Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 24. 1. Jeder Winkel BIE, den eine Tangente IB mit einer Sehne IE macht, welche die Tangente im Berührungspunkte durchschneidet, hat zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE der von beyden ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Verlängerung durchschneiden müssen. Mittelst desselben und des folgenden Lehrsatzes beweist *Gregor von St. Vincenz* in seinem grossen Geometrischen Werke (Prop. 11. bis 16, und 58 bis 64 de Circulo) eine Menge netter Eigenschaften vom Durchschnitt grader Linien, die durch die Spitze des Dreyecks A gehn, mit den Bogen der drey ähnlichen Kreisabschnitte, von denen ich hier nur ein Paar anführe, deren Beweis keine Schwierigkeit hat, uns hier aber doch zu weit abführen würde.

6. *Zieht man von dem Mittelpunkte des einen Kreisabschnitts BDC durch die Mittelpunkte der beyden andern grade Linien, so liegen die Durchschnitte dieser Linien mit den letztern Kreisbogen und die Spitze A des Dreyecks in grader Linie*; und dasselbe ist der Fall mit den beyden Punkten worin die *Tangente*, die am Bogen des Kreisabschnitts BEC in den Punkten B und C gezogen werden, die beyden andern Kreisbogen durchschneiden.

7. *Zieht man durch die Spitze A eine grade Linie, so sind die Stücke derselben, welche zwischen der Kreislinie BECM und den beyden andern Kreislinien liegen, allemal gleich.*

8. *Wenn ein Kreis, der um den Mittelpunkt des Abschnitts BEC beschrieben wird, den einen der beyden andern Kreise berührt oder schneidet, so berührt oder schneidet er auch den zweyten, und zwar schneidet er im letztern Fall von beyden ähnliche Bogen ab.* Und noch ein Paar solche Sätze, die ich übergehn muss.

d. U.

LEHRSATZ 24.

Fig. 74. 1. *Der Winkel BIE, den eine Tangente IB mit einer Sehne IE macht, welche die Tangente im Berührungspunkte durchschneidet, hat zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE der von beyden Linien eingeschlossen wird.*

[2. *Umgekehrt muss jede grade Linie IB, welche durch den Endpunkt einer Sehne IE gegen diese Sehne*

Sehne unter einem Winkel gezogen wird, den die Hälfte des von ihnen eingeschlossnen Bogens INE misst, den Kreis im Punkte I berühren.]

1. Zieht man nach dem Berührungspunkte I den Durchmesser DI, so ist erstens DIB ein rechter Winkel *, hat also als solcher zu seinem Maass die Hälfte eines Halbkreises *, also auch die Hälfte des Bogens DEI. Zweytens hat der Winkel DIE als ein Winkel am Umfang die Hälfte des Bogens DE zu seinem Maasse *. Folglich hat der Unterschied beyder Winkel DIB und DIE, d. h. der Winkel DIE, zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE, welchen die Tangente IB und die Sehne IE umspannen. — Auch der Nebenwinkel desselben AIE hat daher zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens IME, welcher jenen Bogen zum ganzen Kreise ergänzt *.

*12 f. 1.
*22. Z 5.
* 23.
*22. Z. 5

[2. Ist dagegen IB so gezogen, dass der Winkel EIB die Hälfte des von beyden eingeschlossnen Bogens IE zu seinem Maasse hat, so sey ID der Durchmesser der durch den Punkt I geht. Zieht man die Sehne ED, so umspannen die Winkel D und DIE zusammengenommen den Halbkreis IED, haben also als Winkel am Umfange einen Quadranten zu ihrem Maasse *, und sind daher zusammengenommen einem rechten Winkel gleich. Werden aber, nach der Voraussetzung, die Winkel EIB und D von demselben Bogen ID gemessen, so sind sie gleich, und also sind auch die Winkel BIE, DIE zusammengenommen einem rechten Winkel gleich. Folglich ist

* 23.

AB ein Perpendikel durch den Endpunkt des Durchmeſſers, alſo eine Tangente des Kreiſes im Punk-
* 12. te I *.]

[*Folgerung. Der Winkel BIE zwiſchen einer berührenden Linie und einer Sehne die durch den Berührungspunkt geht, iſt gleich den Winkeln am Umfang, welche mit ihnen denſelben Bogen IE umſpannen* folglich den Winkeln in dem Kreisabſchnitt, der mit der Tangente auf entgegengeſetzter Seite der Sehne liegt. Denn alle dieſe Winkel werden von demſelben Bogen gemeſſen. (Es gilt alſo auch hier von der Tangente, was von den Sehnen bewieſen iſt.) Umgekehrt muſs jede Linie IB, welche mit einer Sehne IE an ihrem Endpunkte einen Winkel macht, der den Winkeln im entgegengeſetzt liegenden Kreisabſchnitt IME gleich iſt, den Kreis im Punkte I berühren.]

Taf. III. F. 75. [Zuſatz I. *Eine grade Linie EG, welche durch den Punkt I geht, worin zwey Kreiſe ſich berühren, ſchneidet von beyden Kreiſen* **ähnliche Bogen** *und* **ähnliche Kreisabſchnitte** *ab.*

Denn da beyde Kreiſe im Berührungspunkt eine
*16.ſ.3. gemeinſchaftliche Tangente AB haben *, ſo bildet die grade Linie EG in beyden Kreiſen mit der Tangente einen gleichen Winkel. Folglich müſſen die Bogen IE, IG, deren Hälften dieſe Winkel unſerm Lehrſatz zu folge meſſen, gleich viel Grade enthalten, oder gleiches Verhältniſs zum ganzen Umfang haben, mit-
*IV.E.2. hin ähnlich ſeyn *, und daher auch ähnliche Kreisabſchnitte umſpannen. Berühren die beyden Kreiſe ſich *innerlich*, ſo iſt GI ein Theil der Sehne IE, und

die ähnlichen Kreisbogen liegen auf einerley Seite der Linie EGI. Berühren ſie ſich dagegen *äuſserlich*, ſo liegen GI, IE auf entgegengeſetzten Seiten des Berührungspunktes, und eben ſo die ähnlichen Kreisbogen zu entgegengeſetzten Seiten der durchſchneidenden Linie GE.

In *gleichen Kreiſen* welche ſich berühren, werden von jeder graden Linie durch den Berührungspunkt, *gleiche Stücke* abgeſchnitten *. * 7.

Zuſatz II. *Zieht man durch den Punkt I, worin zwey Kreiſe ſich berühren grade Linien, und durch die beyden Punkte, worin ſie einen jeden dieſer Kreiſe nochmals durchſchneiden, die Sehnen DE, FG; ſo ſind dieſe Sehnen parallel.* Denn da beyde Linien in dieſen Kreiſen, nach Zuſatz I. ähnliche Bogen IE, IG und ID, IF abſchneiden, ſo ſind die Winkel am Umfange, welche auf dieſen Bogen ſtehn, D und F, auch E und G gleich *, mithin die Sehnen DE, FG parallel *, und die Dreyecke IDE, IFG gleichwinklig. *23.Z.1. *1,25.A.

In *gleichen Kreiſen* decken ſich dieſe beyden Dreyecke *. In ihnen ſind alſo die Sehnen DE, FG überdem noch gleich. Zieht man daher, wenn ſich die Kreiſe äuſserlich berühren, EF, DG, ſo ſind auch dieſe Linien gleich, und DFG iſt ein Parallelogramm. In *ungleichen Kreiſen* iſt, wenn IG kleiner als IE iſt, auch FG kleiner als DE, und dann durchſchneiden ſich EF und DG. * Z. 1.

Zuſatz III. *Haben umgekehrt zwey Kreiſe einen Punkt I gemein, und zwey grade Linien EG, DF durch-*

schneiden beyde im Punkte I so, dass die Sehnen DE, FG durch die Durchschnittspunkte parallel sind; so berühren sich beyde Kreise im Punkte I. Denn man ziehe durch I am Kreise IDE die Tangente AB, so ist der Winkel DIA, dem
* 24. f. Winkel am Umfange E *, mithin auch, wegen des Parallelismus der Sehnen DE und FG, dem Winkel G
*I.25.A. gleich *. Ist daher, wie in Figur 75, IF ein Theil der Linie ID, so ist der Winkel FGI dem Winkel G gleich, d. h. dem Winkel in dem Kreisabschnitte, welcher mit IA auf entgegengesetzter Seite der Sehne IF
* 24. f. liegt, und daher berührt IA den Kreis IFG *. — Liegt IF in der Verlängerung von ID, wie in Fig. 75 *, so sind FIB, DIA Scheitelwinkel, folglich ist auch FIB gleich G, und also auch in diesem Fall IB eine Tangente am Kreise IGF. — In beyden Fällen haben also die Kreise eine gemeinschaftliche Tangente AIB, daher
*16. f.4. sie sich in beyden Fällen im Punkte I berühren *.

Taf. III. F. 76. Zusatz IV. Wenn zwey *gleiche Kreise* sich im Punkte I durchschneiden, so ist ihr *krummliniger Winkel* MIH d. h. der Winkel ihrer Tangenten im Berührungs-
*12 .Z. punkte I *, dem Winkel gleich, welchen die Tangente IB, mit einer ihr gleichen Sehne ID des zweyten Kreises macht. Denn das Maass des Winkels der beyden Tangenten IA, IB ist, weil IB zugleich eine Sehne des ersten Kreises ist, der halbe Bogen IMB. Das Maass des Winkels BID ist eben so der halbe Bogen IHD. Die Bogen IMB, IHD sind aber als Bogen gleicher Kreise, die zu gleichen Sehnen IB, ID gehören,
* 7. gleich *, also auch die Winkel DIB, BIA.]

Anmerkung. Den ersten dieser Zusätze entlehne ich aus *Pappus* B. 4. S. 9, wo er mit unnöthiger Weitläufigkeit bewiesen wird; die beyden folgenden aus *Pappus* B. 7., wo sie das 7te 9te und 11te Lemma aus *Apollonius* Werk von den Berührungen ausmachen, und den letzten Zusatz aus *Krafft* und Vietas Opp. p. 382. d. U.

[LEHRSATZ 25.]

1. *Der Winkel AOD, unter welchem zwey Sehnen AB, DE eines Kreises sich durchschneiden, hat zu seinem Maass die halbe Summe der Bogen, welche seine Schenkel umspannen* $\frac{AD + BE}{2}$. Fig. 79.

2. *Der Winkel, unter welchem zwey verlängerte Sehnen AO', BO', oder eine verlängerte Sehne AO' und eine Tangente GO' sich durchschneiden, haben zu ihrem Maasse den halben Unterschied der Bogen, welche ihre Schenkel umspannen* $\frac{AD' - BE'}{2}$ *oder* $\frac{AG - GB}{2}$.

3. *Der Winkel FO'G unter welchem zwey Tangenten eines Kreises FO' GO' sich durchschneiden, hat zu seinem Maasse die Ergänzung des Bogens, welchen beyde Tangenten umspannen, zum Halbkreise, oder Halbkr. — FG.*

1. Durchschneiden sich die beyden Sehnen AB, DE selbst in einen Punkte O, so entsteht, wenn man BD zieht, ein Dreyeck OBD, worin der Winkel am Durchschnitt AOD der äussere Winkel, mithin AOD = B + D ist *. Dieser Winkel hat also zu seinem * I. 30
Maasse die Summe des Maasses der Winkel B und D, folglich die Bogen $\frac{AD + BE}{2}$ *. * 23.