Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 15.] Nimmt man ausserhalb oder innerhalb eines Kreises einen Punkt A und zieht durch ihn und den Mittelpunkt B eine grade Linie, welche die Kreislinie in den Punkten I und H durchschneidet; ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

[LEHRSATZ 15.]

Nimmt man ausserhalb oder innerhalb eines Fig. 64.
Kreises einen Punkt A und zieht durch ihn und den Mittelpunkt B eine grade Linie, welche die Kreislinie in den Punkten I und H durchschneidet; so hat

1) *unter allen Punkten der Kreislinie der Punkt I, der in der Linie AH mit dem Punkte A zu einerley Seite des Mittelpunkts B liegt, den kleinsten; dagegen der Punkt H, der mit A auf entgegengesetzter Seite des Mittelpunktes B liegt, den grössten Abstand vom Punkte A;*

2) *haben unter mehreren Punkten E, K, G in der Kreislinie, diejenigen den kleinern Abstand vom Punkte A, welche näher beym Punkte I liegen; und*

3) *stehn je zwey Punkte, die zu entgegengesetzten Seiten der Linie AH liegen und gleich weit von I entfernt sind, z. B. E, F, auch vom Punkte A gleich weit ab.*

1. Denn zieht man nach den Punkten E, K, F, G in der Kreislinie die Halbmesser BE, BK, BF, BG und aus dem Punkte A die graden Linien AE, AK AF, AG, so bilden diese mit AB Dreyecke, in deren jedem, z. B. in ABE, der *Unterschied* je zweyer Seiten *kleiner* und zugleich ihre *Summe grösser* als die dritte Seite *, folglich AB — BE oder AB — BI, d. h. AI < AE und zugleich AB + BE oder AB + BH d. h. AH > AE ist. Folglich ist der Punkt I *weniger*, der Punkt H *weiter* als jeder andre Punkt E in der Kreislinie vom Punkte A entfernt; welches das erste ist. * I. 8.

2. Alle jene Dreyecke ABE, ABK, ABF, ABG
haben unter einander zwey Seiten gemein, nemlich
AB und die gleichen Halbmeſſer BE, BK, BF, BG.
Folglich wird die Gröſse ihrer dritten Seiten AE, AK,
AF, AG von der Gröſse der gegenüberſtehenden Winkel ABE, ABK, ABF, ABG durch Lehrſatz 10. des
erſten Buchs beſtimmt. Alle dieſe Winkel ſind aber
zugleich Winkel am Mittelpunkte des Kreiſes um B,
* 7; 8. daher ihre Gröſse von der Gröſse ihrer Sehnen abhängt*,
folglich von der gegenſeitigen Entfernung der beyden
Endpunkte dieſer Sehnen, d. h. der Punkte E, K, F,
G vom Punkte I. Iſt der Punkt E weiter als K aber
nicht ſo weit als G vom Punkte I entfernt, ſo iſt
* I. 10. AE $>$ AK und AE $<$ AG *; welches das zweyte iſt.

3. Sind endlich die Punkte E, F gleich weit von
* I. 6. I entfernt; ſo iſt auch AE = AF *, da denn die
beyden Punkte E, F zu entgegengeſetzten Seiten der
Linie AB liegen müſſen, weil ſie ſonſt (da die beyden
Dreyecke AEB, AFB ſich decken) zuſammenfielen,
und nicht zwey, ſondern nur ein Punkt wären; welches das dritte iſt.

Zuſatz. Dieſe Sätze über die Entfernung eines Punktes von den Punkten in einer Kreislinie gelten gleichmäſsig, jener Punkt liege *auſserhalb* oder *innerhalb* der Kreislinie, und der Beweis iſt für beyde Fälle derſelbe, nur die Lage der Linien etwas verſchieden, wie dieſes die beyden groſsen Kreiſen unſrer Figur darſtellen, daher es unnöthig iſt, mit Euklid (III. 8, 9) beyde Fälle beſonders zu behandeln. *Auch gelten ſie* *für jeden Punkt im Umfange*, für welche nur I und A zusammenfallen, wie im dritten kleinern Kreise unserer Figur.

Folgerung. 1. *Von jedem Punkte A, welcher nicht der Mittelpunkt ist, lassen sich nach einer Kreislinie stets zwey gleiche grade Linien ziehn, welche zu entgegengesetzter Seite der Linie durch den Mittelpunkt liegen* *; *aber auch nicht mehr als zwey*, indem es in der Kreislinie nicht mehr als zwey Punkte giebt, welche von Einem Punkte in derselben gleich weit abstehn *. * (3) * Z.

Folgerung 2. *Kann man also von einem Punkte nach der Kreislinie mehr als zwey grade Linien ziehn, so ist dieser Punkt nothwendig der Mittelpunkt des Kreises.*

Folgerung 3. *Grade Linien, welche* von einem Punkte ausserhalb des Kreises so gezogen sind, dass sie *von der Kreislinie gleiche Bogen abschneiden*, sind gleich *. Deshalb sind von jedem Punkte ausserhalb des Kreises nur zwey und nicht mehr solche grade Linien möglich. Umgekehrt schneiden alle *gleiche* grade Linien, welche von einem Punkte ausserhalb des Kreises an die Kreislinie gezogen sind, von ihr gleiche Bogen ab. Solche Linien so zu ziehn, dass sie im Kreise Sehnen von gegebner Grösse bilden, oder dass zwey derselben Bogen von gegebner Grösse umspannen, lehrt Aufg. 15. *14. f. 3.

Folgerung 4. Auch alle Tangenten, welche von einem Punkte nach einer Kreislinie gehn sind gleich *. Folglich sind *von einem Punkte O ausserhalb* Fig. 79. *14. Z. 1.

eines Kreises nach dem Kreise stets zwey verschiedne, aber nicht mehr, Tangenten möglich. — Ist eine grade Linie OF, welche von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises nach der Kreislinie geht, einer Tangente OG aus diesem Punkte gleich, so ist sie selbst eine Tangente des Kreises. — Endlich geht eine grade Linie, welche den Winkel O halbirt, den die beyden Tangenten aus dem Punkte O nach der Kreislinie bilden, durch den Mittelpunkt des Kreises und steht auf der Sehne durch die Berührungspunkte, in
*14. Z. 1. deren Mitte senkrecht auf *.

Anmerkung. Der Lehrsatz und die Folgerungen, sind den Sätzen des ersten Buchs über die Entfer-
* I. 16. nung eines Punktes von den Punkten einer graden Linie* analog, und zeigen sich für die Lehre des Kreises nicht weniger fruchtbar, als jene für die gradelinigen Figuren. Ich sehe daher den Grund nicht ab, warum sie Le Gendre übergeht, da er doch von jenen Sätzen des ersten Buchs einen so häufigen Gebrauch macht, und die fernern Sätze über das Schneiden und Berühren der Kreise blosse Folgerungen aus diesem Lehrsatz sind.

d. U.

[LEHRSATZ 16.]

Fig. 49. u. 50. 1) *Zwey Kreise deren Mittelpunkte A, B um die Summe oder um den Unterschied ihrer Halbmesser α, β von einander entfernt sind, berühren sich und zwar im ersten Fall äusserlich im zweyten innerlich.*

2) *Ist die Summe ihrer Halbmesser grösser oder der Unterschied derselben kleiner, so haben sie keinen Punkt mit einander gemein, und liegen im ersten Fall*