Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Aufgabe 19. Das Verhältnis zweyer grader Linien AB, CD, welche gegeben sind, in Zahlen auszudrücken, oder das Zahlverhältnis dieser Linien zu finden.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

PS = 2. CS ist, wie man dieses auch in unserer Figur wahrnimmt. Hat man also zwey dieser Punkte, so findet man den dritten durch eine sehr leichte Construction. Auch lehrt *Euler* in dieser Abhandlung, wie man, wenn die drey Punkte O, P, S gegeben sind, aus der Lage dieser drey Punkte das Dreyeck ABC finden kann, welches von der Auflösung einer Cubischen Gleichung abhängt, deren drey Wurzeln die Zahlausdrücke für die Seiten dieses Dreyecks sind.

d. U

AUFGABE 19.

F. 109. *Das Verhältniss zweyer grader Linien AB, CD, welche gegeben sind, in Zahlen auszudrücken, oder das Zahlverhältniss dieser Linien zu finden.*

Trage auf die grössere Linie AB, die kleinere CD
*Fo.3.α so oft stetig nebeneinander, als es angeht *, wir wollen setzen zweymal. Wird jene durch diese nicht genau gemessen, so bleibt ein Stück BE, kleiner als CD, übrig.

Trage ferner auf CD diesen Rest BE wieder so oft stetig nebeneinander, als es angeht, in unserm Fall einmal, da denn aufs neue ein Rest DF bleibt, der kleiner als BE ist.

Trage diesen zweyten Rest DF wieder auf den ersten BE so oft es angeht nebeneinander, in unserm Fall einmal, wobey der Rest BG bleibt.

Trage diesen dritten Rest BG wieder auf den zweyten DF so oft es angeht nebeneinander, und so fahre fort.

[Bey diesem Verfahren kömmt man nun entweder zuletzt auf einen Rest, der den vorhergehenden genau *misst*, oder man *erreicht nie einen solchen Rest*, so lange man auch fortfährt, welches letztere, wie wir im folgenden Buche sehn werden, allerdings bey gewissen Linien der Fall ist.

Erster Fall. Kömmt man endlich auf einen Rest der den vorhergehenden genau misst, und folglich in ihm nach irgend einer ganzen Zahl enthalten ist, *so ist dieser letzte Rest das gemeinschaftliche Maass der beyden gegebnen Linien AB, CD.* Sieht man ihn als Einheit an, so lassen sich alle vorhergehenden Reste, mithin AB, CD selbst, in Beziehung auf ihn als *Zahlen* ausdrücken, woraus sich denn das *Zahlverhältniss* der beyden gegebnen Linien AB, CD findet. Und zwar ist dieser letzte Rest *das grösste gemeinschaftliche Maass* der beyden gegebnen Linien, und daher ihr so gefundnes Zahlverhältniss sogleich *in kleinsten Zahlen* (in Primzahlen unter sich) ausgedrückt.]

Denn gesetzt in unserm Beyspiele sey BG jener letzte Rest, welcher den vorhergehenden DF genau misst, und zwar sey BG genau zweymal in FD enthalten, so ist, wenn man BG zur Einheit nimmt, also $BG = 1$ setzt, $FD = 2$; ferner, da FD und BG zusammengenommen gleich EB sind, ist $EB = 1.2 + 1 = 3$; und da wieder EB und FD zusammengenommen gleich CD sind, ist $CD = 1.3 + 2 = 5$, und da endlich zwey CD und BE zusammengenommen gleich AB sind, so ist $AB = 2.5 + 3 = 13$. Folglich lassen sich alsdann die beyden gegebnen Linien AB, CD, in Beziehung auf BG als Einheit, durch die Zahlen 13 und 5 ausdrücken; in beyden ist BG nach ganzen Zahlen enthalten, in AB 13 mal, in CD 5 mal, und dieser letzte Rest ist mithin für beyde gegebne Linien ein gemeinschaftliches Maass.

Er ist aber auch *ihr grösstes gemeinschaftliches Maass*. Denn wer dieses leugnen wollte, müste behaupten irgend eine grade Linie M > BG könnte ein gemeinschaftliches Maass der beyden gegebnen Linien AB und CD seyn. Nun aber wird ein Theil der Linie AB, nemlich AE, von CD gemessen (AE = 2 . CD), folglich müste auch der Unterschied von AB und AE, d. h. EB, und da EB = CF ist, auch CF von der Linie M gemessen werden. Wird aber CD und zugleich das Stück derselben CF von M gemessen, so muss nothwendig auch das zweyte Stück FD = EG von M gemessen werden, und da das wieder eben so bey EB und dem Stück EG der Fall ist, so muss auch ihr Unterschied GB von M genau gemessen werden folglich M *entweder gleich* oder *kleiner* als BG seyn, welches der Voraussetzung dass M > BG sey widerspricht. Es ist also kein grösseres gemeinschaftliches Maass beyder Linien AB, CD möglich, als der so gefundene letzte Rest BG, dieser mithin ihr grösstes gemeinschaftliches Maass.

Aus diesem Beweise erhellet zugleich, 1) *dass jede Linie M, welche zwey gegebne grade Linien AB, CD genau misst, auch ihr grösstes gemeinschaftliches Maass GB genau messen müsse.* — 2) Dass *die beyden Zahlausdrücke* der gegebnen Linien AB, CD, welche auf diese Art gefunden werden (13 und 5) keinen gemeinschaftlichen Factor haben können, also *Primzahlen unter sich* *sind*, und *das Verhältniſs beyder Linien in kleinſten Zahlen* 13 : 5 *ausdrücken.*]

Dieſes Zahlverhältniſs ſagt aus, daſs die beyden Linien grade ſo wie dieſe beyden Zahlen aus einander entſtehn, und daſs folglich, wenn AB in 13 gleiche Theile getheilt wird, 5 ſolcher Theile die Linie CD ausmachen. Nähme man daher nicht BG ſondern AB zur Lineareinheit, ſezte alſo AB = 1, ſo müſte CD durch den Bruch $\frac{5}{13}$ ausgedrückt werden, indem dann CD 5 ſolchen Theilen, wovon in der Lineareinheit 13 gleiche enthalten ſind, gleich ſeyn würde. Und ſezte man umgekehrt CD = 1 ſo wäre AB durch die Zahl $\frac{13}{5}$ auszudrücken.

[Zweyter Fall. *Kömmt man auf keinen Reſt der den nächſt vorhergehenden genau miſst*, man mag das angegebne Verfahren ſo weit fortſetzen als man nur immer will, *ſo giebt es für die beyden gegebnen Linien AB, CD kein gemeinſchaftliches Maaſs*, d. h. keine Linie die ſelbſt, oder deren noch ſo kleine Theile, in beyden Linien zugleich genau enthalten wären, und beyde ſind alſo *incommenſurabel*; wovon wir im folgenden Buche ein Beyſpiel an dem Verhältniſſe zwiſchen der Seite und der Diagonale eines Quadrats werden kennen lernen. Da alsdann beyde Linien ſich nicht auf einerley Einheit beziehn, nicht durch einerley Einheit, oder noch ſo kleine Theile derſelben, ſich ausdrücken laſſen; *ſo giebt es kein Zahlverhältniſs, wodurch ein ſolches incommenſurables Verhältniſs ſich völlig ausdrücken lieſse.* Vernachläſſigt man aber den letzten Reſt und nimmt z. B., wenn BG in dem vorhergehenden Reſt FD zwar nicht genau, aber doch beynahe zweymal enthalten ist, an, es sey genau FD = 2 BG; so findet man ein Zahlverhältniss, welches von dem incommensurablen nur um wenig abweicht, und das sich demselben um so mehr nähert, je weiter man auf dem angegebnen Wege fortgeschritten ist, und je weiter der vernachlässigte Rest hinaus fällt; so dass man in diesem Fall wenigstens ein Zahlverhältniss findet, welches dem Verhältniss der incommensurablen Linien so nahe kömmt als man nur immer will, und das sich demselben ohne alles Ende nähern lässt, wiewohl es dasselbe nie erreichen, nie völlig erschöpfen kann.]

[Zusatz I. Dieser Satz begründet *die Methode grade Linien* unmittelbar *zu messen*, und sich *über das Verhältniss zweyer grader Linien völlig ins Klare zu bringen.* Dieses ist man nur dann, wenn man weiss, wie oft die eine Linie die andere, oder einen bestimmten Theil derselben, in sich enthält, wenn man also das Zahlverhältniss beyder kennt, und um dieses zu erforschen muss man die eine Linie mit der andern, oder mit einem Theil derselben, als Einheit vergleichen; grade darin besteht aber *das Messen.* Dieses kann man *entweder* auf die Art, welche hier gelehrt ist, bewerkstelligen, indem man Rest auf Rest nebeneinander trägt; *oder* man hat einen *Maasstab* d. h. eine grade Linie, welche nach irgend einer Lineareinheit und deren Theilen, so klein als man sie zur jedesmaligen Absicht nöthig hat, eingetheilt ist (z. B. nach Zollen und Decimal- und Centesimaltheilen des Zolls.) Trägt man die gegebne zu messende Linie auf den Maafsstab auf, so sieht man sogleich wie viel dieser Lineareinheiten und deren Theile sie enthält, z. B. 8,25, erhält also auf diese Art mit gröfster Leichtigkeit den *Zahlausdruck* der gegebnen Linie in Beziehung auf die angenommne Lineareinheit des Maafsstabs. Verfährt man eben so mit der zweyten Linie, so findet man auch ihren Zahlausdruck in Beziehung auf dieselbe Lineareinheit, z. B. 14,75 und dann ist das *Zalverhältnifs* der beyden gegebnen Linien 8,25 : 14,75 oder 33 : 59.]

[Zusatz II. Gesetzt wir sehn die gröfsere der beyden gegebnen Linien AB, CD als Lineareinheit an, setzen also AB = 1, so ist der Zahlausdruck von CD, d. h. $\frac{CD}{AB}$, ein ächter Bruch, der in unserm Fall, wo AB die Linie CD zweymal und noch das Stück EB in sich enthält, gleich ist, $\frac{CD}{2CD + EB} = \frac{1}{2 + \frac{EB}{CD}}$, indem der Bruchwerth unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerley Gröfse dividirt werden. Nun aber war CD = EB + FD, EB = FD + GB und FD = 2 GB, also ist $\frac{EB}{CD} = \frac{EB}{EB + FD} = \frac{1}{1 + \frac{FD}{EB}}$; $\frac{FD}{EB} = \frac{FD}{FD + GB} = \frac{1}{1 + \frac{GB}{FD}}$ und $\frac{GB}{FD} = \frac{1}{2}$. Diese Werthe der Folge nach in den erstern Ausdruck gesetzt, geben

$$CD = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} \cdot AB \ (\text{oder } CD = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}}} \cdot AB$$

wenn überhaupt $AB = m \cdot CD + EB$, $CD = n \cdot EB + FD$, $EB = p \cdot FD + GB$ und $FD = q \cdot GB$ ist;) so dass also auf diesem Wege die eine Linie in Beziehung auf die andre als Einheit, durch einen *Stuffenbruch* ausgedrückt wird, dessen Werth sich entweder aus der Lehre von der Addition und Division der Brüche in jedem Fall finden, oder durch eine allgemeine algebraische Formel darstellen, und nach ihr berechnen läfst. Und zwar ist diese Formel folgende $CD = \frac{(1 + pq) \cdot n + q}{(1 + pq)(1 + mn + mq)}$, wie man leicht findet, wenn man den Werth des Bruchs Stuffenweise vom untersten an, den Regeln der Bruchrechnung gemäss entwickelt,

z. B. $p + \frac{1}{q} = \frac{pq + 1}{q}$, $\cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}} = \cfrac{1}{\cfrac{pq+1}{q}} = \frac{q}{pq+1}$

u. s. f. So berechnet ist der Werth unsers Stuffenbruchs, $CD = \frac{5}{13} \cdot AB$, wie oben. Wenn bey zwey Linien sich darthun liesse, dass dieser Stuffenbruch, der die eine in Beziehung auf die andre als Lineareinheit ausdrückt, ins Unendliche fortliefe; so wäre dadurch, dem zweyten Fall gemäss, *die Incommensurabilität der beyden gegebnen Linien* dargethan. Beyspiele davon werden wir im folgenden finden.]

Anmerkung. Schon *Euklid* lehrt durch die Methode des *ersten Falls das gröſste gemeinschaftliche Maaſs zweyer grader Linien* oder auch zweyer *Zahlen finden*, ersteres gleich zu Anfang des *zehnten Buchs*, welches von der *Incommensurabilität ausgedehnter Gröſsen handelt*, (Satz 3) letzteres an der Spitze des ersten seiner drey arithmetischen Bücher (Buch VII. Satz 2), wo überhaupt die ersten Sätze, den ersten Sätzen des zehnten Buchs parallel laufen, (und von denen *Clavius* meint, Euklid habe diese Bücher blos zum Behuf des zehnten Buchs seinen Elementen einverleibt.) Ferner zeigt er, daſs um *dreyer Linien* (X. 4.) oder dreyer *Zahlen* (VII. 3.) *gröſstes gemeinschaftliches Maaſs zu finden*, man dieses zuerst für zwey derselben, und dann aufs neue für ihr gefundenes Maaſs und für die dritte Linie oder Zahl suchen müſse. Endlich beweiſt er auch, daſs wenn unser *zweyter Fall* eintritt, beyde Linien *incommensurabel* seyn müſsen (X. 2), und daſs, wenn man die Methode auf zwey gegebne *Zahlen* überträgt, und man kömmt bey ihnen auf keinen Reſt, gröſser als die Einheit, der in dem nächſt vorhergehenden Reſte genau aufgeht, bey solchen Zahlen etwas Aehnliches ſtatt findet; indem ſie dann Primzahlen unter ſich ſind, und keinen gröſsern gemeinſchaftlichen Factor als die Einheit ſelbſt haben (VII. 1.)

Die fernern Sätze Euklids, daſs *commensurable Gröſsen sich wie Zahlen*, *incommensurable* Gröſsen hingegen *nicht wie Zahlen verhalten*, und daſs umgekehrt alle Gröſsen für die ſich ein genaues Zahlverhältniſs finden läſst, *incommensurabel* ſeyn müſsen, (X. 5-8. und VII. 4.) ſind unmittelbare Folgerungen aus unſerm Beweiſe. Und aus dieſen Sätzen flieſst wiederum, das *zwey incommensurable Gröſsen* mit jeder dritten beyde zugleich commenſurabel oder incommenſurabel ſind, und eine mit ihnen commenſurable Summe haben, und umgekehrt; daſs hingegen, wenn von *zwey commensurablen Gröſsen* die eine mit einer dritten commenſurabel iſt, die andre mit ihr incommenſurabel ſeyn muſs, und daſs beyde mit ihrer Summe incommenſurabel ſind, und umgekehrt (X. 12 - 17)

Dieſe Sätze dienen *Euklid* jedoch nur zu einer Art von Einleitung in die Materie, welche den eigentlichen Gegenſtand des *zehnten Buchs* ausmacht, nemlich in die *Unterſuchung über die Abhängigkeit, welche zwiſchen der Commenſurabilität und Incommenſurabilität von Rechtecken oder Quadraten und deren Seiten ſtatt ſindet.* Dieſe Unterſuchung, die Euklid zur Theorie der regulären Körper braucht, ſtellt er zwar mit groſsem Scharfſinn, aber auf einem ganz geometriſchen Wege an, auf welchem ſie ſo weitläufig und ſchwierig wird, daſs man dieſes Buch mit Recht für das ſchwerſte in den Elementen hält, und daſs *Wolf* behauptet „es ſey ſo dunkel, daſs ein Anfänger unmöglich das geringſte davon verſtehn könne“. Seitdem man in der neuern Mathematik in den *Wurzelgröſsen* ein Mittel gefunden hat, incommenſurable Gröſsen arithmetiſch darzuſtellen, und ſie als ſogenannte *Irrationalzahlen* mit unter die Zahlbegriffe aufzunehmen, ſtehn uns weit einfachere und leichtere Methoden zu Geboth, das, was wir von dieſer Unterſuchung brauchen können, arithmetiſch zu entwickeln und zu erörtern, ohne daſs wir der groſsen Menge von Diſtinctionen zwiſchen irrationalen Linien verſchiedner Art, des Heers von Kunſtwörtern welche dieſe Materie bey Euklid beſonders erſchweren, und des zehnten Theils der Sätze die bey Euklid vorkommen, von Nöthen hätten; eine Erleichterung die beſonders daher rührt, daſs wir, ſtatt Rechtecke und Quadrate aus commenſurablen und incommenſurablen Linien, die Producte
* III. 4. aus rationalen und irrationalen Zahlen betrachten *.
An. 1.

Euklid lehrt wie man zu jeder gegebnen Linie 13 verſchiedne Arten von irrationalen Linien darſtellen kann, die er insgeſammt genauer unterſucht, und mit beſondern abſchreckenden Kunſtwörtern bezeichnet, (z. B. nach Lorenz Ueberſetzung: *Mediale, Binomiale, erſte und zweyte Bimediale, gröſsere und kleinere Irrationale, Apotome, erſte und zweyte Medialapotome, des Rationalen und Medialen Quadratſeite, die zwey Mediale Gebende etc.* (X. 112.), und zeigt, wie auſser dieſen 13, (die ſich nach unſrer Art insgeſammt aus Rationalzahlen, Quadrat- und Biquadratwurzeln ausdrücken und zuſammenſetzen laſſen) „noch unzählige andre Irrationalle nien entstehn, die mit keiner unter jenen einerley sind" (X. 116.) (die nemlich auf Wurzeln vom 8ten, 16ten und fernern Graden beruhen. Der letzte Satz in diesem Buche thut dies Incommensurabilität zwischen der Seite und dem Durchmesser eines Quadrats dar. Irrationallinien (ein Ausdruck, den schon Euklid hat) welche sich auf Wurzeln von andern Graden als dem 2ten, 4ten, 8ten u. s. f. beziehn, (die man also weder durch einmaliger noch durch wiederholter Darstellung einer mittleren Proportionallinie, sondern nur durch Auffindung zweyer mittlerer Proportionallinien, u. s. f., also nur auf Wegen, welche der Elementargeometrie unzugänglich sind *, findet,) erwähnt Euklid mit keinem Wort. *III24Z Seine Untersuchung ist also sehr eingeschränkt, statt dass wir durch die arithmetischen Begriffe sie sogleich ganz allgemein führen können. Ueberdem hat Euklids Vortrag noch das Unangenehme, dass er, wie überhaupt die Alten, *nur ganze Zahlen kennt*, und unter seinen Zahlbegriffen keinen für Brüche aufnimmt, so dass wir seine Worte nicht in den uns geläufigem Sinn nehmen dürfen (denn nach diesem sagten manche Sätze offenbare Falschheiten aus), sondern erst in *seine* Begriffe von Zahlen übersetzen müssen. Alles das trägt dazu bey, dieses Buch für uns überflüssig und ungeniessbar zu machen. Ueberhaupt ist die Materie in der Geometrie nur für die Art, wie Euklid die Theorie der regelmäsigen Körper behandelt, von Wichtigkeit; was uns davon unentbehrlich ist, findet man theils hier, theils in der Folge dieses Werks. Dem allen ungeachtet, ist folgendes Urtheil sehr ungerecht, welches der bekannte *Peter Ramus* in seinen Scholiis Mathematicis (lib. 21. p. 252.) über diese Arbeit Euklids fällt: „*Materies decimo libro proposita, eo modo est tradita, ut in humanis literis atque artibus similem obscuritatem nusquam deprehenderim, obscuritatem dico, non ad intelligendum, quid praecipiat Euklides,* — — *sed ad perspiciendum penitus et explorandum, quis finis et usus sit operi propositus,* (die Theorie der regulären Körper,) *quae genera, species, differentiae sint rerum subjectarum*, (Euklid verweilt sich umständlich dabey die Verschiedenheit aller jener Irrationallinien ins

Klare zu setzen) *nihil enim unquam tam confusum vel involutum legi vel audivi.* Andere preisen es dagegen als ein Meisterstück beharrlichen Tiefsinns, und das mit Recht, gehört es auch für uns nur zu den blossen Schaustücken, und zu den veralteten Rüstzeugen im Zeughause der Wissenschaft. d. U.]

AUFGABE 20.

F. 110. *Wenn zwey Winkel A, B gegeben sind, ihr gemeinschaftliches Maass, und daraus ihr Zahlverhältniss zu finden.*

Man beschreibe mit gleichem Halbmesser um die
Scheitelpunkte beyder Winkel Kreisbogen CD, EF, so
*22. Z. sind diese das Maass beyder Winkel *. Mit diesen
beyden Kreisbogen verfahre man so, wie in der vorigen Aufgabe mit den beyden graden Linien; und das
ist immer möglich, da Kreisbogen, die mit gleichem
Halbmesser beschrieben sind, gehörig gelegt sich de-
* 1. cken, also ineinander fallen *, und sich mittelst ihrer
Sehnen einer auf dem andern stetig nebeneinander legen
* 7. lassen *. Auf diese Art findet man sogleich das *grösste
gemeinschaftliche Maass* OD beyder Bogen, *wenn es eins
giebt*, und ihr Verhältniss in den kleinsten Zahlen
* A. 14. Fall 1. ausgedrückt *. Dieses ist zugleich das Verhältniss der
beyden gegebenen Winkel A, B, die sich stets wie
* 22. jene Bogen verhalten *. Der Winkel OAD, dessen
Schenkel das gemeinschaftliche Maass beyder Bogen
umspannen, ist zugleich das grösste gemeinschaftliche
Maass dieser beyden Winkel.

Haben die beyden Bogen CD, EF, die man auf diese Art mit einander vergleicht, *kein* gemeinschaftliches