Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 26.] Die Spitzen aller gleichen Winkel, welche über derselbe graden Linie BC stehn, liegen insgesammt in einer Kreislinie, die durch die Endpunkte dieser graden Linie B, C geht.

(worin die Perpendikel, die aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, einen Kreis der um das Dreyeck beschrieben ist durchschneiden) von den Seiten des Dreyecks gleich weit ab, so dafs DE = EF, DG = GH und DI = IK ist; (wie daraus erhellt, weil die Dreyecke DBF, DBH, DCK gleichschenklig* und BE, BG, CI Perpendikel auf ihre Grundlinien sind *. Eine artige Eigenschaft des Dreyecks, welche man mit der in Lehrsatz 10 Folgerung 2 vergleiche. * 7. *17. f. 2.

Anmerkung. Auf den ersten Theil dieses Lehrsatzes gründet sich eine Methode *Scheibeninstrumente oder ganze Kreise zu prüfen*, ob sie auch nicht an dem *Fehler der Excentricität* leiden *, und, gesetzt dies wäre der Fall, doch mit solchen fehlerhaften Instrumenten richtig zu messen. Dreht sich nemlich die Alhidade oder das Fernrohr nicht um den Mittelpunkt der Theilung, so sind die Winkel, welche abgeschnitten werden, keine Winkel am Mittelpunkte, sondern excentrische, wie O in Fig. 79. Folglich werden in solchen Instrumenten von den entgegengesetzt liegenden Endpunkten der Alhidade ungleiche Bogen abgeschnitten; und so oft das der Fall ist, leidet das Instrument am Fehler der Excentricität. Und dann werden, dem ersten Theil dieses Lehrsatzes zu folge, die Winkel durch die halbe Summe der beyden abgeschnittenen Bogen, die einander gegenüber liegen, gemessen. *22. A2.

Die beyden letzten Folgerungen und die beyden Zusätze entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* Satz 7, 50, 51 und 53 de Circulo, wo sie aber aus andern Gründen, und nicht so kurz bewiesen werden. d. U.

[LEHRSATZ 26.]

Die Spitzen aller gleichen Winkel, welche über derselbe graden Linie BC stehn, liegen insgesammt in Fig. 70.

einer Kreislinie, die durch die Endpunkte dieser gra-
den Linie B, C geht.

Man ziehe durch B, C und die Spitze A eines
* 10. dieser Winkel eine Kreislinie *. Gesetzt nun, es fielen
nicht alle Spitzen der andern Winkel in diese Kreisli-
nie, sondern wie α oder β, so könnten der Winkel
* Folg. α, β nach dem vorigen Lehrsatz * nicht dem Winkel
A gleich seyn, sondern β wäre grösser, α kleiner als
A, gegen die Voraussetzung. Folglich sind alle sol-
che Winkel in demselben Kreisabschnitt über der ge-
* E. 7. gebenen Linie BC befindlich *, welchen zu bilden
Aufg. 16 lehrt.

Folgerung 1. *Ueber derselben graden Linie sind al-*
so auf einerley Seite nicht zwey verschiedene Kreisabschnitte
möglich, welche denselben Winkel fassten, folglich nicht
*IV.E.2. zwey verschiedene *ähnliche Kreisabschnitte* *; und ähnli-
che Abschnitte über gleichen Linien decken sich und
sind gleich (Euklid III. 23. 24.)

Folgerung 2. *Der Bogen des Kreisabschnitts über*
BC, welcher den Winkel A fasst, ist *der geometrische Ort*
für die Spitze aller Dreyecke, die über derselben Grund-
linie BC stehn, und in welchen dieser Grundlinie
*I.E.21. ein gleicher Winkel A gegenübersteht *. Oder
er ist *der geometrische Ort* für die Aufgabe, *aus zwey*
gegebenen Punkten B, C zwey grade Linien zu ziehn, die
sich unter einem gegebnen Winkel A durchschneiden. Jeder
Punkt im Kreisbogen BAC thut dieser Aufgabe genü-
ge, und keiner der Punkte die ausserhalb desselben
* 25. f. liegen *.

Anmerkung. Diese lezte Folgerung ist im ersten Buch
von *Apollonius* ebnen Oertern der zweyte Satz, und wird dort

nach der deutschen Uebersetzung folgendermaſsen ausgedrückt: „Wenn zwey grade Linien, die einen Winkel von gegebner Gröſse einschlieſsen, durch zwey gegebne Punkte gehn, so liegt der Durchschnittspunkt dieser Linien auf einem der Lage nach gegebnen Kreisumfang, oder auch: so *berührt* ihr Durchschnittspunkt die hohle Seite eines der Lage nach gegebnen Kreises"; in welchem letztren Ausdruck der Begriff des Berührens unrichtig gebraucht wird. Uebrigens fehlt auch dieser wichtige Lehrsatz sammt den folgenden Zusätzen bey Le Gendre.

Zusatz I. *Wenn ein rechtwinkliges Dreyeck ABD mit einem andern rechtwinkligen EBD eine gleiche Hypotenuse hat, die eine Kathete AB aber kleiner als die Kathete EB des andern Dreyecks ist, so ist dagegen die zweyte Kathete AD des erstern gröſser als die Kathete ED des zweyten Dreyecks; und umgekehrt.* Denn legt man die Hypotenusen aufeinander, so fallen die Spitzen, unserm Lehrsatz zu folge, in einen Halbkreis *, und die Katheten jedes dieser rechtwinkligen Dreyecke werden Sehnen, deren Bogen sich zum Halbkreise ergänzen. Nun gehört zur kleinern Sehne der kleinere Bogen *, mithin die gröſsere Ergänzung zum Halbkreise, und also auch eine gröſsere Sehne der Ergänzung, d. i. eine gröſsere zweyte Kathete; und ist AB < EB so ist nothwendig AD > ED.

Fig. 71.
* 23 Z. 1.
* 8.

Zusatz II. Dasselbe gilt aus den nemlichen Gründen, *für alle Dreyecke, welche gleiche Grundlinie und gleiche Winkel an der Spitze haben*, und man kann daher diesen Satz allgemein so ausdrücken: *sind in zwey Dreyecken ABC, DBC, eine Seite BC und der ihr gegenüberstehende Winkel A, D in beyden gleich, hingegen ein Schenkel ungleich AB < DB, so ist der zweyte Schenkel*

Fig. 70.

in dem Dreyecke grösser, in welchem der erstere Schenkel der kleinere war, $AC > DC$; ein Satz, dem in der Anmerkung zu Lehrsatz 10 des ersten Buchs analog, statt dessen man sich gewöhnlich mit dem vorigen Satz, als Folgerung aus dem Pythagoreischen Lehrsatz begnügt. Auch der folgende intressante Satz fehlt in unsern Lehrbegriffen, obgleich er schon in einem Werke eines alten Griechen *Serenus* de sectione cylindri, Satz 46 und 47, vorkömmt.

T. III. Fig. 81. Zusatz III. *Ist ADEB ein beliebiger Kreisabschnitt, und D ein Punkt in der Mitte des Kreisbogens, so ist die Summe der beyden Schenkel jedes Winkels im Kreisabschnitt, z. B. des Winkels AEB, gleich der Sehne AG, welche durch Verlängerung des einen seiner Schenkel in dem Kreise entsteht, der um D als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser DA, beschrieben ist.* Denn man verlängere AD bis F, und ziehe FB, GB, so entstehn dadurch zwey Dreyecke FDB, GEB, wovon das erstere gleichschenk-

*E. 2. α lig ist *. Nun sind erstens die Winkel ADB, AEB

*23. Z. 1. als Winkel in demselben Kreisabschnitt *, folglich auch ihre Nebenwinkel FDB, GEB gleich. Zweytens sind die Winkel F und G gleich, als Winkel am Umfange des grössern Kreises, welche beyde über dem Bogen AB stehn. Mithin sind in den Dreyecken zwey Winkel des einen, denen des andern, also auch die

*I. 31. f. 1 dritten Winkel DBF, EBG untereinander gleich *. Nun aber sind in dem gleichschenkligen Dreyeck FDB die Winkel bey F und B gleich; folglich sind auch im Dreyeck GEB die Winkel bey G und B, mithin auch die Schenkel EG, EB gleich. Es ist also $AE + EB = AE + EG = AG$.

Folgerung 1. Unter allen Sehnen des gröſsern Kreiſes, iſt die, welche durch den Mittelpunkt D geht, d.h. der Durchmeſſer, die gröſste *. Die übrigen werden immer kleiner, je weiter ſie vom Mittelpunkte abſtehn, oder je gröſser der Bogen FG, (mithin auch DE oder der Winkel DAE) wird *. Folglich iſt die Summe der beyden Schenkel eines Winkels in einem Kreisabſchnitt, bey *dem* Winkel, deſſen Spitze in D liegt, die gröſte, und wird immer kleiner, je weiter die Spitze vom Punkte D ab, und je näher ſie bey der Sehne AB liegt.

* 5. * 8.

Unter allen Dreyecken über derſelben Grundlinie und mit demſelben Winkel an der Spitze, iſt folglich im gleichſchenkligen die Summe der beyden andern Seiten am gröſsten. Auch iſt das gleichſchenklige Dreyeck auf einerley Seite der Linie AB nur auf eine Art, jedes der andern doppelt vorhanden.

Folgerung 2. Aus denſelben Gründen, woraus wir bewieſen haben, daſs AG = AE + EB iſt, folgt daſs auch BH = BE + EA, folglich AG = BH und AE = EH iſt. Mithin umſpannen zwey ſolche verlängerte Schenkel einen Bogen und eine Sehne GH, welche dem Bogen und der Sehne AB gleich ſind; je zwey folglich gleiche Bogen und gleiche Sehnen.

LEHRSATZ 27.

1. *In jedem Viereck, welches in einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, ſind die gegenüberſtehenden Winkel zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.* Fig. 80.