Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Erklärungen.

ZWEYTES BUCH.

DER KREIS.

Erklärungen.

[Die Vorstellung und die Beschreibung des Kreises gehört zu dem, was der Geometer bey jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, voraussetzt. Sie ist eine eigenthümliche, nicht von andern abgeleitete, und also ursprüngliche Art von Raumbeschreibung, die, sammt den Vorstellungsarten und Begriffen, welche unmittelbar darin liegen, zu den wahren Principien der Geometrie gehört, und schon von Euklid unter den Forderungen der Geometrie an der Spitze des Systems aufgeführt wird. Jeder, wer Geometrie treiben will, muss sich einen Kreis vorstellen, um einen gegebnen Mittelpunkt, mit gegebnem Halbmesser, einen Kreis erzeugen oder beschreiben können; das war unsre dritte Forderung unter den Principien. Die folgenden Erklärungen dienen gröſstentheils nur das zu verdeutlichen, was in dieser geforderten Vorstellungsart liegt, und einiges, was unmittelbar daraus flieſst, herauszuheben. d. U.]

1.

Fig. 45. Der *Umfang des Kreises* oder die *Kreislinie* ist eine krumme Linie [welche ganz in einer Ebne liegt] und deren Punkte von einem einzigen Punkte, dem *Mittelpunkte* (*centrum*), insgesammt gleich weit entfernt sind.

Diese

Diese krumme Linie läuft in sich selbst zurück, und schliest einen Theil der Ebne, in welchem der Mittelpunkt liegt, völlig und nach allen Seiten zu ein. Die *Kreisscheibe* ist der von der Kreislinie ringsum begränzte ebne Flächenraum, folglich eine krummlinige ebne Figur *. [Unter *Kreis* pflegt man Kreislinie und *I.E. 16, Kreisscheibe beyde zusammengenommen zu verstehn. Auch deutet man gewöhnlich den Mittelpunkt des Kreises dadurch an, dass man sagt, der Kreis sey *um ihn* beschrieben.]

[Alle Theile der Kreisscheibe, und mithin alle Punkte und alle Linien in ihr, liegen *innerhalb* der Kreislinie, oder *im Kreise*, alle übrigen Theile der Ebene und alle Linien und Punkte in ihnen, *ausserhalb* der Kreislinie. Iene und diese liegen also auf *entgegengesetzten Seiten der Kreislinie* *, und haben in Rück- *I.E.10. sicht der Kreislinie eine entgegengesetzte Lage.]

2.

Jede grade Linie zwischen dem Mittelpunkte C und einem Punkt im Umfange, wird ein *Radius* oder ein *Halbmesser des Kreises* genannt; so CA, CE, CD, CB. — Jede grade Linie, welche wie AB durch den Mittelpunkt geht, und von zwey Punkten im Umfange begränzt wird, ist ein *Durchmesser des Kreises.* Daraus folgt:

α) Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich *. So auch alle Durchmesser, deren jeder zwey * E. 1. Halbmessern gleich ist.

[β) Jeder Durchmesser wird vom Mittelpunkte in zwey gleiche entgegengesetzt liegende Theile ge-
*I. E. 10. theilt *.

γ) Jeder Punkt in der Ebne des Kreises steht vom Mittelpunkt um eine grade Linie ab, welche entweder dem Halbmesser *gleich*, oder *kleiner*, oder *grösser* als der Halbmesser ist. Im ersten Fall liegt der Punkt in der Kreislinie selbst, im zweyten *innerhalb*, im dritten *ausserhalb* der Kreislinie und des Kreises.

Folglich liegt jeder Halbmesser und jeder Durchmesser ganz innerhalb, jede Verlängerung eines Durchmessers ausserhalb, und nur die beyden Endpunkte derselben auf der Kreislinie, und diese Linie ist der *geometrische Ort* eines Punktes, welcher von einem gegeb-
*I. E. 21. nen Punkte um eine gegebne Linie absteht *. (Apollonius I. 1.)]

3.

Jeder Theil der Kreislinie z. B. FHG ist ein *Kreisbogen*; [die Hälfte der Kreislinie insbesondere ein *Halbkreis*, und der vierte Theil der Kreislinie ein *Quadrant*. Manchmal versteht man unter diesen Benennungen auch die Hälfte oder den vierten Theil der Kreis-
*2 f; 7. Z scheibe. *

Alle Halbkreise, so auch alle Quadranten eines Kreises sind gleich.

4.

Jede grade Linie, welche von zwey Punkten in der Kreislinie begränzt wird, nennt man überhaupt eine *Sehne* oder *Chorde des Kreises*, und ins besondere eine *Sehne des Bogens*, der sich in den beyden Gränzpunkten der Sehne endigt. So ist FG die Sehne des Bogens FHG.

[Folglich ist jeder Durchmesser eine Sehne, und zwar eine Sehne die durch den Mittelpunkt geht *. * E. 2]

5.

Ein *Kreis - Abschnitt* (*Segment*) ist der Theil der Kreisscheibe, der zwischen einem Bogen und dessen Sehne liegt.

Zu jeder Sehne FG gehören zwey verschiedene Kreisbogen FHG, FEG, welche einander zur ganzen Kreislinie ergänzen, mithin auch zwey verschiedne Kreisabschnitte, welche zusammen die Kreisscheibe ausmachen. Häufig spricht man indess nur von *einem* Bogen oder Kreisabschnitt der zu einer Sehne gehört; und dann versteht man darunter den *kleinern* der beyden Bogen oder Abschnitte, es sey denn, dass ausdrücklich das Gegentheil erinnert werde.

Was man unter *ähnlichen Bogen* und unter *ähnlichen Kreisabschnitten* versteht, findet man Lehrsatz 29, Zusatz 3, und im vierten Buche erklärt.

6.

Ein *Kreis - Ausschnitt* (Sector) ist der Theil der Kreisscheibe, der zwischen einem Bogen DE und den beyden Halbmessern CD, CE, welche nach den Endpunkten des Bogens gezogen werden, liegt.

7.

Fig. 46. [*Einen Winkel in einem Kreis - Abschnitt* BMN] nennt man jeden Winkel wie A, dessen Scheitel i[m] Bogen dieses Abschnitts liegt, und dessen Schenk[el] durch die Endpunkte B, D des Bogens und der Seh[ne] gehn. Der Kreisabschnitt BMND *fasst den Winkel* [A] und der Winkel *ist in diesem Kreis - Abschnitt einge*[-] *schrieben.*

Hieraus erhellt, was ein *Winkel im Halbkreise* od[er] ein Winkel der im Halbkreise eingeschrieben ist, [sa]gen will.]

8.

[Von einem *Winkel* dessen Schenkel eine Kreisl[i]nie schneiden, sagt man er *stehe auf dem Bogen*, de[n] seine Schenkel umfassen oder einschliessen, so z. [B.] der Winkel A auf dem Bogen BED.

Liegt der Scheitelpunkt eines solchen Winkels i[n] der Kreislinie, so wird er ein *Winkel am Umfange* ge[-] nannt, wie z. B. BAD. Liegt der Scheitelpunkt i[m] Mittelpunkte des Kreises, so ist es ein *Winkel am Mittel*[-]

Fig. 45. *punkte*, wie z. B. der Winkel ECD.]

9.

Man sagt *eine grade Linie ist in einem Kreise einge*[-] *schrieben*, wenn sie sich in zwey Punkte des Umfang[s] endigt, (folglich eine Sehne des Kreises ist) wie z. [B.] FG.

Ein Winkel ist im Kreise eingeschrieben, wenn dess[en]

Fig. 46. Scheitelpunkt im Umfange liegt wie z. B. ∠ BAD.

Ein Dreyeck ist im Kreise eingeschrieben, wenn die drey Winkelpunkte insgesammt im Umfange liegen, wie z. B. BAD, da denn die Seiten des Dreyecks insgesammt Sehnen des Kreises sind;

und überhaupt nennt man *eine Figur im Kreise eingeschrieben*, (*oder dem Kreise eingeschrieben*,) wenn alle Winkelpunkte der Figur in der Kreislinie liegen, (folglich ihre Seiten insgesammt Sehnen des Kreises sind.) Vom Kreise sagt man dagegen er sey *um diese Figur beschrieben* (*oder der Figur umschrieben.*)

Diese Benennungen behalten dieselbe Bedeutung, wenn man von Linien, Winkeln oder Figuren spricht, die *in Vielecken eingeschrieben* sind, oder von einem *Vieleck, das um ein anderes beschrieben ist.*

10.

Ein Vieleck ist um einen Kreis beschrieben, (oder dem Kreise *umschrieben*,) wenn alle Seiten des Vielecks die Kreislinie *berühren* *. Der Kreis ist dann *in das Vieleck eingeschrieben*, (*oder dem Vieleck eingeschrieben.*) * E. 11.

[Anmerkung. Noch vor dieser letzten Erklärung stellt Le Gendre folgende auf: „*Eine den Kreis schneidende Linie* ist die, welche die Kreislinie in zwey Punkten trifft; eine *berührende*, die mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat. Eben so haben *Kreislinien die sich berühren* nur einen einzigen Punkt gemein." Allein dieses sind offenbar abgeleitete Sätze, für die man einen Beweis erwartet, und die deshalb keineswegs zu Erklärungen taugen. Statt ihrer schiebe ich die folgenden beyden Erklärungen ein, welche die Fundamentalbegriffe über das Schneiden und Berühren der Kreislinien aussagen, die von Le Gendre angegebenen Merkmale begründen, und eine beträchtliche Lücke in dem System unsers Verfassers ausfüllen. d. U.

II.

[Weil die Theile der Kreisſcheibe und die übrigen Theile der Ebne auf entgegengeſetzten Seiten der Kreislinie liegen, und die Kreisſcheibe ringsum nach
* E. 1. allen Seiten zu von der Kreislinie begränzt wird *; ſo muſs jede ſtetig zuſammenhängende Linie, welche durch einen Punkt *im* Kreiſe und zugleich durch einen Punkt *auſser* dem Kreiſe geht, *ſich mit der Kreislinie in*
* Gr. 8. *irgend einem Punkte durchſchneiden* *. Denn wäre das nicht der Fall, ſo würde der Kreis nach irgend einer Seite zu nicht völlig begränzt ſeyn.

Fig. 47. α) *Alſo müſſen ſich ins beſondere ein Kreis EFD und eine grade Linie AB in irgend einem Punkte E durchſchneiden*, wenn die grade Linie durch einen Punkt innerhalb und einen Punkt auſserhalb der Kreislinie geht. — Grade Linien laſſen ſich aber zu den beyden entgegengeſetzten Seiten jedes Punktes in ihnen ſo weit verlängern, daſs ſie gröſser als jede
* Fo. 2. gegebne Linie werden *; folglich müſſen *alle graden Linien*, *welche* in der Ebne des Kreiſes *durch einen Punkt im Kreiſe gehn*, *gehörig verlängert*, *auch auf bey-*
* E. 2 γ. *den Seiten dieſes Punkts* durch Punkte auſserhalb * der Kreislinie gehn, alſo *die Kreislinie durchſchneiden*. Das geſchieht alſo in *zwey* Punkten, welche in der graden Linie zu entgegengeſetzten Seiten des Punkts im Kreiſe liegen.

Fig. 48. β) Eben ſo *durchſchneiden ſich zwey Kreiſe* wenn der eine HEG durch einen Punkt *im* andern Kreiſe und zugleich durch einen Punkt *auſserhalb* deſſelben, z. B. durch I und H geht. — Das iſt aber allemal der Fall,

wenn die *Summe* ihrer Halbmeſſer AF, BI gröſser und zugleich der *Unterſchied* derſelben kleiner als die grade Linie zwiſchen ihren Mittelpunkten AB iſt. Denn wenn $AF + BI > AB$ und $AF - BI$ oder was auf eins *E. 2. α.
herauskömmt * $AF - BH < AB$ iſt, ſo muſs er- *Gr. 2.
ſtens $AF > AB - BI$ d. h. $> AI$, zweytens $AF <$
$AB + BH$ *, d. h. $< AH$ ſeyn. Folglich iſt I ein *E. 2. γ.
Punkt innerhalb und H ein Punkt auſserhalb der Kreislinie DEF, die mit dem Halbmeſſer AF um A beſchrieben iſt *, daher der Kreis HEIG die Kreislinie DEFG durchſchneiden muſs. Und zwar in einem Punkte E, der auſserhalb der graden Linie AB und ihrer Verlängerung liegt, weil ſonſt die Halbmeſſer BE, BI, BH nicht gleich ſeyn könnten *. *I. 16. f. 2.

Sind beyde Kreiſe mit *gleichem* Halbmeſſer beſchrieben, ſo werden ſie ſich folglich allemal ſchneiden, wenn ihr Halbmeſſer gröſser als die Hälfte von AB iſt.

Auch muſs jeder Kreis deſſen Mittelpunkt auf einer andern Kreislinie liegt, dieſe durchſchneiden.

Zuſatz. So oft zwey Kreiſe ſich in einem Punkte wie E durchſchneiden, entſteht, wenn man die Halbmeſſer AE, BE zieht, zwiſchen den beyden Mittelpunkten A, B und dem Durchſchnittspunkte E ein *Dreyeck* ABE, welches *gleichſeitig* iſt *, wenn man bey- *I. E. 18.
de Kreiſe mit AB als Halbmeſſer beſchrieben hat; blos *gleichſchenklig*, wenn die Länge der Halbmeſſer zwar gleich, aber von AB verſchieden iſt; *ungleichſeitig*, wenn die Halbmeſſer weder untereinander noch mit AB gleich lang ſind. Zwey Kreiſe durchſchneiden ſich aber gewiſs in einem Punkte der auſserhalb der graden

Linie zwiſchen ihren Mittelpunkten liegt, wenn die Gröſse ihrer Halbmeſſer und die Entfernung ihrer Mittelpunkte den beyden unter β) aufgeſtellten Bedingungen entſprechen.

So iſt alſo die *Möglichkeit* dieſer drey verſchiednen Arten von Dreyecken, unabhängig von allen Lehrſätzen des erſten Buchs dargethan, und zugleich *die Conſtruction des Dreyecks aus drey gegebnen Linien A, B, C* feſtgeſtellt, als unmittelbare Folge der Kreisbeſchreibung, durch die ſie unter den angeführten Bedingungen, vor allen Lehrſätzen und Aufgaben dieſes Syſtems, begründet wird. Man beſchreibe um die Endpunkte der einen dieſer Linien A, mit den beyden andern, als
* Fo. 3 Halbmeſſern, Kreiſe *. Wenn die gegebnen Linien den Bedingungen unter β) entſprechen, (d. h. wenn A < B + C und > B − C iſt) ſo durchſchneiden ſich dieſe Kreiſe in irgend einem Punkte auſserhalb der Linie
* Fo. 1. A, und die Halbmeſſer nach dieſem Punkte gezogen * bilden ein Dreyeck, welches, da alle Halbmeſſer ein-
* E. 2.α. ander gleich ſind *, aus den drey gegebnen Linien beſteht. Daſs dieſe Conſtruction unmöglich wird, ſo oft auch nur einer der beyden erwähnten Bedingungen nicht genüge geſchieht, wird in Lehrſatz 17 bewieſen werden.

Anmerkung. So wie die Conſtruction des Dreyecks von den Sätzen über das Schneiden zweyer Kreiſe abhängt, ſo flieſsen umgekehrt dieſe Sätze aus jener Conſtruction, und in dieſer Abhängigkeit trägt ſie unſer Verfaſſer im zwölften Lehrſatz dieſes Buches vor. Allein mir ſcheint es nothwendig zu ſeyn, daſs man ſie, ſo weit es hier geſchehn iſt, im Syſtem vor der Conſtruction der Dreyecke aufſtelle, da ſie dieſe Conſtruction erſt begründen, und ich glaube hierin zum Vortheil des Systems von unserm Verfasser abgewichen zu seyn. Schon *van Swinden* fand sich bewogen die angeführten Bedingungen, unter welche zwey Kreise sich schneiden, unter den *Grundsätzen* der Geometrie aufzustellen (wiewohl die Aussage seines sechsten Grundsatzes mangelhaft ist) und er bemerkt dabey, dass wenn gleich *Euklid* diesen Satz nicht ausdrücklich als *Axiom* aufführt, er sich dessen doch bey seinen drey ersten Sätzen stillschweigend bedient. *Wolf*, sagt er, habe ihn bewiesen, allein der Satz sey Sonnenklar und deshalb ein Axiom. Allein Sonnenklar ist er doch wahrlich nicht, und wird es höchstens erst dann, wenn man ihn, wie ich es hier versucht habe, aus dem Merkmale des Schneidens der Linien ableitet, die man bisher mit Unrecht ausser Augen gelassen hat.

Le Gendre übergeht den Beweis der Möglichkeit der Dreyecke ganz und gar, und lehrt die Construction derselben aus drey gegebnen Linien erst in der 8ten Aufgabe, nachdem er schon viele Eigenschaften des Dreyecks dargethan hat. Ueberdem gründen sich seine Beweise der ersten Aufgaben allesammt darauf, dass zwey Kreise unter den angeführten Bedingungen einander schneiden. Diese Behauptung sagt er aber nirgends ausdrücklich aus, weder als Grundsatz noch als Lehrsatz, sondern nimmt sie immer nur stillschweigend an. Sein System ist folglich in diesen beyden Rücksichten mangelhaft. Doch glaube ich durch die Einschaltung dieser eilften Erklärung und der Sätze über das Schneiden, von welchen sie abhängt, und die sie begründet, in die Prinzipien der Geometrie, diese Lücke ausgefüllt zu haben.

d. U.]

12.

[*Zwey Kreislinien berühren einander*, wenn sie einen Punkt I so miteinander gemein haben, dass die Theile, welche in der einen Kreislinie durch diesen Punkt abgeschnitten werden, beyde auf einerley Seite der andern Kreislinie liegen *; wenn mithin der eine Fig. 49.

*I.E. 11.

Kreis sich entweder ganz innerhalb, oder ganz außerhalb des andern befindet *. Im ersten Fall sagt man daß sie sich *innerlich*, im zweyten daß sie sich *äußerlich berühren*.
*E. 1.

Eben so *berühren sich eine grade Linie und ein Kreis*, wenn sie einen Punkt so miteinander gemein haben, daß die beyden durch diesen Punkt abgeschnittnen Stücke der graden Linie, zu einerley Seite der Kreislinie, und zwar beyde *außerhalb* derselben liegen. Denn Linien innerhalb des Kreises durchschneiden die Kreislinie *, können sie also nicht berühren. — Eine grade den Kreis im Punkte F berührende Linie, z. B. LM, nennt man auch eine *Tangente des Kreises* im Punkte F.]
*E. 11. α
Fig. 47.

[LEHRSATZ I.]

1) *Zwey Kreislinien, welche mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, decken sich, und schließen Kreisscheiben von gleicher Größe ein.*

2) *Sind umgekehrt zwey Kreisscheiben gleich, so decken sie sich, und haben gleiche Kreislinien und gleiche Halbmesser.*

Fig. 51.
1. Sind die beyden Kreise ADBK und EGFL mit gleichen Halbmessern beschrieben, und man legt den Mittelpunkt des einen auf den Mittelpunkt des andern, so daß die Kreise in einer Ebne bleiben, so sind alle Punkte in beyden Kreislinien gleich weit von den zusammenfallenden Mittelpunkten entfernt. Also ist dann