Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 22. Wie auch zwey Winkel ACB, ACD sich zu einander verhalten mögen, immer verhalten sich auf dieselbe Art zwey Kreisbögen AB, AD, welche um ihren Scheitelpunkt mit gleichem Halbmesser ...

[Unter der Vorausſetzung eines Verhaltens wie zwey ganze Zahlen zu einander, iſt alſo ſtets das Verhältniſs ſolcher Bogen und ſolcher Winkel gleich, *ſind folglich Bogen und Winkel proportional* *.] * V. 2.

LEHRSATZ 22.

Wie auch zwey Winkel ACB, ACD ſich zu einander verhalten mögen, immer verhalten ſich auf dieſelbe Art zwey Kreisbogen AB, AD, welche um ihren Scheitelpunkt mit gleichem Halbmeſſer beſchrieben und von ihren Schenkeln umſpannt werden. Fig. 68.

Man lege den kleinern Winkel ACD ſo auf den gröſsern, daſs ihre Scheitel, der Schenkel CA, und ihre Kreisbogen zuſammenfallen *. Wenn nun die im Lehrſatz ausgeſagte Proportion, d. h. Gleichheit der Verhältniſſe, in irgend einem Fall nicht ſtatt fände, ſo müſte dann der Winkel ACB zum Winkel ACD ſich wie der Bogen AB zu einem Bogen AO, der *gröſser* oder *kleiner* als AD iſt, verhalten *, alſo folgende Proportion richtig ſeyn * 1. *V. 3. α.

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog. } AB : \text{bog. } AO$$

Der Bogen AO ſey *erſtens gröſser* als AD, ſo kann man ſich AD in lauter gleiche Theile getheilt denken, welche kleiner als der Unterſchied beyder Bogen, DO, ſind *, [z. B. in n,] da denn, wenn man dieſe Theile weiter nach O zu aufträgt, zwiſchen D und O wenigſtens ein Theilpunkt I fallen muſs. Zieht man nun den Halbmeſſer CI, ſo ſind ACD, ACI zwey Winkel am Mittelpunkte, deren Bogen AD, AI ſich wie zwey *Aufg. 5 Z. 2.

ganze Zahlen [n und n + 1] zu einander verhalten; folglich ist dann kraft des vorhergehenden Zusatzes

$$\angle ACB : \angle ACI = \text{bog. } AB : \text{bog } AI$$

Die Vorderglieder in den Verhältnissen dieser Proportion sind mit den Vordergliedern in der ersten Proportion einerley; folglich müssen die Hinterglieder proportional seyn, also

$$\angle ACD : \angle ACI = \text{bog. } AO : \text{bog } AI$$

[indem, wenn der Winkel ACB die Winkel ACD, ACI grade so misst, wie der Bogen AB die Bogen AO, AI, auch zwischen diesen Winkeln, und Bogen einerley Zahlverhältniss statt finden muss *.]

*V. 3. ε.

Nun aber ist der Bogen AO grösser als AI, folglich müsste auch kraft der letztern Proportion der Winkel ACD grösser als der Winkel ACI seyn, also der Theil grösser als das Ganze, welches ungereimt ist *. Also ist es unmöglich dass der Winkel ACB sich zum Winkel ACD, wie der Bogen AB zu einem Bogen, der grösser als AD wäre, verhalten könne.

*V. 3. δ.

Aus einer ähnlichen Schlussfolge erhellt, dass *zweytens* auch kein Bogen der *kleiner* als AD ist, mit den Winkel ACB, ACD und dem Bogen AB eine gültige Proportion bilden kann.

[Folglich muss die im Lehrsatz ausgesagte Proportion unter allen Umständen bestehn, da, bestände sie nicht, man in Ungereimtheiten verwickelt würde] und es ist also immer

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog } AB : \text{bog. } AD.$$

[*Z u ſ a t z* I. Grade ſo beweiſt man den umgekehrten Satz, daſs, *wie auch zwey Bogen aus gleichen Kreiſen ſich verhalten mögen, die Winkel an ihren Mittelpunkten, von deren Schenkel ſie umſpannt werden, ſich grade auf dieſelbe Art verhalten.*

So iſt alſo die Proportionalität zwiſchen Winkel und Bogen allgemein dargethan, die beyden Bogen oder die beyden Winkel mögen durch einerley Bogen oder Winkel ſich meſſen laſſen oder nicht, d. h. *commenſurabel* oder *incommenſurabel* ſeyn, und folglich ſich wie Zahlen verhalten oder nicht, d. h. ein *rationales* oder ein *irrationales Verhältniſs* haben *. * V. I.

Der hier geführte ſehr deutliche und evidente *Beweis für dieſen incommenſurablen Fall*, den ich durch die zweyte Anmerkung zur fünften Aufgabe noch vervollkommnet zu haben glaube, ſcheint, ſo wie der analoge Beweis Buch 3 Lehrſatz 4, von Le Gendre aus Simpſons Elementen entlehnt zu ſeyn, wo man ihn im Weſentlichen in der Anmerkung zum dritten Satze des fünften Buches ſindet. Simpſon bemerkt dabey daſs ſchon *Euklid* im zwölften Buch ſeiner Elemente ſich dieſer Beweisart bedient, und daſs ſich mittelſt derſelben in jedem Falle die Schwierigkeiten, die aus der Incommenſurabilität von Linien oder andern Ausdehnungen herrühren, leicht und befriedigend heben laſſen.]

Z u ſ a t z II. Was in dieſem und dem vorigen Lehrſatz über die Proportionalität zwiſchen Winkeln und Bogen bewieſen worden iſt, gilt ebenfalls für *Kreisausſchnitte* und *ihre Bogen*, welche grade ſo wie Winkel und Bogen von einander abhängen, und auf die der hier geführte Beweis ſich ganz übertragen läſst. *Es verhalten ſich alſo auch ſtets Kreisausſchnitte in demſelben Kreiſe oder in zwey gleichen Kreiſen, wie ihre Bogen.*

Zuſatz III. Weil die Winkel am Mittelpunkte eines Kreiſes, (und ſo auch die Kreisausſchnitte,) mit den Bogen worauf ſie ſtehn (die ſie umſpannen) proportional ſind, d. h. mit ihnen ſo zuſammenhängen, daſs beyde ſich nach einerley Verhältniſs ändern, und wenn die eine dieſer Gröſsenarten zu oder abnimmt, die andre nach gleichem Verhältniſſe zu oder abnimmt; ſo ſind wir berechtigt die eine zum *Maaſs* der andern zu brauchen. Wir wollen deshalb hinfüro den Bogen AB, worauf ein Winkel am Mittelpunkte ACB (oder ein Kreisausſchnitt) ſteht, für *das Maaſs dieſes Winkels* ACB (oder des Ausſchnitts) nehmen; wobey man ſich aber wohl merken muſs, daſs, wenn man verſchiedne Winkel (oder verſchiedne Ausſchnitte) durch ſolche Bogen, als ihr Maaſs, vergleichen will, die Bogen wie es der Lehrſatz vorausſetzt, mit *gleichem* Halbmeſſer beſchrieben ſeyn müſſen.

[Daſs hierbey von keinem *unmittelbaren* Meſſen, oder wie unſer Verfaſſer ſich nicht ganz richtig ausdrückt, von keinem abſoluten Maaſs, die Rede ſeyn kann, verſteht ſich von ſelbſt. Das *unmittelbare Maaſs* einer Gröſse muſs mit ihr völlig gleichartig ſeyn, ſich von ihr in nichts als in der Gröſse, und höchſtens noch in der Form unterſcheiden, daher Bogen ſich nur durch Linien, und Winkel nur durch Winkel unmittelbar meſſen laſſen. Wir müſſen alſo zum unmittelbaren Meſſen für die Winkel einen Winkel zur Einheit annehmen, und dazu haben wir schon den *rechten Winkel* erwählt, auf den wir alle übrige Winkel als auf ihr gemeinschaftliches Maafs, ihre Einheit, beziehn *. Da aber dieser Lehrsatz zeigt, dafs Winkel untereinander stets dasselbe Verhältnifs als die dazu gehörigen Bogen haben, so läfst sich aus dem Verhältnifs der Bogen auf das der Winkel schliefsen, folglich mittelst der Bogen erfahren, wie oft ein Winkel oder ein bestimmter Theil desselben in dem andern Winkel enthalten ist, daher man *mittelst* der Bogen einen Winkel mit dem rechten, als dem Maafse aller Winkel, vergleichen, folglich *mittelbar* messen kann *. Und von solchem *mittelbaren Maafs* ist hier nur die Rede.]

*I.1.Z.1.

*A20.A

Nehmen wir den rechten Winkel zur Einheit, so mufs jeder spitze Winkel durch eine Zahl die zwischen 0 und 1 fällt, also durch einen ächten Bruch, ein stumpfer Winkel durch einen Bruch der zwischen 1 und 2 fällt, ausgedrückt werden, welches etwas unbequem seyn würde. [Um die Brüche zu vermeiden nimmt man daher in der Ausübung nicht den rechten Winkel selbst, sondern den neunzigsten Theil desselben, den man einen *Grad* nennt, und dessen Sexagesimal-Theile (die man nach der Ordnung durch *Minuten, Secunden, Tertien* bezeichnet) zum unmittelbaren Maafs aller Winkel oder zur *Winkeleinheit*, und vergleicht, um die Gröfse eines Winkels in Graden, Minuten und Secunden zu erfahren, den Bogen, den ein Winkel umspannt, mit dem *neunzigsten Theil des Quadranten* und dessen Sexagesimaltheilen. *Der neunzigste Theil des Quadranten* (folglich der 360ste Theil der Kreislinie) wird gleichfalls ein Grad genannt, und dient, sammt seinen Sexagesimaltheilen (Minuten, Secunden, Tertien), allen Kreisbogen zum gemeinschaftlichen Maaſs oder zur Einheit, da denn jeder Winkel so viel Grad, Minuten und Secunden als sein Bogen enthält, jener *Winkelgrade*, dieser *Bogengrade* u.s., welches man gehörig unterscheiden muſs. Hierauf beruht der Gebrauch aller Winkelmesser in der Ausübung.]

[Anmerkung 1. Den neunzigsten Theil des Quadranten oder *einen Grad findet man durch Probiren ohne Schwierigkeit*, indem man z. B. erst die Gröſse der Sehne, die sich genau dreymal im Quadranten herumtragen läſst, dann die Sehne die sich im Drittel sechsmal, und endlich die, die sich im Sechstel des Drittels genau fünfmal umhertragen läſst, durch fortgesetztes Probiren aufsucht. Denn da zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören, erhält man auf diese Art einen Bogen der 3. 6. 5 d.h. 90 mal im Quadranten enthalten ist, stellt also den neunzigsten Theil des Quadranten dar. Auf ähnliche Art läſst sich jeder andre willkührliche Theil der Kreislinie finden, der Kreis also nach Belieben eintheilen. Allein dieses Probiren ist ein *mechanisches Verfahren*, welches blos für den vorgelegten einzelnen Fall den gesuchten Theil giebt; *kein Wissenschaftliches* welches aus allgemein gültigen Gründen abgeleitet, auf allgemeine Gültigkeit Anspruch machen könnte. Ein solches vermag, wie wir in
30. A. der Folge sehn werden, die Elementargeometrie nicht aufzustellen. Für die Eintheilung der Winkelmesser ist indeſs jenes mechanische Verfahren völlig hinreichend, besonders seitdem neuere Künstler, (der *Herzog von Chaulnes*, *Bird* und *Ramsden*) diese Eintheilungsmethode durch scharfsinnige Erfindungen auſserordentlich verfeinert und erleichtert haben.

Anmerkung 2. *Ein Winkelmesser* ist ein in Grade und kleinere Theile eingetheilter Kreis oder Kreisbogen. Bey denen die zum Messen und Auftragen der Winkel in Zeichnungen oder auf dem Papier bestimmt sind (*Transporteurs*) ist der Mittelpunkt der Theilung durch eine Oefnung oder eine Spitze genau bestimmt. Jeden Winkel den man messen, oder an einer Linie auftragen will, legt man so, dass dessen Spitze im Mittelpunkt fällt. Dann ist er ein Winkel am Mittelpunkte des eingetheilten Kreises, fasst also so viel Winkelgrade, als auf dem Instrumente Bogengrade zwischen seinen Schenkeln liegen.

Bey den Winkelmessern die zum Messen auf dem Felde oder am Himmel bestimmt sind, (*Theodolite, Scheibeninstrumente, ganze Kreise, Quadranten etc.*), drehen sich genau im Mittelpunkt der Theilung ein oder zwey Lineale (*Alhidaden*) mit Dioptern oder mit Fernröhren. Die Winkel der Gesichtslinien nach zwey Gegenständen, auf die man die Fernröhre richtet, werden folglich Winkel am Mittelpunkte dieser eingetheilten Kreise, und also durch die abgeschnittnen Bogen gemessen. Hierbey kömmt also alles, nächst der Güte der Eintheilung, darauf an, dass die Alhidade oder das Fernrohr sich genau um den Mittelpunkt der Theilung (oder mit der Theilung concentrisch) drehn. Sonst sind die abgeschnittnen Bogen nicht das Maass der Winkel, die dann *excentrisch* wären *. *25. A.

d. U.]

[Zusatz IV. In *zwey verschiednen Kreisen*, z. B. Fig. 47.
*den concentrischen EFD und KRG umspannen gleiche Winkel am Mittelpunkte ECD ähnliche Kreisbogen**, *d. h. Bogen ED, KG, die sich auf einerley Art zum ganzen Umfange verhalten*, nemlich wie der Winkel der sie umspannt zu vier rechten, und die daher *eine gleiche Menge von Graden enthalten.* Hierauf *beruht die Messung der Kreisbogen durch Winkelmesser.* Zieht man nemlich nach den Endpunkten eines Bogens DE, die Halbmesser, und legt einen Winkelmesser in der Ebne des Bogens so dass sein Mittelpunkt in den Mittelpunkt C fällt, so werden beyde Bogen concentrisch und die Schen- *IV. E. 2

kel CE, CD ſchneiden auf beyden gleich viel Grade ab; daher man die Gradmenge von DE, aus der in GK unmittelbar erſieht.

Zuſatz V. *Ein Winkel am Mittelpunkte iſt recht, ſtumpf oder ſpitz* je nachdem er auf einem Bogen ſteht, der dem Quadranten gleich, oder gröſser oder kleiner als der Quadrant iſt.

Zwey Halbmeſſer welche einen Halbkreis umſpannen liegen in grader Linie, und die Schenkel eines *erhab-*
*I. E. 16. *nen Winkels* ACD * umſpannen einen Kreisbogen EFD, welcher gröſser als der Halbkreis iſt. — Ueberhaupt ſind ein Winkel oder mehrere Winkel zuſammen genommen, einem, zwey oder mehreren rechten Winkeln, oder einem ſtumpfen oder einen ſpitzen Winkel gleich, je nachdem ſie zu ihrem Maaſs einen Quadranten, einen Halbkreis, oder einen Bogen haben, der kleiner als ein Halbkreis aber gröſser als ein Quadrant, oder der kleiner als ein Quadrant iſt. d. U.]

LEHRSATZ 23.

Jeder einem Kreiſe eingeſchriebne Winkel (d. h. jeder Winkel am Umfange) hat zu ſeinem Maaſse den halben Bogen worauf er ſteht.

Fig. 69. [Wenn der eine Schenkel eines eingeſchriebnen Winkels, AE, durch den Mittelpunkt des Kreiſes C geht, ſo ziehe man den Halbmeſſer CB. Denn entſteht ein gleichſchenkliges Dreyeck ACB, worin die Winkel A und B gleich ſind, und der äuſsere Winkel
*I. 30. $BCE = B + A^* = 2\,A$, folglich $A = \frac{1}{2}\,BCE$ iſt. Nun iſt aber BCE ein Winkel am Mittelpunkte, der