Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 30.] Trägt man auf die Verlängerung einer Sehne AB, den Halbmesser des Kreises von B nach O auf, so schneiden die Sehne und der Durchmesser des Kreises, der verlängert durch O geht, von der ...

kel, der dem Winkel des Abschnitts gleich ist, durchschneiden. Denn alle diese Linien laufen mit der Sehne DE parallel *. Nur durchschneiden sie weiterhin nicht mehr den Kreis.

*I. 25. f. 2

[LEHRSATZ 30.]

T. III. Fig. 84.

Trägt man auf die Verlängerung einer Sehne AB, den Halbmesser des Kreises von B nach O auf, so schneiden die Sehne und der Durchmesser des Kreises, der verlängert durch O geht, von der Kreislinie zwey Bogen AD, BE' ab, wovon jener das Dreyfache dieses ist, oder Bog. AD = 3. Bog. BE'.

Denn zieht man die Halbmesser CB, CA, so sind die Dreyecke OBC und BCA gleichschenklig, folglich sind die Winkel O, OCB, so auch A, B gleich *. Also sind als äussere Winkel B = 2 O und DCA = B + O = 3 O. Mithin ist auch DCA = 3 E'CB, und also Bog. AD = 3. Bog. BE' *.

* I. 12.

* 22.

Zusatz I. Verlängert man die Schenkel des Winkels O, und schneidet auf dieselbe Art auf beyden Schenkeln mit dem Halbmesser OB abwechselnd Punkte E', F, G etc. ab, und zieht die Linien AE, EF, FG; so bilden je zwey derselben, die in demselben Punkte zusammenstossen, ein gleichschenkliges Dreyeck, worin die Winkel an der Grundlinie gleich sind, DCA = DEA, EAF = EFA, FEG = FGE etc. Mithin sind, als äussere Winkel, EAF = DEA + O = DCA + O = 4 O; FEG = EFA + O = EAF + O = 5 O etc., so dass *die gleichen Linien, welche zwischen* *den Schenkeln des Winkels O eingeschrieben sind, die Schenkel abwechselnd unter Winkeln durchschneiden, welche der Ordnung nach alle ganze Vielfache des Winkels O darstellen;* ein elegantes Theorem, worauf *Newton* die Formel für die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel gründet.

Anmerkung 1. Der Lehrsatz rührt von *Archimed* her, und ist sein 8tes Lemma von der Kugel und dem Cylinder; der ihn erweiternde Zusatz von *Newton*. Mittelst desselben könnte man *einen jeden gegebnen Winkel oder Kreisbogen in drey gleiche Theile theilen*, wäre es nur möglich eine Sehne und einen Durchmesser so zu ziehn, daſs sie der Bedingung des Lehrsatzes genüge thun, d. h. *daſs sie sich verlängert so durchschneiden, daſs die Verlängerung der Sehne dem Halbmesser gleich ist.* Allein bloſs durch Hülfe der graden Linie und des Kreises läſst dieses sich *nicht wissenschaftlich*, sondern nur mechanisch, durch Probiren oder durch Instrumente *bewerkstelligen* *. Wie man auch die Sache angreift, so wird man durch jenes Problem wieder auf das zurückgeworfen, einen Winkel oder Bogen in drey gleiche Theile zu theilen. *22. Z. 3. A. 1.

Auf jene für die Elementargeometrie gleich unauflösliche Aufgabe, führen *Vieta* in seinem *Supplementum Geometriae* Satz 9, und *Newton* in seiner *Arithmetica Universali* die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück, und ein Jesuit *Thomas Ceva* gründet darauf folgendes *Instrument*, welches dieses bewerkstelligen soll. Zwey Lineale, welche sich um den Punkt O drehen, sind durch vier andre Lineale AC, CD, CE, CB, welche sich insgesammt um ihre beyden Endpunkte drehen, und mit den Stücken OE, OB gleiche Länge haben, verbunden. Man öfnet das Instrument so daſs ACD dem gegebnen Winkel gleich ist, so wird O der dritte Theil dieses Winkels seyn. (*Acta Erudit. A. 1695. p. 291*). Verbindet man mit diesen noch mehrere gleiche Lineale auf dieselbe Art, so erhält man ein Instrument, womit sich auch der vierte, der fünfte Theil Fig. 84.

u. s. f. eines Winkels, Newtons Satz zu folge, finden läſst, dergleichen der *Marquis von Hospital* in seinem *Tractatus de sectionibus concis* I. *10. pr. 6.* beschreibt. Diese Instrumente sind aber mehr ein Spielwerk als von wahrem Nutzen, indem man einen bestimmten Theil eines Winkels oder Bogens mit viel gröſserer Genauigkeit mittelst der Sehnen, entweder durch Probiren, oder aus den Sehnentafeln findet.

Zusatz II. *Wenn durch den einen Endpunkt eines gegebnen Kreisbogens AB ein Durchmesser BI, und auf diesen senkrecht der Halbmesser CD gezogen ist, und dieser schneidet von einer Sehne AF; die durch den andern Endpunkt des Bogens geht, ein Stück EF dem Halbmesser des*
Fig. 85 *Kreises gleich ab; so ist der Bogen FI der dritte Theil des gegebnen Bogens AB, oder Bog. AB = 3. Bog. FI.*

Man ziehe den Durchmesser GH parallel mit der
* 14. Sehne AF, so sind erstens die Bogen AG, FH gleich*; und *zweytens* sind auch die Stücke dieser Parallelen CH, EF gleich, indem EF nach der Voraussetzung dem Halbmesser gleich seyn soll. Zieht man daher HF, so
* I. 36. ist CEFH ein Parallelogramm *, und die Sehne HF läuft mit CE parallel, wird folglich, da CI auf CD senkrecht steht, gleichfalls vom Halbmesser CI senk-
*I.25.f.1 recht durchschnitten *, und daher der Bogen HF im
* 9. Punkte I halbirt *. Nun aber sind die Bogen HI, BG als Maaſs gleicher Winkel gleich, und der Bogen GA = HF = 2 HI. Folglich ist BG = $\frac{1}{3}$. BA und also auch Bog. AB = 3 Bog. FI. Halbirt man daher noch
*Aufg.5 den Bogen GA im Punkte K *, so ist der Bogen AB, und mithin auch der Winkel der ihn umspannt, in drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung 2. Alſo *auch auf dieſe Art lieſse ſich ein gegebner Bogen AB oder ein gegebner Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen*, wäre es nur möglich auf eine wiſſenſchaftliche Art die Sehne AF ſo zu ziehn, daſs das abgeſchnittne Stück derſelben EF dem Halbmeſſer gleich ſey; ein Problem worauf ſchon *Campanus von Novara*, der erſte Commentator Euklids zur Zeit der Wiederherſtellung der Wiſſenſchaften, in einer Scholie zum vierten Buch Euklids, die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurückführt. Allein auch dieſe Aufgabe wirft uns, wir mögen ſie in der Elementargeometrie angreifen, wie wir wollen, wieder auf die Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück. Denn geſetzt das Geſuchte ſey bewerkſtelligt, und vom gegebnen Punkte A aus, ſey eine Sehne AF durch einen gegebnen Halbmeſſer CD ſo gezogen, daſs EF dem Halbmeſſer gleich werde, ſo ſind, wenn man CA und CF zieht, die Dreyecke ACF und CFE gleichſchenklig, mithin $A = F$, und $\angle FCE = FEC = R - \frac{1}{2} F$ * und zugleich $FEC = A$ * I. 31.
$+ ACD$ *. Folglich iſt $R - \frac{1}{2} A = A + ACD$ oder $R -$ * I. 30.
ACD d. h. $ACB = \frac{3}{2} A$, oder $A = \frac{2}{3} ACB$. Um alſo AF gegen den Halbmeſſer CA unter dem gehörigen Winkel A zu ziehn, bey welchem AF von CD auf die verlangte Art geſchnitten wird, müſſen wir den Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen können.

Anmerkung 3. *Der Grund warum die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie überſteigt*, liegt darin, weil mittelſt des Kreiſes und der graden Linie, die ſich nur in zwey Punkten durchſchneiden, keine Frage, in der es auf drey oder mehrere Durchſchnittspunkte ankömmt, beantwortet werden kann, und daſs es bey der allgemeinen Aufgabe *irgend einen Kreisbogen*, oder *irgend einen Winkel* in drey gleiche Theile zu theilen, allemal auf drey oder mehrere Durchſchnittspunkte ankömmt. *Warum*, das finde ich bey andern Geometern nur angedeutet, und noch nicht ſo ganz befriedigend ins Klare geſetzt, wie dieſes vielleicht durch folgende Betrachtungen geſchieht.

Geſetzt wir *halbiren* den Bogen HF und den Winkel HCF durch die grade Linie CI, ſo ſcheint es zwar auf dem erſten Anblick als werde nur der Bogen FH und der Winkel HCF durch jene Linie und ihren Durchſchnitt I mit dem Kreiſe halbirt. Allein was den *Kreisbogen* betrifft, ſo liegt zwiſchen den beyden Punkten H und F, als Endpunkten, nicht bloſs der kleine Bogen HF, ſondern es iſt zwiſchen ihnen auch ein Bogen enthalten, der aus der ganzen Kreislinie P und dem Bogen HF zuſammengeſetzt iſt, ferner der Bogen $2P + HF$, $3P + HF$ u. ſ. f. Indem wir alſo die Hälfte des Bogens ſuchen, der ſich in den Punkten H und F endigt, und beym wiſſenſchaftlichen Verfahren von dem, was uns gegeben iſt, ausgehn, d. h. davon, daſs H und F Endpunkte des Bogens ſind, fragen wir nach ſehr viel mehr, als es auf dem erſten Anblick ſcheint, und als der Frager ſich mehrentheils ſelbſt bewuſt iſt; nemlich nach der Hälfte aller jener Bogen, die ſich in H und F endigen, d. h. HF, $P + HF$, $2P + HF$, $3P + HF$ etc. Dieſe Hälften ſind $\frac{1}{2} HF$, $\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} HF$, $P + \frac{1}{2} HF$, $\frac{3}{2} P + \frac{1}{2} HF$ etc., oder da $\frac{1}{2} HF = HI = GB$ iſt, HI, $\frac{1}{2} P + GB$, $P + HI$, $\frac{3}{2} P + GB$ etc. Alle dieſe halben Bogen liegen zwiſchen den Punkten H, I und H, B; zwiſchen jenen Punkten der erſte, dritte, fünfte, etc., zwiſchen dieſen der zweyte, vierte etc. Daher ſind die beyden Punkte I und B *die halbirenden Punkte, welche jene ganze Reihe von Bogen insgeſammt in zwey gleiche Theile theilen; und beyde Punkte finden ſich zugleich*, auch wenn wir nur nach dem einen I fragen wollten, als Durchſchnitt der halbirenden graden Linie CI mit der Kreislinie. Uns ſelbſt unbewuſt erhalten wir alſo hier eine vollſtändige Antwort, welche in den zuſammengeſetztern Fällen die Mathematiker der vorigen Iahrhunderte nicht wenig befremdet und überraſcht hat.

Eben das iſt bey der *Theilung eines unbeſtimmten Bogens HF in mehrere gleiche Theile* der Fall; d. h. bey der Theilung eines Bogens, den wir blos dadurch denken, daſs er zwiſchen den Punkten H und F liegt, und nicht etwa als einen beſtimmten

Theil des Umfangs. Denn dann theilen wir durch ein wissenschaftliches Verfahren nie den kleinen Bogen HF allein, sondern immer zugleich alle Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen. Da wir davon ausgehn müssen, dass der zu theilende Bogen zwischen den Punkten H und F liegt, so passt die Schlussfolge, vermittelst der wir ein solches wissenschaftliches Verfahren begründen, immer zugleich auf alle Bogen, die sich in diesen Punkten endigen, muss also immer eine Zahl von theilenden Punkten geben, durch welche die Theile aller der Bogen, die sich in den Punkten H und F endigen, *zugleich* bestimmt werden. Dass diese stets mit der Anzahl der gesuchten Theile übereinstimmt, nimmt man leicht wahr. So finden wir bey der wissenschaftlichen Halbirung eines unbestimmten Bogens zwey, und bey der Trisection drey verschiedene Punkte, zwischen welchen die Drittel jener ganzen Reihe von Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen, enthalten sind.

Nun aber finden drey, und noch viel weniger mehrere Durchschnittspunkte zwischen zwey Kreisen oder zwischen einem Kreise und einer graden Linie nicht statt. Deshalb übersteigt die Theilung unbestimmter Kreisbogen in drey, fünf und mehrere solche gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie, und sie läſst sich geometrisch nur durch Hülfe anderer krummer Linien bewerkstelligen. So zum Beyspiel werden wir mittelst der Kegelschnitte in den folgenden Büchern einen Bogen in drey gleiche Theile theilen.

Was die *Winkel* betrifft, so hat es mit ihnen völlig dieselbe Bewandniss. So gut wir erhabne oder hineingehende Winkel, welche grösser als zwey rechte sind annehmen mussten *, können wir uns auch Winkel denken, die grösser als vier rechte, grösser als acht rechte, und so ferner sind. Denn aber liegen zwischen zwey Schenkeln HC, CF eine ganze Reihe von Winkeln, HCF, 4 R + HCF, 8 R + HCF etc, und diese werden insgesammt durch wissenschaftliche Theilung zugleich getheilt, daher von der Theilung der unbestimmten Winkel dasselbe gilt, was wir hier von der Theilung der Kreisbogen bemerkt haben.

Ich rede hierbey mit Fleifs von der Theilung *unbeſtimmter Bogen und Winkel*, d. h. ſolcher Bogen die wir in Abſicht ihres Verhältniſſes zum ganzen Umfange, oder ſolcher Winkel die wir in ihrem Verhältniſs zu vier rechten ganz unbeſtimmt, und nur durch das Merkmal denken, das H und F ihre Endpunkte ſeyn ſollen. Denn nur von dieſen gelten unſere Gründe; nicht von einzelnen Bogen oder Winkeln, die wir als beſtimmte Theile der Kreislinie oder des rechten Winkels, alſo durch ein anderes Merkmal denken. Bey dieſen kann es allerdings Methoden geben, ſie in drey, oder fünf gleiche Theile etc. zu theilen, die aus ihrem Verhältniſs zum rechten Winkel oder zum Umfang abgeleitet werden, dergleichen wir beym rechten Winkel ſchon haben kennen gelernt *, der ſich ohne Schwierigkeit geometriſch in drey gleiche Theile theilen läſst.

* I. 31. f. 4

der Ueberſetzer.