UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Aufgabe 18. Einen Kreis, 1) in ein gegebnes Dreyeck ABC einzuschreiben; 2) um ein gegebnes Dreyeck zu umschreiben.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Visual Library

das umschriebene mit dem gegebenen Dreyeck gleichwinklig.

AUFGABE 18.

Einen Kreis, 1) in ein gegebnes Dreyeck ABC einzuschreiben; 2) um ein gegebnes Dreyeck zu umschreiben.

F. 108. 1. Theile zwey der Winkel des Dreyecks, A, B, durch die graden Linien AO, BO, welche sich in einem Punkte O schneiden müssen *, in zwey gleiche
* I. 24. Theile; fälle vom Punkte O auf eine der Seiten des Dreyecks ein Perpendikel OD, und beschreibe mit OD als Halbmesser, um O als Mittelpunk, einen Kreis; so ist dieser der gesuchte, in dem Dreyeck ABC eingeschriebene Kreis.

Der so gefundene Punkt O steht nemlich von allen Seiten des gegebnen Dreyecks gleich weit ab, indem die Perpendikel auf die Seiten des Dreyecks, OD, OE und so auch OD, OF, gleich sind. Denn sie sind Katheten in rechtwinkligen Dreyecken ODB, OEB und ODA, OFA, wovon die ersten, so wie die letzten, sich wegen Gleichheit der Hypothenusen und eines der
*I. 18. f. 2 spitzen Winkel decken *. Die drey Fusspunkte der Perpendikel, D, E, F liegen also im Umfange der Kreislinie, welche um O mit dem Halbmesser OD be-
*E. 2. γ. schrieben ist *. Diese Kreislinie berührt folglich die
* 12. drey Seiten des Dreyecks ABC *, und ist daher in
* E. 16. dem gegebenen Dreyeck eingeschrieben *.

2. Die Methode einen Kreis um ein gegebenes Dreyeck zu beschreiben, steht in Aufgabe 12.

[Zusatz I. Zieht man noch CO, so decken sich auch die beyden rechtwinkligen Dreyecke COE, COF, daher die Linie CO den Winkel C ebenfalls halbirt. Folglich *durchschneiden sich die graden Linien, welche die Winkel eines Dreyecks halbiren, alle drey in einem Punkte*, und zwar in dem Punkte, welcher von allen drey Seiten gleich weit entfernt ist, und deshalb *einem Kreise, der dem Dreyeck eingeschrieben wird, zum Mittelpunkte dient.* Diese Linien zertheilen das ganze Dreyeck in drey kleinere Dreyecke, wovon ein jedes über eine Seite des Grössern als Grundlinie steht, und worin die Perpendikel aus den Spitzen auf die Grundlinien gleich sind.]

[Zusatz II. Die Seiten des Dreyecks werden durch diese Perpendikel so zerschnitten, dass 1) an jedem *Winkelpunkte gleiche Stücke anliegen*, und 2) *jedes abgeschnittene Stück sammt der gegenüberliegenden Seite, dem halben Umfang des Dreyecks gleich ist.* Das erstere folgt aus der bewiesenen Deckung der kleinen rechtwinkligen Dreyecke, und hieraus wiederum die zweyte Behauptung. Denn bezeichnet man den *halben Umfang des Dreyecks* mit S, so ist $S = AD + BE + CF$, und setzt man in diesem Ausdruck der Folge nach, statt der darin vorkommenden Linien, das Stück an demselben Durchschnittspunkt, welches ihr gleich ist, so erhält man für den *halben Umfang* S eines Dreyecks, folgende Ausdrücke:

$$S = AD + BE + EC = AD + BC = AF + BC$$
$$S = AF + BE + CF = BE + AC = BD + AC$$
$$S = AD + BD + CF = CF + AB = CE + AB$$

Und daraus laſſen ſich umgekehrt wieder Ausdrücke für die Gröſse der abgeſchnittenen Stücke ableiten, welche uns in der Folge von Nutzen ſeyn werden.

$$AD = AF = S - BC$$
$$BE = BD = S - AC$$
$$CF = CE = S - AB.$$

Fig. 78* [Zuſatz III. Vergleicht man die Lage des hier betrachteten Durchſchnittspunkts (O) dreyer grader Linien, welche *die Winkel eines Dreyecks halbiren*, mit der Lage des gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkts (C) *dreyer Perpendikel*, welche auf der Mitte jeder der drey Seiten eines Dreyecks errichtet ſind*, oder was dieſelbe ſagt, die Lage der *Mittelpunkte* des dem Dreyeck *eingeſchriebenen*, und des *umſchriebnen Kreiſes*; und mit dieſen *drittens* den Punkt (P), worin die Perpendikel welche aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberſtehende Seiten gefällt ſind, alle drey ſich durchſchneiden *, und *viertens* den Punkt (S), worin, wie wir in den folgenden Büchern ſehn werden, die drey graden Linien, die aus den Winkelpunkten nach den Punkten in der Mitte der gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, ſich durchſchneiden, (den Schwerpunkt des Dreyecks); ſo erhält man folgende intereſſanten Sätze. 1) *Im gleichſchenkligen Dreyeck liegen dieſe vier Punkte in einer graden Linie, und zwar im Perpendikel, welches aus der Spitze des Dreyecks auf die Grundlinie gefällt wird.* Denn dieſes Perpendikel halbirt zu-

* 10.

*24 Z. 2.

gleich den Winkel an der Spitze und die gegenüberſtehende Grundlinie *. 2) *Im gleichſeitigen Dreyeck fallen dieſe Punkte alle vier in einem Punkt zuſammen.* Denn jedes Perpendikel, welches aus einem Winkelpunkte auf die gegenüberſtehende Seite gefällt wird, halbirt im gleichſeitigen Dreyeck dieſe Seite und den Winkel an der Spitze *. *I.17.f.2 *I.17 f.1

3) *In keinem ungleichſeitigen Dreyeck liegen dieſe Punkte alle vier in grader Linie.* Denn ſonſt müſste eins der Perpendikel, welche aus den Winkelpunkten auf die gegenüberſtehenden Seiten gefällt werden, zugleich dieſe Seite und den Winkel an der Spitze halbiren, da das Dreyeck denn nothwendig gleichſchenklig wäre.

4) *Der erſte O, und der vierte S, dieſer Durchſchnittspunkte* (der Mittelpunkt des eingeſchriebnen Kreiſes, und der Schwerpunkt) *liegen bey jedem Dreyecke innerhalb deſſelben; der zweyte, C', und dritte, P,* aber (der Mittelpunkt des umſchriebenen Kreiſes, und der Durchſchnittspunkt der Perpendikel aus den Spitzen) *liegen in ſpitzwinkligen Dreyecken innerhalb, in ſtumpfwinkligen auſserhalb des Dreyecks * und* in *rechtwinkligen*, jener auf der Hypotenuſe, dieſer in der Spitze des rechten Winkels.] *A.12.Z 1; I.16 Z.2.f.2.

Anmerkung. Ueber die Lage dieſer *vier merkwürdigen Punkte* bey jedem Dreyeck, hat *L. Euler* eine intereſſante algebraiſche Unterſuchung angeſtellt, (*Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* in den Nov. Comment Ac. Sc. Petropol. ad. A. 1765) in welcher er den ſehr netten Satz darthut, *daſs in jedem Dreyeck drey dieſer Punkte, nemlich C', P und S in grader Linie liegen*, und zwar ſo, daſs immer S zwiſchen C' und P liegt, und PS das Doppelte von C'S, oder

PS = 2. CS ist, wie man dieses auch in unserer Figur wahrnimmt. Hat man also zwey dieser Punkte, so findet man den dritten durch eine sehr leichte Construction. Auch lehrt *Euler* in dieser Abhandlung, wie man, wenn die drey Punkte O, P, S gegeben sind, aus der Lage dieser drey Punkte das Dreyeck ABC finden kann, welches von der Auflösung einer Cubischen Gleichung abhängt, deren drey Wurzeln die Zahlausdrücke für die Seiten dieses Dreyecks sind.

d. U.

AUFGABE 19.

F. 109. *Das Verhältniss zweyer grader Linien AB, CD, welche gegeben sind, in Zahlen auszudrücken, oder das Zahlverhältniss dieser Linien zu finden.*

Trage auf die grössere Linie AB, die kleinere CD
*Fo.3.α so oft stetig nebeneinander, als es angeht *, wir wollen setzen zweymal. Wird jene durch diese nicht genau gemessen, so bleibt ein Stück BE, kleiner als CD, übrig.

Trage ferner auf CD diesen Rest BE wieder so oft stetig nebeneinander, als es angeht, in unserm Fall einmal, da denn aufs neue ein Rest DF bleibt, der kleiner als BE ist.

Trage diesen zweyten Rest DF wieder auf den ersten BE so oft es angeht nebeneinander, in unserm Fall einmal, wobey der Rest BG bleibt.

Trage diesen dritten Rest BG wieder auf den zweyten DF so oft es angeht nebeneinander, und so fahre fort.

[Bey diesem Verfahren kömmt man nun entweder zuletzt auf einen Rest, der den vorhergehenden genau