Graden als dem 2ten, 4ten, 8ten u. s. f. beziehn, (die man also weder durch einmaliger noch durch wiederholter Darstellung einer mittleren Proportionallinie, sondern nur durch Auffindung zweyer mittlerer Proportionallinien, u. s. f., also nur auf Wegen, welche der Elementargeometrie unzugänglich sind *, findet,) erwähnt Euklid mit keinem Wort. *III24Z Seine Untersuchung ist also sehr eingeschränkt, statt dass wir durch die arithmetischen Begriffe sie sogleich ganz allgemein führen können. Ueberdem hat Euklids Vortrag noch das Unangenehme, dass er, wie überhaupt die Alten, *nur ganze Zahlen kennt*, und unter seinen Zahlbegriffen keinen für Brüche aufnimmt, so dass wir seine Worte nicht in den uns geläufigern Sinn nehmen dürfen (denn nach diesem sagten manche Sätze offenbare Falschheiten aus), sondern erst in *seine* Begriffe von Zahlen übersetzen müssen. Alles das trägt dazu bey, dieses Buch für uns überflüssig und ungeniessbar zu machen. Ueberhaupt ist die Materie in der Geometrie nur für die Art, wie Euklid die Theorie der regelmässigen Körper behandelt, von Wichtigkeit; was uns davon unentbehrlich ist, findet man theils hier, theils in der Folge dieses Werks. Dem allen ungeachtet, ist folgendes Urtheil sehr ungerecht, welches der bekannte *Peter Ramus* in seinen Scholiis Mathematicis (lib. 21. p. 252.) über diese Arbeit Euklids fällt: „*Materies decimo libro proposita, eo modo est tradita, ut in humanis literis atque artibus similem obscuritatem nusquam deprehenderim, obscuritatem dico, non ad intelligendum, quid praecipiat Euklides, — — sed ad perspiciendum penitus et explorandum, quis finis et usus sit operi propositus*, (die Theorie der regulären Körper,) *quae genera, species, differentiae sint rerum subjectarum*, (Euklid verweilt sich umständlich dabey die Verschiedenheit aller jener Irrationallinien ins

Klare zu setzen) *nihil enim unquam tam confusum vel involutum legi vel audivi.* Andere preisen es dagegen als ein Meisterstück beharrlichen Tiefsinns, und das mit Recht, gehört es auch für uns nur zu den blossen Schaustücken, und zu den veralteten Rüstzeugen im Zeughause der Wissenschaft. d. U.]

AUFGABE 20.

F. 110. *Wenn zwey Winkel A, B gegeben sind, ihr gemeinschaftliches Maass, und daraus ihr Zahlverhältniss zu finden.*

Man beschreibe mit gleichem Halbmesser um die Scheitelpunkte beyder Winkel Kreisbogen CD, EF, so
* 22. Z. sind diese das Maass beyder Winkel *. Mit diesen beyden Kreisbogen verfahre man so, wie in der vorigen Aufgabe mit den beyden graden Linien; und das ist immer möglich, da Kreisbogen, die mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, gehörig gelegt sich de-
* 1. cken, also ineinander fallen *, und sich mittelst ihrer Sehnen einer auf dem andern stetig nebeneinander legen
* 7. lassen *. Auf diese Art findet man sogleich das *grösste gemeinschaftliche Maass* OD beyder Bogen, *wenn es eins giebt*, und ihr Verhältniss in den kleinsten Zahlen
* A. 14. Fall 1. ausgedrückt *. Dieses ist zugleich das Verhältniss der beyden gegebenen Winkel A, B, die sich stets wie
* 22. jene Bogen verhalten *. Der Winkel OAD, dessen Schenkel das gemeinschaftliche Maass beyder Bogen umspannen, ist zugleich das grösste gemeinschaftliche Maass dieser beyden Winkel.

Haben die beyden Bogen CD, EF, die man auf diese Art mit einander vergleicht, *kein* gemeinschaftliches

ches Maaſs *, ſo ſind ſie, und die Winkel A, B deren Schenkel dieſe Bogen umſpannen, incommenſurabel, und dann giebt es *kein Zahlverhältniſs*, welches dem Verhältniſs dieſer Bogen, und dieſer Winkel völlig entſpräche. Allein man findet dann, wie in der vorigen Aufgabe, Zahlverhältniſſe, die ſich ihrem wahren (irrationalen) Verhältniſſe immer mehr und ohne Gränze nähern, je weiter man das angegebene Verfahren fortgeſetzt hat; folglich Zahlverhältniſſe, die man zum Gebrauch ſtatt des irrationalen Verhältniſſes ſetzen kann.

* A. 19. Fall 2.

[Zuſatz. *Um den unmittelbaren Zahlausdruck eines gegebenen Winkels in Theilen des rechten Winkels*, als dem feſtgeſetzten Maaſse alle Winkel *zu finden*, braucht man nur auf diese Art das gemeinſamme Maaſs und das Zahlverhältniſs zwiſchen dem Bogen, der den gegebenen Winkel miſst, und der Kreislinie, oder dem Quadranten, aufzuſuchen. Geſetzt man findet ſo das Zahlverhältniſs des Bogens und der Kreislinie $3:25$, alſo des Bogens und des Quadranten $3:\frac{25}{4}$, ſo iſt der Winkel $\frac{25}{3}$ von vier rechten, oder $\frac{25}{12}$ eines rechten Winkels, läſst ſich alſo durch den Bruch $\frac{25}{12}$ ausdrücken, in ſo fern wir den rechten Winkel zum allgemeinen Maaſs, zur Einheit der Winkelgröſsen, machen. Oder nimmt man den neunzigſten Theil des rechten Winkels, d. h. einen *Grad*, und deſſen Sexageſimaltheile zum allgemeinen Maaſs, oder zur Einheit der Winkel *, ſo läſst ſich jener Bogen durch die Zahl $\frac{25}{12} \cdot 90$ Grade $= 187 + \frac{1}{2}$ Grad $= 187^{\circ}\ 30'$ ausdrü-

* 22. Z. 3.

cken. Eben so der Bogen den er umspannt in Bogengraden. Dabey muss man sich denken, der *Winkel* enthält 187 Winkeleinheiten und 30 Sechzigtheile derselben, der Bogen 187 Bogeneinheiten und 30 Sechzigtheile derselben; ein Ausdruck welchem also immer das Zahlverhältniss des Winkels zum rechten, und des Bogens zu Kreislinie, zum Grunde liegt, wie wir das
*28.Z.3. umständlich erläutert haben *.

Gesetzt der gegebene Bogen B sey in dem *Halbkreise m* (4) mal enthalten, messe ihn aber nicht genau, sondern es bleibe ein Stück übrig, welches in dem Bogen B selbst *n* (2) mal enthalten sey, und einen Rest lasse, der in dem vorigen Reste, *p* (3) mal enthalten sey, sammt einem Bogenstück, welches wiederum von diesem Reste der *qte* (3te) Theil sey; so ist nach dem Zusatz der vorigen Aufgabe, B =

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q}}}}\ .\ \text{Halbkr.} = \frac{(1+pq).n+q}{(1+pq)(1+mn+mq)}\ .\ 180^0$$

$$= \frac{10 \cdot 2 + 3}{10 \cdot 25}\ .\ 180^0 = \frac{23 \cdot 180^0}{250} = \frac{414^0}{25} = 16^0\ 31'36''.$$

Dieses artige *Verfahren, Winkel lediglich mit Hülfe des Zirkels zu messen*, trägt schon *Lagny* in den *Memoires de l' Acad. des Sc. de Paris A*. 1724. *p*. 250 vor.