Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 25.] 1. Der Winkel AOD, unter welchem zwey Sehnen AB, DE eines Kreises sich durchschneiden, hat zu seinem Maass die halbe Summe der Bogen, welche seine Schenkel umspannen (AD+BE) : 2.
2. ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

ſen wird; die beyden folgenden aus *Pappus* B. 7., wo ſie das 7te 9te und 11te Lemma aus *Apollonius* Werk von den Berührungen ausmachen, und den letzten Zuſatz aus *Krafft* und Vietas Opp. p. 382. d. U.

[LEHRSATZ 25.]

1. *Der Winkel AOD, unter welchem zwey Sehnen AB, DE eines Kreiſes ſich durchſchneiden, hat zu ſeinem Maaſs die halbe Summe der Bogen, welche ſeine Schenkel umſpannen* $\frac{AD + BE}{2}$. Fig. 79.

2. *Der Winkel, unter welchem zwey verlängerte Sehnen AO′, BO′, oder eine verlängerte Sehne AO′ und eine Tangente GO′ ſich durchſchneiden, haben zu ihrem Maaſse den halben Unterſchied der Bogen, welche ihre Schenkel umſpannen* $\frac{AD' - BE'}{2}$ *oder* $\frac{AG - GB}{2}$.

3. *Der Winkel FO′G unter welchem zwey Tangenten eines Kreiſes FO′ GO′ ſich durchſchneiden, hat zu ſeinem Maaſse die Ergänzung des Bogens, welchen beyde Tangenten umſpannen, zum Halbkreiſe, oder Halbkr. — FG.*

1. Durchſchneiden ſich die beyden Sehnen AB, DE ſelbſt in einen Punkte O, ſo entſteht, wenn man BD zieht, ein Dreyeck OBD, worin der Winkel am Durchſchnitt AOD der äuſsere Winkel, mithin AOD = B + D iſt *. Dieſer Winkel hat alſo zu ſeinem Maaſse die Summe des Maaſses der Winkel B und D, folglich die Bogen $\frac{AD + BE}{2}$ *.

* I. 30.

* 23.

2. Durchschneiden sich dagegen die Verlängerungen zweyer Sehnen, und man zieht BD, so entsteht Dreyeck D'O'B, worin der Winkel am Durchschnittspunkt O' ein innerer, und mithin D'O'B = D'BA — D' ist. Dieser Winkel hat also zu seinem Maasse den halben Unterschied der Bogen AD', BE' oder $\frac{AD' - BE'}{2}$.

Dasselbe ist der Fall wenn die Tangente GO' und eine Sehne AB sich in einem andern Punkte als im Berührungspunkte durchschneiden. Denn auch dann entsteht, wenn man BG zieht, ein Dreyeck BGO', worin der Winkel am Durchschnitt ein innerer, und O' = ABG — G ist, folglich zu seinem Maasse die Bogen $\frac{AG - GB}{2}$ hat.

3. Durchschneiden sich endlich zwey Tangenten GO', FO', und man zieht nach den Berührungspunkten die Halbmesser CG, CF, so entsteht ein Viereck CFO'G, welches zwey rechte Winkel F, G hat, und worin der dritte Winkel C als ein Winkel am Mittelpunkte durch den Bogen FG, welchen beyde Tangenten umspannen, gemessen wird. Der vierte Winkel FO'G hat folglich zu seinem Maass den Halbkreis weniger diesen Bogen, den die Tangenten, als Schen-
* I. 32. kel, umspannen *.

Folgerung 1. *Unter Winkeln, welche auf denselben Kreisbogen nach der hohlen Seite des Bogens zu stehen, ist der Winkel, dessen Spitze im Umfange liegt, grösser als jeder dessen Spitze ausserhalb der Kreislinie fällt, dagegen kleiner als jeder Winkel dessen Spitze innerhalb der Kreislinie liegt.*

Folgerung 2. *Grade Linien welche von den Endpunkten gleicher Bogen eines Kreises AB, EF etc. durch die Endpunkte eines andern Bogens CD gezogen sind, und entweder alle im Kreise oder alle ausser dem Kreise zusammentreffen, durchschneiden sich unter gleichen Winkeln O, O etc.* Denn sie haben alle zu ihrem Maasse im ersten Fall die Summe, im letztern den Unterschied gleicher Bogen, AB, EF etc. und des Bogens CD. T. III. F. 104.

Folgerung 3. *Der Winkel O unter welchem zwey Tangenten sich durchschneiden, ist das Doppelte des Winkels GKH, welchen die Linie zwischen den Berührungspunkten mit dem Durchmesser durch den Berührungspunkt K bildet.* Denn GKH hat als Winkel am Umfange zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens HG, welcher (nach 3) den Winkel O misst. T. III. F. 78.**

Zusatz I. *Zieht man durch den zweyten Endpunkt dieses Durchmessers und durch den zweyten Berührungspunkt eine grade Linie HG, so durchschneidet diese die Tangente KO in ihrer Verlängerung so dass die Winkel I uud GKH, und die Linien OI, OG, OK, gleich sind.* Denn KGH ist als Winkel im Halbkreise ein rechter *; also steht GI auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks KGO in deren Endpunkt senkrecht, und durchschneidet daher den gegenüberliegenden Schenkel im Punkt I, so dass OI = OG = OK und I = G ist *. *23 Z. 2. *23. Z. 2. f. 1.

Zusatz II. Beschreibt man um ein gegebenes Dreyeck ABC einen Kreis, ferner um eine der Seiten z. B. um BC mit gleichem Halbmesser einen zweyten Kreis, und fällt dann von dem gegenüberstehenden Winkelpunkte A ein Perpendikel auf BC, welches die Fig. 78. u. 78*.

Kreise und diese Linie in den Punkten D, E, F durchschneidet; *so stehn die graden Linien welche man aus den beyden andern Winkelpunkten B, C durch den Punkt D zieht, ebenfalls auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks senkrecht.*

Denn weil die Kreise gleich sind, so gehören *erstens* zu der gemeinschaftlichen Sehne gleiche Bogen
* 7. BDC, BFC *, und diese halbirt beyde die grade Linie durch die Mittelpunkte der Kreise, welche zugleich
* 20. auf BC senkrecht steht *. Mit dieser Linie läuft das
* I. 21. Perpendikel DF parallel *, daher die Bogen zwischen
*13. Z.2. beyden *, und also auch die Bogen BD, BF, und DC, CF gleich sind. *Zweytens* ist der Winkel BCH, dessen Spitze im Durchschnittspunkte beyder Kreise liegt, in beyden ein Winkel am Umfange, muss also in bey-
*23. Z.1. den gleiche Bogen BD, BH umspannen *, so dass also Bog. BD = Bog. BF = Bog. BH.

Nun hat der rechte Winkel bey E zu seinem Maasse die Hälfte der Bogen AC + BF, und der Win-
* (1) kel bey G die Hälfte der Bogen AC + LH *. (in F. 78* VC + BD = AC + BH). Beyde Winkel sind also gleich, da die Bogen BF, BH und mithin die Bogen, welche beyde Winkel messen gleich sind. Also ist G so gut wie E, und aus denselben Gründen auch I ein rechter Winkel.

Da aus einem Punkte auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist, so *durchschneiden sich folglich die Perpendikel, welche aus den Mittelpunkten eines Dreyecks ABC auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, allemal in Einem Punkte D.* Und zwar steht dieser Punkt D mit jedem der Punkte F, H, K, (worin die Perpendikel, die aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, einen Kreis der um das Dreyeck beschrieben ist durchschneiden) von den Seiten des Dreyecks gleich weit ab, so daſs DE = EF, DG = GH und DI = IK ist; (wie daraus erhellt, weil die Dreyecke DBF, DBH, DCK gleichschenklig* und BE, BG, CI Perpendikel auf ihre Grundlinien sind *. Eine artige Eigenschaft des Dreyecks, welche man mit der in Lehrsatz 10 Folgerung 2 vergleiche. * 7. *17. f. 2.

Anmerkung. Auf den ersten Theil dieses Lehrsatzes gründet sich eine Methode *Scheibeninstrumente oder ganze Kreise zu prüfen*, ob sie auch nicht an dem *Fehler der Excentricität* leiden*, und, gesetzt dies wäre der Fall, doch mit solchen fehlerhaften Instrumenten richtig zu messen. Dreht sich nemlich die Alhidade oder das Fernrohr nicht um den Mittelpunkt der Theilung, so sind die Winkel, welche abgeschnitten werden, keine Winkel am Mittelpunkte, sondern excentrische, wie O in Fig. 79. Folglich werden in solchen Instrumenten von den entgegengesetzt liegenden Endpunkten der Alhidade ungleiche Bogen abgeschnitten; und so oft das der Fall ist, leidet das Instrument am Fehler der Excentricität. Und dann werden, dem ersten Theil dieses Lehrsatzes zu folge, die Winkel durch die halbe Summe der beyden abgeschnittenen Bogen, die einander gegenüber liegen, gemessen. *22. A2.

Die beyden letzten Folgerungen und die beyden Zusätze entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* Satz 7, 50, 51 und 53 de Circulo, wo sie aber aus andern Gründen, und nicht so kurz bewiesen werden. d. U.

[LEHRSATZ 26.]

Die Spitzen aller gleichen Winkel, welche über derselbe graden Linie BC stehn, liegen insgesammt in Fig. 70.