Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 12. Jede grade Linie welche auf einem Halbmesser in dessen Endpunkte senkrecht steht, berührt den Kreis, und durch jeden Punkt der Kreislinie ist nur eine einzige Tangente möglich.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

vom Mittelpunkte ab, ſo daſs CF = CG iſt. Folglich muſs auch CG > CI ſeyn, alſo die kleinere Sehne DE weiter als die gröſsere AH vom Mittelpunkte abſtehn.

Zuſatz. Alſo muſs auch von zwey Sehnen, welche ungleich weit vom Mittelpunkte entfernt ſind, diejenige die kleinere ſeyn, welche weiter vom Mittelpunkte abſteht.

LEHRSATZ 12.

Jede grade Linie welche auf einem Halbmeſſer in deſſen Endpunkte ſenkrecht ſteht, berührt den Kreis; Fig. 56

und durch jeden Punkt der Kreislinie iſt nur eine einzige Tangente möglich.

1. Iſt die grade Linie BD auf den Halbmeſſer CA in deſſen Endpunkte A ſenkrecht, ſo ſteht jede andre grade Linie z. B. CK die durch den Mittelpunkt geht, auf BD ſchief auf *, muſs alſo gröſser als das Perpendikel CA ſeyn *. Folglich liegt der Durchſchnittspunkt derſelben mit BD weiter als um den Halbmeſſer vom Mittelpunkte ab, d. h. auſserhalb des Kreiſes *. Und alſo liegt auch die ganze Linie BD auſserhalb des Kreiſes. Sie berührt mithin die Kreislinie im Punkte A, welchen ſie mit ihr gemein hat *, und iſt eine *Tangente des Kreiſes* im Punkte A.

* I. 15.
* I. 16. 3.
* E. 2.
* E. 12. α.

2. Geſetzt nun es gäbe auſser dieſer Tangente BD noch eine zweyte grade Linie, EF, welche die Kreislinie im Punkte A berührte, ſo könnte dieſe nicht ſenkrecht auf dem Halbmeſſer CA ſeyn *. Der Halb-

* I. 15.

messer BA würde also auf ihr schief aufstehn, und folglich müste das Perpendikel aus dem Mittelpunkte
*I.16.1. auf diese Linie, kleiner als CA seyn *. Diese zweyte
* E. 2. Linie EF gienge also durch einen Punkt *im* Kreise *,
*.E. 11. muss also nothwendig den Kreis durchschneiden *, und kann ihn nicht berühren. Daher ist ausser der Linie BD, welche senkrecht auf dem Halbmesser in seinem Endpunkte aufsteht, keine andre grade den Kreis berührende Linie durch den Punkt A möglich.

[*Folgerung* .1 *Folglich muss* 1) *eine grade Linie* **CA**, *welche durch den Mittelpunkt des Kreises nach dem Berührungspunkte A gezogen wird, stets senkrecht auf die Tangente stehn;* und 2) *eine grade Linie welche senkrecht auf die Tangente im Berührungspunkte errichtet wird, stets durch den Mittelpunk des Kreises gehn.* Denn keine andre grade Linie berüht den Kreis, als die, welche auf dem Radius in dessen Endpunkte senkrecht steht; und durch einen Punkt einer graden Linie ist nur ein einziges Perpendikel möglich.]

[*Folgerung* 2. *Zwey Tangenten, welche durch die Endpunkte eines Durchmessers gezogen werden, laufen parallel*; denn sie stehn beyde auf dem Durchmesser senk-
* I 21. recht *.

Sind umgekehrt zwey Tangenten eines Kreises parallel, so ist die grade Linie durch die Berührungspunkte stets ein Durchmesser. Denn ein Durchmesser nach dem einen Berührungspunkte gezogen, steht auf der einen Tangente, folglich auch auf der mit ihr parallelen Tan-
*I.25.f.1 gente senkrecht *, muss also auch durch den zweyten Berührungspunkt gehn.

Mit einer Sehne, welche kein Durchmesser ist, machen die Tangenten durch ihre Endpunkte spitze obschon gleiche Winkel, und zwar mit den kleinern Sehnen spitzere Winkel. Denn die Halbmesser durch ihre Endpunkte stehn unter gleichen, und zwar auf den kleineren Sehnen unter gröſseren Winkeln auf.

Durchschneiden sich umgekehrt zwey Tangenten, so ist die grade Linie durch ihre Berührungspunkte eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist.]

[*Folgerung* 3. Eine grade Linie IK, welche den Innern zweyer *concentrischen Kreise* berührt, wird durch den Berührungspunkt H halbirt. Denn sie ist Sehne des gröſsern Kreises und CH steht auf ihr als einer Tangente am kleinern senkrecht *.] T. III. Fig. 4.

* 9.

[*Folgerung*. 4. *Jede grade Linie welche einen Kreis durchschneidet, muſs ihn in zwey Punkten durchschneiden*. Denn durchschneidet EF den Kreis im Punkte A, und man zieht den Halbmesser CA, so steht dieser auf sie schief auf, nicht senkrecht, (denn sonst würde EF die Kreislinie nach dem eben geführten Beweise nicht durchschneiden). Folglich giebt es eine zweyte auf EF schiefaufstehende Linie CG welche der CA, das ist dem Halbmesser, gleich ist, also einen zweyten Punkt G, welcher der graden Linie EF und der Kreislinie gemein ist, das heiſst, einen zweyten Durchschnittspunkt. Daſs es keinen dritten geben könne sagt Lehrsatz 6.] Fig. 56.

[Zusatz. So oft also eine grade Linie EF einen Kreis durchschneidet, wird ein Stück von ihr AG ei- Fig. 58.

ne Sehne des Kreiſes, und dieſes liegt ganz innerhalb
* 4. der Kreislinie *. Dagegen liegt die Tangente AD
ganz auſserhalb der Kreislinie. Folglich muſs ſtets
zwiſchen beyden ein Bogen AHG liegen, ſo daſs er von
AD und AG eingeſchloſſen wird. Geſetzt alſo man
wollte ſich nach Analogie gradeliniger Winkel hier ei-
nen *krummlinigen Winkel* GHAD vorſtellen, ſo würde
dieſer ſtets von dem gradelinigen GAD eingeſchloſſen,
*I.E. 12. müſte alſo *kleiner* als dieſer ſeyn *. Nun aber kann der
gradelinige GAD kleiner gedacht werden, als jeder an-
gebliche Winkel; und ſo klein er auch gedacht wird,
ſo durchſchneidet AF, weil es nur *eine* Tangente (AD)
giebt, allemal den Kreis, wäre alſo immer der krumm-
linige noch kleinere Winkel GHAD vorhanden.
Folglich müſte dieſer Winkel kleiner als jeder angeb-
liche ſeyn, könnte alſo gar keine Gröſse haben, müſte
alſo gleich o ſeyn.

*Folglich machen im Berührungspunkte der Kreis und
die Tangente gar keinen Winkel,* beyde fallen zuſammen,
und will man hier doch von einem ſogenannten *Berüh-
rungswinkel GHAD* ſprechen, ſo iſt dieſer gleich o,
d. h. er hat gar keine Gröſse, iſt gar nicht vorhanden.

Fig. 57. Hierauf beruht die Vorſtellung *krummliniger Win-
kel.* Denn da im Berührungspunkte Tangente und
Kreis zuſammenfallen, keinen Winkel mit einander
machen, ſo muſs auch ein Kreisbogen AH mit irgend
einer graden Linie AB denſelben Winkel als ſeine Tan-
gente IAK machen, und eben ſo zwey Kreisbogen AH
AL mit einander denſelben Winkel als ihre Tangen-

ten im Punkte A, AI, AB. Und diese Begriffe lassen sich in der höhern Geometrie auch auf alle andere krumme Linien übertragen.

Mithin *steht* insbesondere *jeder Halbmesser auf der Kreislinie senkrecht*; denn er macht mit der Tangente im Berührungspunkte rechte Winkel. — Jede Sehne, welche kein Durchmesser ist, macht dagegen in ihrem Endpunkte mit der Kreislinie ungleiche Winkel. — Endlich *stehn zwey concentrische Kreise überall gleich weit von einander ab*. Denn da die Halbmesser auf beyden senkrecht stehn, so geben die abgeschnittnen Stücke der Halbmesser den Abstand beyder von einander an *, *I.16.f 2
und diese Stücke sind überall gleich *] *1. f. 2.

[Anmerkung 1. Ein Winkel ist die Lage zweyer *grader* Linien gegen einander*. Krummlinige Winkel denken zu *I·E. 12.
wollen, wäre also ungereimt, wenn nicht im Berührungspunkte die Tangente und die krumme Linie zusammenfielen, also krummlinige Winkel sich durch den Winkel der Tangenten im Berührungspunkte denken liessen. So muss man daher diesen Begriff erklären.

Nur eine grade Linie hat in allen ihren Theilen gegen eine Fig. 58.
andre einerley Lage, und also läst sich nur bey ihr aus der Lage eines Stücks GF auf die Lage der Linie bey A schliessen. Eine krumme Linie hat in allen noch so kleinen Theilen eine verschiedene Lage gegen eine grade Linie AB. Man kann also aus der Lage der Theile H, I nicht wie bey graden Linien auf die Lage der Theile im Punkte A schliessen. Man sieht daher auf welchen Missverstand folgende Einwendung gegen das hier Vorgetragne beruht. „Gesetzt HA, IA wären zwey Bogen die beyde die grade Linie AD im Punkte A berührten *, so müsten die Winkel * E. 12.
HAD, IAD beyde 0, also beyde gleich seyn. Nun aber schliest der Winkel IAD den Winkel HAD ein; also muss er grösser

als HAD seyn, welches dem vorigen widerspricht. Also kann der Berührungswinkel nicht gleich null seyn." Aber die Schlussfolge, *also muss er grösser als HAD seyn*, ist falsch. Sie gilt dem angeführten nach nur für gradelinige Winkel, keineswegs für die Lage krummer Linien, auf deren Lage im Punkte A wir aus der Lage in H und I nicht so unmittelbar schliessen können. Daraus dass der Bogen AI den Bogen AH einschliest lässt sich einzig und allein das folgern, dass der einschliessende Bogen *schneller* von der Tangente, als der eingeschlossne abweicht, dass er mithin *krummer* oder *convexer*, der Bogen AH dagegen *flächer* oder *weniger gebogen ist*, und mehr nichts.

Und doch haben geschickte Mathematiker sich jenen Trugschluss nicht nur zu Schulden kommen lassen, sondern sogar mit Hitze als Wahrheit vertheidigt. (Man sehe *Clavius* und *Taquets* Ausgaben *Euklids* B. 3. S. 16 besonders die erstere, wo diese Materie auf 20 klein gedrukten Octavseiten mit den Gründen dafür und dawider ausgeführt wird; auch Clavius Werk de triangulis planis et sphaericis und in *Wallis* Opera Mathematica Tom. II, p. 605 die Abhandlung de angulo contactus et semicirculi.) Ueberhaupt gehört diese an sich nicht sehr schwierige Materie zu den am mehrsten missverstandnen in der reinen Mathematik. Selbst *van Swinden* geräth hier in die irrige Meynung: „wenn man behaupte der krummlinige Winkel GHAD sey kleiner als der gradelinige GAD, so stelle man keine Vergleichung zwischen den blossen Neigungen (Lagen) dieser Linien an, *sondern zwischen dem Raume den diese Winkel einschliessen*, und verweist deshalb auf *Vietae Opera p. 382.* Das wäre aber doch fürwahr eine Sonderbarkeit der ersten Grösse, wenn man an Flächenräume dächte und von Winkeln spräche, und etwas das mit der gerühmten Genauigkeit der Geometer gar sehr im Widerspruch stände.

Man sieht hier abermals eine Probe, wie es in der Geometrie, da wo es auf Lage ankömmt, noch manches aus einer sorgfältiger entwickelten Theorie der Lage, zu berichtigen und zu ergänzen giebt. *Le Gendre* hat diese Materie vom Berührungswinkel, die ſchon Euklid richtig vorträgt, ſehr mit Unrecht ausgelaſſen; ſo auch *Thomas Simpſon.* Hielten ſie ſie etwa noch für ſtreitig, oder für zu ſchwierig. Für beydes erkennt ſie nicht

d. U.

Anmerkung 2. *Die berührende Linie iſt die Gränze für alle ſchneidende Linien, welche auf dem Durchmeſſe:, der durch den Berührungspunkt geht, ſenkrecht ſtehn.* Denn die beyden Dnrchſchnittspunkte dieſer Linien mit dem Kreiſe, ſtehn gleich weit vom Durchmeſſer ab, und nähern ſich immer mehr, wenn die durchſchneidende Linie ſich weiter vom Mittelpunkte entfernt. Rückt ſie endlich um den Halbmeſſer vom Mittelpunkte ab, ſo fallen beyde durchſchnittspunkte in den einen Berührungspunkt zuſammen, und zwar in dem Durchmeſſer; daher die Tangente mit in die Reihe dieſer ſchneidenden Linien *als letzte* aufzunehmen iſt; *als Gränze* der dieſe ſich ohne Ende fort näheren, ohne ſie doch je zu erreichen, ſo lange ſie ſchneidende Linien bleiben. Mann kann ſich daher *die berührende Linie als eine ſchneidende denken, für welche die beyden Durchſchnittspunkte mit einander und mit dem Durchmeſſer zuſammenfallen,* und unter dieſer Fiction, in der ein Widerſpruch liegt, der ſich jedoch ſelbſt aufhebt, gelten von ihr alle Sätze der ſchneidenden Linien, in ſo fern ſie mittelſt dieſer Fiction gehörig modificirt werden. Auch gründen ſich auf dieſe Fiction die erſten Methoden an allen krummen Linien Tangenten zu ziehn, dergleichen *Fermat*, *Hudden* u. a. erdacht haben. — An einem gegebnen Kreiſe Tangenten verſchiednen Bedingungen gemäſs, oder umgekehrt zu einer gegebnen Tangente einen Kreis zu beſchreiben, lehren Aufg. 14 und 13. d. U.

LEHRSATZ 13.

Wenn zwey Parallellinien AB, DE, beyde den Kreis durchſchneiden, ſo ſind die Kreisbogeu MN, PQ welche zwiſchen ihnen liegen, gleich. Fig. 59.