Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 14.] Sind umgekehrt zwey Bogen MN, PQ eines Kreises gleich, so sind 1) die Sehnen, welche durch die übereinstimmenden Endpunkte beyder gehn, MP, NQ, parallel. - 2) Die Sehnen welche durch ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Zweytens ſind auch die Hälften der gleichen Sehnen MN, PQ, welche die Perpendikel aus den Mittelpunkten CR, OS auf ihnen abſchneiden, gleich, MR = RN = PS = SQ. Nun aber iſt RS = CO *, folglich ſind auch MP und NQ beyde gleich CO. *Mithin ſchneiden die ähnlich liegenden Theile beyder Kreislinien, von allen graden Linien, die mit der Linie durch ihre Mittelpunkte parallel laufen, gleiche Theile ab.* Umgekehrt iſt alſo der *geometriſche Ort* des Endpunkts P einer gegebnen graden Linie MP, welche in gegebner Lage, (z. B. parallel mit AF) mit ihrem andern Endpunkt M auf einer gegebnen Kreislinie ADBK aufſteht, eine gleiche Kreislinie EGFL, deren Mittelpunkt O, von C um gegebne Linien MP, in der gegebnen Lage, abſteht *. * I. 34. *Cf. I. 34 f. 1.

Anmerkung. Dieſer Zuſatz iſt im weſentlichen Satz 21. im erſten Buch von Apoll. ebnen Oertern, wird dort aber anders ausgedrückt und bewieſen. Der berühmte *Fermat* ſoll der Urheber deſſelben ſeyn.]

[LEHRSATZ 14.]

Sind umgekehrt zwey Bogen MN, PQ eines Kreiſes gleich, *ſo ſind* 1) *die Sehnen, welche durch die übereinſtimmenden Endpunkte beyder gehn, MP, NQ, parallel.* — 2) *Die Sehnen welche durch die verkehrt liegenden Endpunkte beyder gezogen ſind, MQ, NP, durchſchneiden ſich ſo, daſs die ähnlich liegenden Theile in beyden gleich ſind.* — 3) *Auch wenn die Sehnen der beyden gleichen Bogen MN, PQ ſelbſt, ſich auſserhalb des Kreiſes ſchneiden, ſo ſind die* Fig. 59.

abgeschnittnen Stücke in der Verlängerung beyder gleich.

1. Halbire den Bogen NQ durch den Halbmesser
CH; so wird durch diesen Halbmesser auch die Sehne
* 9. NQ *, ferner, weil MN, PQ gleiche Bogen sind, auch
der Bogen MHP und die Sehne MP dieses Bogens halbirt.
Folglich stehn die Sehnen MP, NQ, welche
durch die übereinstimmenden Endpunkte der beyden
gleichen Bogen gehn, beyde auf die grade Linie CH
* I. 21. senkrecht; sie sind also parallel *.

2. Die Sehnen MQ, NP, müssen, weil sie die
verkehrt liegenden Endpunkte der beyden gleichen
Bogen verbinden, sich nothwendig in irgend einem
* Gr. 8. Punkte I durchschneiden *. Ueberdem sind sie gleich,
* 9. weil sie zu gleichen Bogen MHQ, NHP gehören *. Da
nun auch die Sehnen MN, PQ gleich sind, so decken sich
* I. 11. die Dreyecke MPQ, PMN *, und die Winkel bey M
und P sind gleich. Das Dreyeck IMP ist daher gleichschenklig *,
* I. 13. und IM = IP, folglich auch, da die
ganzen Sehnen MQ, NP gleich sind, IN = IQ.

3. Durchschneiden sich die beyden Sehnen der
gleichen Bogen MN, PQ in irgend einem Punkte O
ausserhalb des Kreises, so ist das dadurch entstehende
Dreyeck NOQ gleichschenklig, mithin NO = QO.
Denn aus dem, was unter 2 bewiesen ist, folgt, daß
die Winkel IMN, IPQ, folglich auch, wegen des
Parallelismus der Sehnen PM und QN, die Winkel
* I. 25. QNO und NQO gleich sind *.

Folgerung 1. Weil in dem unter 2 betrachteten
Fall, das Dreyeck MIP gleichschenklig ist, so liegt
die

die Spitze deſſelben in dem Halbmeſſer CH, welcher auf der Grundlinie MP in ihrer Mitte ſenkrecht ſteht *. *I.17.f.3 Folglich *liegt der Durchſchnittspunkt I der beyden Sehnen MQ NP ſtets in dem Halbmeſſer, der die Bogen MHP, NHQ halbirt.* — Umgekehrt geht die grade Linie, welche durch die Punkte H und I gezogen wird, ſtets durch den Mittelpunkt des Kreiſes *. — Endlich * Gr. 6. ſchneiden zwey Sehnen, welche durch einen Punkt I eines Halbmeſſers unter gleichen Winkeln gegen denſelben gezogen werden, gleiche Kreisbogen ab.

Folgerung 2. Weil eben ſo in dem unter 3 betrachteten Fall das Dreyeck MPO gleichſchenklig iſt, ſo liegt die Spitze deſſelben O, in der Verlängerung des Halbmeſſers CH, welcher auf der Grundlinie in der Mitte aufſteht. — Umgekehrt muſs alſo eine grade Linie welche den Winkel C am Durchſchnittspunkte halbirt, durch die Mitte der Sehnen MP und NQ und durch den Mittelpunkt des Kreiſes gehn; und grade Linien, welche unter gleichen Winkeln gegen die Verlängerung eines Halbmeſſers durch einen Pnnkt deſſelben gezogen werden, und den Kreis durchſchneiden, ſchneiden in ihm gleiche Bogen ab.

Zuſatz I. Dieſe Sätze laſſen ſich auch auf Tangenten übertragen. *Nimmt man auf beyden Seiten des Berührungspunktes H gleiche Bogen HM, HP, ſo läuft die Sehne durch ihre Endpunkte, MP, mit der Tangente DE parallel.* Denn zieht man nach dem Berührungspunkte den Halbmeſſer CH, ſo halbirt dieſer den Bogen MHP, mithin auch die Sehne MP *, ſteht alſo auf ihr, ſo wie * 9. Fig. 60.

*12.f.1. auf der Tangente ſenkrecht *, und Sehne und Tangente laufen alſo parallel.

Tangenten durch die beyden Punkte M und P gezogen,
*12.f.2. machen mit der Sehne MP gleiche Winkel *, bilden alſo, wenn ſie ſich in einem Punkte O durchſchneiden, ein gleichſchenkliges Dreyeck. Daher ſind die *abgeſchnittnen Stücke derſelben MO, OO gleich*, und ihr Durchſchnittspunkt fällt in dem Halbmeſſer CH, der
*I.17.f.3 durch den Berührungspunkt geht *. Umgekehrt muſs eine grade Linie durch O und H auch durch den Mittelpunkt, und eine grade Linie, welche den Winkel bey O halbirt, ſowohl durch den Berührungspunkt, als auch durch den Mittelpunkt gehn.

Fig. 79. *Tangenten, welche von einem Punkte O auſserhalb des Kreiſes nach dem Kreiſe gehn, ſind überhaupt insgeſammt gleich.* Denn zieht man CO und die Halbmeſſer nach den Berührungspunkten CF, CG, ſo entſtehn rechtwinklige Dreyecke, worin die Hypothenuſe CO und eine der Katheten gleich ſind, die ſich deshalb de-
* I. 19. cken *, und worin OG = OF iſt.

Fig. 61. Zuſatz II. *Iſt ein Halbkreis ABC in eine grade Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 6 getheilt, und man verbindet die übereinſtimmenden Theilpunkte von den Endpunkten des Durchmeſſer an gerechnet durch grade Linien AC, HF, IG, ſo iſt die Summe aller dieſer parallelen Sehnen gleich dem Stück AK, welches eine grade Linie durch B und den nächſten Theilpunkt G gezogen, auf dem verlängerten Durchmeſſer abſchneidet.*

Denn wegen der Gleichheit der Theile AH, CF
*14. 1. und HI, FG ſind die Sehnen AC, HF, IG parallel *.

Eben so sind wegen Gleichheit der Bogen HI, CF und IB, FG die Sehnen HC, IFL, BGK parallel. Folglich sind HFLC, IGKL Parallelogramme, also HF = CL, IG = LK * und AC + HF + IG = AK. *I. 34. 2.

Zusatz III. *Ist ein Halbkreis ADB in eine ungrade Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 5, getheilt, und man verbindet die übereinstimmenden Theilpunkte durch grade Linien AB, DG, EF, und zieht nach den Endpunkten E, F der letztern dieser Linien die Halbmesser CE, CF; so sind alle Abschnitte jener Linien zwischen diesen Halbmessern EF, MN etc. zusammengenommen dem Halbmesser des Kreises gleich.* Taf. III. F. 62.

Denn theilt man auch den andern Halbkreis AHB auf dieselbe Art ein, in den Punkten H, I, K etc., so gehn erstens EC und FC verlängert als Durchmesser durch zwey Theilpunkte K, I *. Verbindet man zweytens die verkehrt liegenden Endpunkte der beyden gleichen Theile DE, HI, durch die Sehnen EH, DI, so durchschneiden sich diese, nach Folgerung 1, in einem Punkte L des Halbmessers CA, so dass CA = CL + LA ist. Nun sind aber wegen Gleichheit der Theile, die Sehnen FI, EH, DA welche gleiche Bogen abschneiden, parallel *. Eben so die Sehnen AB, DG, EF und die Sehnen EK, DI, etc. Mithin sind als Parallelen zwischen Parallelen, erstens DN = AC, und zweytens EF = LC = DM *, also auch DN − DM = AC − LC, d. h. MN = AL und folglich EF + MN = LC + AL = AC. *2. u. 3. * 14. 1. *I. 34. 1.

Grade ſo führt man den Beweis, wenn der Halbkreis in eine gröſsere Zahl von ungleichen Theilen getheilt iſt.

Taf. III. F. 63. Zuſatz IV. *Iſt ein Kreis in ſechs gleiche Theile getheilt, und man verbindet einen der Theilpunkte, A, mit denen, welche um zwey Theile von demſelben abſtehn durch grade Linien AC, AE; ſo theilen dieſe Linien die Sehne BF zwiſchen den übergangnen Theilpunkten, welche zunächſt bey A liegen, in drey gleiche Theile.*

Denn erſtens ſind AC, BF, und zweytens auch AE, FB, zwey Sehnen, welche die verkehrt liegenden Endpunkte zwey gleicher Bogen AF, CB und AB, EF mit einander verbinden. Folglich durchſchneiden
14. 2. ſich dieſe Sehnen ſo, daſs BH = AH und FI = AI iſt. Nun aber ſind, wenn man CE zieht, die Bogen AC, CE, EA, folglich auch die Sehnen dieſer Bogen
* 7. gleich *. Alſo iſt das Dreyeck ACE gleichſeitig. Da überdem CE parallel mit BF läuft, ſo iſt das Dreyeck
*I.25.A. AHI, mit jenem Dreyeck gleichwinklig *, alſo eben-
*I21..f.2 falls gleichſeitig, oder AH = HI = AI *. Mithin iſt auch BH = HI = IF, folglich die Sehne BF auf dieſe Art in drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. Dieſer ſehr brauchbare Lehrſatz und die Zuſätze fehlen bey Le Gendre. Zuſatz 2 entlehne ich aus *Clavius* Euklid, Zuſatz 3 u 4 aus *Kraffts* Inſtitut. Geometr. ſublim., wo als Urheber des erſtern *La Hire* in den Mémoires de Mathematique. Paris 1692. p. 92, und des letztern *Gregor von St. Vincent* in ſeinem Opus geometricum prop. 96 de Circulo genannt wird. In den Beweiſen bin ich indeſs von ihnen abgewichen. In den folgenden Büchern werden wir ähnliche intereſſante Sätze finden.

d. U.