Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 16.] 1) Zwey Kreise deren Mittelpunkte A, B, um die Summe oder um den Unterschied ihrer Halbmesser α, β von einander entfernt sind, berühren sich und zwar im ersten Fall äusserlich im ...

eines Kreises nach dem Kreise stets zwey verschiedne, aber nicht mehr, Tangenten möglich. — Ist eine grade Linie OF, welche von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises nach der Kreislinie geht, einer Tangente OG aus diesem Punkte gleich, so ist sie selbst eine Tangente des Kreises. — Endlich geht eine grade Linie, welche den Winkel O halbirt, den die beyden Tangenten aus dem Punkte O nach der Kreislinie bilden, durch den Mittelpunkt des Kreises und steht auf der Sehne durch die Berührungspunkte, in
*14. Z. 1. deren Mitte senkrecht auf *.

Anmerkung. Der Lehrsatz und die Folgerungen, sind den Sätzen des ersten Buchs über die Entfer-
I. 16. nung eines Punktes von den Punkten einer graden Linie analog, und zeigen sich für die Lehre des Kreises nicht weniger fruchtbar, als jene für die gradelinigen Figuren. Ich sehe daher den Grund nicht ab, warum sie Le Gendre übergeht, da er doch von jenen Sätzen des ersten Buchs einen so häufigen Gebrauch macht, und die fernern Sätze über das Schneiden und Berühren der Kreise blosse Folgerungen aus diesem Lehrsatz sind.

d. U.

[LEHRSATZ 16.]

Fig. 49. u. 50. 1) *Zwey Kreise deren Mittelpunkte A, B um die Summe oder um den Unterschied ihrer Halbmesser α, β von einander entfernt sind, berühren sich und zwar im ersten Fall äusserlich im zweyten innerlich.*

2) *Ist die Summe ihrer Halbmesser grösser oder der Unterschied derselben kleiner, so haben sie keinen Punkt mit einander gemein, und liegen im ersten Fall*

der eine ganz ausserhalb, im zweyten der eine ganz innerhalb des andern.

Die grade Linie durch beyde Mittelpunkte durchschneide den um B beschriebnen Kreis in den Punkten I und H, nnd zwar sey I der Durchschnittspunkt welcher mit A auf einerley Seite von B liegt; so sind dem vorigen Lehrsatz gemäss alle Punkte in der Kreislinie um B *weiter* als der Punkt I, aber *nicht so weit* als der Punkt H vom Mittelpunkte A der zweyten Kreislinie entfernt *. * 14. I.

1. Ist daher AI *gleich* dem Halbmesser α dieser zweyten Kreislinie, so ist zwar I ein Punkt in derselben, aber alle andern Punkte der Kreislinie um B stehn weiter von A als um den Halbmesser α ab, liegen also ausserhalb der Kreislinie um A. Mithin berühren sich beyde Kreislinien in diesem Fall *äusserlich* *. Wenn aber $\alpha + \beta = AB$ ist, so muss auch $\alpha = AB - \beta$ *, oder $\alpha = AB - BI = AI$ seyn. Folglich ist AI unter dieser Bedingung dem Halbmesser α gleich, und unter ihr müssen sich daher beyde Kreise *äusserlich berühren.* Fig. 49. * E. 12. * Gr. 2.

Ist AH *gleich* dem Halbmesser α, so ist zwar H ein Punkt in der Kreislinie um A, aber alle andere Punkte der Kreislinie um B sind von A weniger als um den Halbmesser α entfernt, liegen also innerhalb jener Kreislinie. Beyde Kreislinien berühren sich also in diesem Fall *innerlich* *. Wenn aber $\alpha - \beta = AB$ ist, so muss auch $\alpha = AB + \beta$ oder $\alpha = AB + BH = AH$ seyn. Folglich ist unter dieser Bedingung AH Fig. 50. * E. 12.

dem Halbmeſſer α gleich, und unter ihr müſſen ſich daher beyde Kreiſe *innerlich berühren.*

2) Iſt dagegen AI *gröſser* als der Halbmeſſer α ſo fällt der Punkt I, der unter allen in der Kreislinie um B am nächſten bey A liegt, mithin dieſe ganze Kreislinie, auſserhalb der Kreislinie um A und beyde haben keinen Punkt gemein. Das iſt aber der Fall, wenn $\alpha + \beta > AB$ iſt, da denn auch $\alpha > AB - \beta$ oder $> AB - BI$, d. h. $> AI$ iſt.

Iſt endlich AH *kleiner* als der Halbmeſſer α, ſo fällt der Punkt in der um B beſchriebnen Kreislinie, welcher am weiteſten von A entfernt iſt, mithin dieſe ganze Kreislinie, innerhalb der Kreislinie um A, und beyde Kreislinien haben wiederum keinen Punkt gemein. Das iſt aber der Fall, wenn $\alpha - \beta < AB$ iſt, da denn $\alpha < AB + \beta$ oder $< AB + BH$ d. h. $< AH$ iſt.

Folgerung 1. *Wenn zwey Kreiſe einander berühren, ſo liegt folglich ſtets der Berührungspunkt mit den beyden Mittelpunkten in einer graden Linie*, und zwar *zwi-*
Fig. 49. *ſchen* beyden Mittelpunkten wenn die Kreiſe *äuſserlich*,
Fig. 50. *nicht zwiſchen ihnen*, wenn ſie ſich *innerlich* berühren. Denn nur unter dieſen Bedingungen kann der Abſtand ihrer Mittelpunkte der Summe oder dem Unterſchiede ihrer Halbmeſſer gleich ſeyn. Die grade Linie, welche durch zwey jener Punkte gezogen wird, muſs alſo immer auch durch den dritten gehn.

Folgerung 2. *Wenn umgekehrt zwey Kreislinien in einem Punkte I oder H, welcher in der graden Linie durch ihre Mittelpunkte liegt, zuſammentreffen, ſo berüh-*

ren ſie ſich. Denn dann iſt allemal die Entfernung ihrer Mittelpunkte entweder der Summe oder dem Unterſchiede ihrer Halbmeſſer gleich; ein ſehr einfaches Kennzeichen von Kreiſen die ſich berühren, welches in der Lehre von den Berührungen von vielem Gebrauch iſt.

Folgerung 3. *Zwey ſich berührende Kreiſe haben im Berührungspunkte eine gemeinſchaftliche Tangente.* Denn da ihre Halbmeſſer AI, BI, welche nach dem Berührungspunkte gezogen werden, in gerader Linie liegen *, ſo fallen die Perpendikel, welche auf beyde * f. 1.
im Berührungspunkte I errichtet ſind, mithin die Tangenten zuſammen *. Ein Perpendikel auf die gemeinſchaftliche Tangente im Berührungspunkte errichtet, * 12. u. I. 1. Z. 2.
geht alſo gewiſs durch *beyder* Kreiſe Mittelpunkt.

Folgerung 4. *Haben umgekehrt zwey Kreiſe in einem Punkte I den ſie gemein haben, eine gemeinſchaftliche Tangente, ſo berühren ſie ſich,* und zwar *innerlich,* wenn ihre Mittelpunkte auf einerley, *äuſserlich* wenn ſie auf entgegengeſetzter Seite der Tangente liegen. Denn ihre Mittelpunkte liegen dann beyde in dem Perpendikel, welches auf die gemeinſchaftliche Tangente im Berührungspunkt I errichtet wird *, ſind alſo im erſten Fall um den Unterſchied der Halbmeſſer beyder * f. 3.
Kreiſe, im zweyten um ihre Summe von einander entfernt. Die Kreiſe müſſen ſich alſo unſerm Lehrſatz zu folge berühren, im erſten Fall innerlich, im zweyten äuſserlich.

Folgerung 5. Alle Kreiſe, die durch einen Punkt I einer Kreislinie gehn, und um einen Punkt

indem Halbmesser IA, oder dessen Verlängerung, als Mittelpunkt beschrieben sind, berühren sich im Punkte I, weil sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente
*f. 4. haben *, und liegen ganz zu einerley oder entgegengesetzter Seite dieser Tangente, d. h. des Perpendikels welches auf AI im Punkte I errichtet wird.

Anmerkung. Der erste Theil dieses Lehrsatzes steht zwar bey Le Gendre, und macht bey ihm sogar zwey Lehrsätze aus, allein seine Beweise sind sehr mangelhaft, da er sich nicht auf den vorhergehenden Lehrsatz berufen konnte. Die fruchtbaren Folgerungen fehlen bey ihm alle bis auf die erste.

d. U.

[LEHRSATZ 17.]

T. III. F. 65. u. 66. *Wenn zwey um die Mittelpunkte C und O beschriebne Kreise sich innerlich oder äusserlich berühren, so liegen, im ersten Fall die beyden übereinstimmenden Endpunkte E, G, im zweyten die verkehrt liegenden Endpunkte E, G zweyer paralleler Durchmesser DE, FG, mit dem Berührungspunkte I in grader Linie.*

Denn verbindet man die Mittelpunkte durch die grade Linie CO, so geht diese auch durch den Berührungs-
*16. f. 1. punkt *. Zieht man daher von dem Berührungspunkte nach den genannten Endpunkten der parallelen Durchmesser die graden Linien IE, IG so entstehn zwey
*E. 2. α gleichschenklige Dreyecke ICE, IOG, worin wegen des Parallelismus der Durchmesser die Winkel an der Spitze, mithin auch die Winkel an der Grundlinie