Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 23. Jeder einem Kreise eingeschriebene Winkel (d.h. jeder Winkel am Umfange) hat zu seinem Maasse den halben Bogen worauf er steht.

kel CE, CD schneiden auf beyden gleich viel Grade ab; daher man die Gradmenge von DE, aus der in GK unmittelbar ersieht.

Zusatz V. *Ein Winkel am Mittelpunkte ist recht, stumpf oder spitz* je nachdem er auf einem Bogen steht, der dem Quadranten gleich, oder grösser oder kleiner als der Quadrant ist.

Zwey Halbmesser welche einen Halbkreis umspannen liegen in grader Linie, und die Schenkel eines *erhabenen Winkels* ACD * umspannen einen Kreisbogen EFD, welcher grösser als der Halbkreis ist. — Ueberhaupt sind ein Winkel oder mehrere Winkel zusammen genommen, einem, zwey oder mehreren rechten Winkeln, oder einem stumpfen oder einen spitzen Winkel gleich, je nachdem sie zu ihrem Maaß einen Quadranten, einen Halbkreis, oder einen Bogen haben, der kleiner als ein Halbkreis aber grösser als ein Quadrant, oder der kleiner als ein Quadrant ist. d. U.]

*I. E. 16.

LEHRSATZ 23.

Jeder einem Kreise eingeschriebne Winkel (d. h. jeder Winkel am Umfange) hat zu seinem Maaße den halben Bogen worauf er steht.

Fig. 69. [Wenn der eine Schenkel eines eingeschriebnen Winkels, AE, durch den Mittelpunkt des Kreises C geht, so ziehe man den Halbmesser CB. Denn entsteht ein gleichschenkliges Dreyeck ACB, worin die Winkel A und B gleich sind, und der äussere Winkel BCE $= B + A$ * $= 2$ A, folglich $A = \frac{1}{2}$ BCE ist. Nun ist aber BCE ein Winkel am Mittelpunkte, der

*I. 30.

mit dem eingeſchriebenen Winkel BAE über demſelben Bogen BE ſteht, hat folglich dieſen Bogen zu ſeinem Maaſse. Alſo hat der Winkel A am Umfange, wovon ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht, den halben Bogen BE, worauf er ſteht, zu ſeinem Maaſse *. *21.Z.3.

Geht kein Schenkel eines eingeſchriebnen Winkels BAD durch den Mittelpunkt, ſo ziehe man durch die Spitze des Winkels den Durchmeſſer AE, welcher mit den Schenkeln des eingeſchriebnen Winkels, AB, AD, zwey Winkel am Umfange BAE, DAE bildet, welche der Bedingung des erſten Falls entſprechen, folglich zu ihrem Maaſs den halben Bogen haben, auf dem ſie ſtehn.]

Liegt nun der Mittelpunkt, folglich AE, zwiſchen beyden Schenkeln des gegebnen Winkels BAD, ſo iſt dieſer Winkel der Summe jener beyden Winkel BAE, DAE, gleich, hat folglich zu ſeinem Maaſse die Hälfte der Bogen BE + ED, d. h. die Hälfte des Bogens BD worauf er ſteht. — Liegt dagegen der Mittelpunkt, folglich auch AE, auſserhalb des Theils der Ebne den die beyden Schenkel AB, AD' umſpannen, ſo iſt der gegebne Winkel am Umfange BAD' dem Unterſchiede jener Winkel BAE, D'AE gleich*, hat folglich zu ſeinem Maaſs die Hälfte des Bogen D'E — BE, d. h. die Hälfte des Bogens BD' auf welchem er ſteht. *I E.12γ

Alſo hat jeder in dem Kreis eingeſchriebne Winkel, oder jeder Winkel am Umfang, zu ſeinem Maaſse den halben Bogen, den er umſpannt.

Zuſatz I. *Alle Winkel in demſelben Kreisabſchnitt* * *ſind gleich, z. B. BAC, BDC, BEC etc.* Denn ſie ſtehn * Fig. 70. * E. 7.

auf demſelben Kreisbogen BOC, deſſen Hälfte ſie zu ihrem Maaſse haben. [Eben ſo ſind Winkel in Abſchnitten gleicher Kreiſe, welche in beyden über gleiche Bogen oder Sehnen ſtehn, gleich. — Sind umgekehrt in einem Kreiſe, oder in zwey gleichen Kreiſen zwey Winkel am Umfange gleich, ſo umſpannen ſie gleiche Bogen, und ſtehn in gleichen Kreisabſchnitten.

T. III. Fig. 77. Daſſelbe iſt bey allen *ähnlichen Abſchnitten verſchiedner Kreiſe*, wie AEB, ADC der Fall, d. h. bey Ab-
IV.E.2 ſchnitten, deren Bogen gleich viel Grade enthalten. Denn die Ergänzungen ihrer Bogen zum ganzen Umfange ANB, ANC enthalten alsdann auch gleich viel Grade, folglich auch die Winkel in den Abſchnitten, E, D, welche durch die Hälfte dieſer Bogen, auf die ſie ſtehn, gemeſſen werden. Die Winkel in ähnlichen Abſchnitten ſind alſo immer gleich. Und *ſind umgekehrt in verſchiednen Kreiſen zwey Winkel am Umfange gleich, ſo ſind die Bogen welche ſie umſpannen und die Abſchnitte in welchen ſie ſtehn ähnlich*, (d. h. enthalten gleich viel Grade.)

Fig. 71. Zuſatz II. *Jeder Winkel im Halbkreiſe iſt ein Rechter*, z. B. der Winkel BAD. Denn zieht man den Halbmeſſer CA, ſo erhält man zwey gleichſchenklige Dreyecke BCA, ACD, worin die Winkel bey A den Winkeln B, D gleich ſind, alſo auch ihre Summe BAD = B + D iſt. Nun ſind die drey Winkel B, D, BAD, als Winkel in einem Dreyecke, zuſammengenommen
* I. 31. zwey rechten Winkeln gleich *; alſo iſt ihre Hälfte BAD einem rechten Winkel gleich. — Auch erhellt

der Satz unmittelbar daraus, daſs BAD als Winkel im Umfang, der auf den Halbkreis ſteht, die Hälfte des Halbkreiſes, d. h. einen Quadranten zum Maaſs hat; daher er nothwendig ein rechter iſt *. *22. Z. 5.

[*Folgerung. Sind folglich drey grade Linien AB,* Fig. 37 *AC, AD, welche in einem Punkte A zuſammenſtoſsen gleich, und liegen zwey derſelben, AB und AD, in grader Linie, ſo iſt, wenn man BC, CD zieht, der Winkel BCD ein rechter.* Denn dann läſst ſich um A mit dem Halbmeſſer AB ein Kreis beſchreiben, der durch die Punkte B, C, D geht *, worin BD Durchmeſſer, alſo *E. 2. ß BCD ein Winkel im Halbkreiſe iſt.

Halbirt man die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreyecks BCD im Punkte A, und zieht AC, (oder zieht man dieſe Linie ſo, daſs die Winkel B, BCA oder D, DCA gleich werden) ſo iſt AC = AB = AD.

Errichtet man endlich auf der Grundlinie eines gleichſchenkligen Dreyecks ABD, in ihrem Endpunkte ein Perpendikel CD, ſo durchſchneidet dieſe den zweyten verlängerten Schenkel BA ſo, daſs AD den Schenkeln AB, AC, und der Winkel bey D dem Winkel bey O gleich wird. Denn dann iſt A der Mittelpunkt eines Halbkreiſes durch B, C, D.]

Zuſatz III. *Jeder Winkel BAC, der in einem Kreis-* Fig. 70 *abſchnitt, gröſser als der Halbkreis eingeſchrieben iſt, iſt ein ſpitzer Winkel;* denn er ſteht auf einem Bogen der kleiner als der Halbkreis iſt, hat alſo zu ſeinem Maaſs einen kleinern Bogen als den Quadranten *. — *22. Z. 5. *Jeder Winkel BOC, in einem Kreisabſchnitt der kleiner als der Halbkreis iſt, iſt dagegen ein ſtumpfer Winkel.* Denn ihn misst die Hälfte eines Bogens, welcher grösser als der Halbkreis ist.

Anmerkung. Diese Sätze über die Vergleichung der Winkel, welche in Kreisen eingeschrieben sind, mittelst der Bogen die sie umspannen, (und die folgenden Sätze welche sie vervollständigen) gehören zu den fruchtbarsten in der Geometrie. Unmittelbar auf den hier bewiesenen beruhen einige nette *Eigenschaften sich durchschneidender Kreise*, wovon ich die erstere aus Clavius Euklid, die übrigen aus *Gregor von St. Vincenz* Opus Geometricum entlehne.

Fig. 72. 1. *Wenn ein Kreis ABC durch den Mittelpunkt C eines andern Kreises geht, und man zieht in ihm den Durchmesser der durch C geht, CA, so schneidet der zweyte Kreis, und der Bogen in ihm, von allen graden Linien, die durch den Punkt A gehn, gleiche Stücke LM, MN ab.* Denn zieht man CM, so ist AMC ein Winkel im Halbkreis, mithin CM senkrecht auf AN *, und folglich wird die Sehne LN des zweyten Kreises im Punkte M halbirt *.

* Z. 2.
* 9.

T. III. Fig. 78. 2. *Auch wenn zwey gleiche Kreise sich schneiden, und man beschreibt um ihre gemeinschaftliche Sehne * BC als Durchmesser einen Kreis, so wird jede grade Linie welche durch die Punkte B oder C geht, worin die Kreise sich schneiden, z. B. CM, von den drey Kreislinien halbirt.* Denn jede solche Linie bildet mit der Sehne BC einen Winkel BCM, welcher in beyden gleichen Kreisen ein Winkel am Umfange ist, und daher gleiche Bogen BF, BM umspannt *. Also sind auch die Sehnen BF, BM gleich *, und FBM ein gleichschenklig Dreyeck. Zugleich ist BLC als Winkel im Halbkreise ein rechter *, folglich BL ein Perpendikel auf die Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreyecks, und deshalb FL = LM *.

* 20.
* Z 1.
* 7.
* Z. 2.
*I.17.f.2

T. III. Fig. 76. 3. Durchschneiden sich zwey Kreise in den Punkten I, L und man beschreibt um L einen dritten Kreis, der beyde durchschneidet, *so liegen zwey der Durchschnittspunkte mit dem Punkte I in grader Linie.* Denn zieht man HI, HK und LH, LK welche als Halbmesser des dritten Kreises gleich sind, so sind auch die Winkel LKH LHK, gleich. Jener ſteht, als Winkel am Umfang, auf dem Bogen INL = IHL *, daher beyde Winkel die Hälfte dieſer Bogen zu ihrem Maaſs haben. Der Winkel am Umfang IHL umſpannt den übrigen Theil des Umfangs. Beyde, LHK, LHI haben alſo den halben Umfang zu ihrem Maaſs, ſind alſo rechte Winkel *, und mithin liegen KH, IH in grader Linie *.

* 7. *22. Z. 5. * I. 4.

4. *Wenn man über die Grundlinie BC eines Dreyecks ABC einen Kreis beſchreibt, und dieſer durchſchneidet die Schenkel des Dreyecks, oder ihre Verlängerungen in den Punkten D, E, und man beſchreibt ferner durch die Endpunkte eines der Schenkel, AB, und den Durchſchnittspunkt des andern Schenkels mit der Kreislinie, E, einen zweyten Kreis, und eben ſo durch A, C, D, einen dritten Kreis; ſo entſtehn dadurch ähnliche Kreisabſchnitte über die Seiten des Dreyecks.* T. III. Fig. 77.

Denn zieht man BE, CD, ſo ſind die Winkel BDC, BEC als Winkel am Umfange die über demſelben Bogen BMC ſtehn gleich. Liegt folglich A *innerhalb* des Kreiſes über BC, ſo ſind die Abſchnitte dieſer Winkel in allen drey Kreiſen ähnlich, folglich BEC, BEA, ADC ähnliche Kreisabſchnitte. — Liegt A *auſſerhalb* des Kreiſes über BC, ſo ſind auch die Nebenwinkel jener, d. h. die Winkel ADC, AEB gleich, umſpannen folglich in beyden Kreiſen Bogen AB, AC welche unter ſich und mit der Ergänzung des Bogens BMC zum ganzen Kreiſe, d. h. mit dem Bogen BDEC ähnlich ſind; daher auch in dieſem Fall die Abſchnitte über den drey Seiten des Dreyecks ähnlich ſind. Fig. 77. Fig. 77*

Liegt A *auf* der Kreislinie über BC, ſo fallen die beyden Durchſchnittspunkte D, E in einen Berührungspunkt zuſammen *, und man muſs dann über jedem Schenkel des Dreyecks Kreiſe, welche den andern Schenkel berühren, beſchreiben, um den folgenden Lehrſatz gemäſs ähnliche Kreisabſchnitte über alle drey Seiten des Dreyecks zu erhalten. * 20. A.

5. Aus dieſen Sätzen folgt umgekehrt, daſs *wenn man über die drey Seiten eines Dreyecks ähnliche Kreisbogen beſchreibt, je zwey derſelben ſich in einem der Schenkel des Dreyecks oder in deren*

Verlängerung durchschneiden müssen. Mittelst desselben und des folgenden Lehrsatzes beweist *Gregor von St. Vincenz* in seinem grossen Geometrischen Werke (Prop. 11. bis 16, und 58 bis 64 de Circulo) eine Menge netter Eigenschaften vom Durchschnitt grader Linien, die durch die Spitze des Dreyecks A gehn, mit den Bogen der drey ähnlichen Kreisabschnitte, von denen ich hier nur ein Paar anführe, deren Beweis keine Schwierigkeit hat, uns hier aber doch zu weit abführen würde.

6. *Zieht man von dem Mittelpunkte des einen Kreisabschnitts BDC durch die Mittelpunkte der beyden andern grade Linien, so liegen die Durchschnitte dieser Linien mit den letztern Kreisbogen und die Spitze A des Dreyecks in grader Linie*; und dasselbe ist der Fall mit den beyden Punkten worin die *Tangente*, die am Bogen des Kreisabschnitts BEC in den Punkten B und C gezogen werden, die beyden andern Kreisbogen durchschneiden.

7. *Zieht man durch die Spitze A eine grade Linie, so sind die Stücke derselben, welche zwischen der Kreislinie BECM und den beyden andern Kreislinien liegen, allemal gleich.*

8. *Wenn ein Kreis, der um den Mittelpunkt des Abschnitts BEC beschrieben wird, den einen der beyden andern Kreise berührt oder schneidet, so berührt oder schneidet er auch den zweyten, und zwar schneidet er im letztern Fall von beyden ähnliche Bogen ab.* Und noch ein Paar solche Sätze, die ich übergehn muss,

d. U.

LEHRSATZ 24.

Fig. 74. 1. *Der Winkel BIE, den eine Tangente IB mit einer Sehne IE macht, welche die Tangente im Berührungspunkte durchschneidet, hat zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE der von beyden Linien eingeschlossen wird.*

[2. *Umgekehrt muss jede grade Linie IB, welche durch den Endpunkt einer Sehne IE gegen diese Sehne*