Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Erklärungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

werde ich die Rolle des Ueberſetzers beybehalten, und was mir allein gehört, wie in den vorigen Büchern noch ferner mit dieſem Zeichen [ ] umklammern

Gilbert.

Erklärungen.

I.

Taf. III. [Die *Höhe einer Figur* wird durch den Abſtand zweyer Parallellinien beſtimmt, wovon die eine durch irgend eine Seite der Figur (*ihre Grundlinie*) die andere durch den Punkt, oder durch die Punkte der Figur geht, die am weiteſten von dieſer Linie entfernt ſind. *Die Höhe einer Figur wird mithin durch das Perpendikel gegeben, welches man aus einem jener Punkte auf die Grundlinie oder deren Verlängerung fällt* *.

*I. 16. f. 1 u. 27.

α) Sind alſo *zwey Figuren* ſo beſchaffen, daſs, wenn man ihre Grundlinien in grader Linie ſtellt, ihre Spitzen, oder ihre der Grundlinie gegenüberſtehende Seiten, in derſelben Parellellinie fallen, ſo haben ſie *gleiche Höhe*.

β) Umgekehrt laſſen Figuren von gleicher Höhe ſich immer zwiſchen einerley Parallellinien ſo legen, daſs ihre Grundlinien in die eine, ihre Spitzen oder höchſten Seiten in die andre fallen.

Wendet man dieſe Sätze insbeſondere auf das Dreyeck und auf das Parallelogramm an, ſo ergeben ſich daraus die folgenden Erklärungen.]

2.

Nimmt man irgend eine Seite AB eines *Dreyecks* ABC zur Grundlinie an *, so ist das Perpendikel CD, welches aus der *Spitze*, das heisst aus dem gegenüberstehenden Winkelpunkt C, auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefällt wird, die *Höhe des Dreyecks*. Fig. 1. *I. E. 18.

[α) Legt man die Grundlinien zweyer Dreyecke in grader Linie, und zieht durch ihre Spitzen eine grade Linie, so sind *beyde Dreyecke von gleicher oder ungleicher Höhe, je nachdem diese Linie mit der Grundlinie parallel läuft, oder nicht* *. *E. I, α.

β) Ist im *rechtwinkligen Dreyeck* die eine Kathete Grundlinie, so stellt die andere die Höhe dar.]

3.

Nimmt man eine Seite eines *Parallelogramms* ABEC, z. B. AB zur *Grundlinie* *, so wird der Abstand der gegenüberstehenden Seite CE von dieser Grundlinie, (mithin das Perpendikel CD oder EF zwischen diesen beyden parallelen Seiten oder deren Verlängerung) die *Höhe des Parallelogramms* genannt. Eben so ist die *Höhe eines Trapezoid* * das Perpendikel EF zwischen den beyden parallelen Seiten desselben, deren eine man stets für die Grundlinie annimmt. * E. I. *I. E. 19. Fig. 14.

[Legt man die Grundlinien zweyer Parallelogramme in grader Linie, so liegen, ist die Höhe dieser Parallelogramme gleich, die gegenüberstehenden Seiten Fig. 6.

auch in grader Linie, und zwar in einer graden Linie, welche mit der erstern parallel läuft; und ist umgekehrt dieses bey zwey Parallelogrammen der Fall, so haben sie gleiche Höhe. Wo nicht so ist ihre Höhe ungleich.]

4.

Fig. 2. [In jedem *Rechteck* ABCD stellen zwey an einander liegende Seiten z. B. AB, BC die *Grundlinie* und *die Höhe* dar; denn je zwey Seiten desselben stehn aufeinander senkrecht *. Im gleichseitigen Rechteck, d. h. im *Quadrat* stellt also jede Seite zugleich Grundlinie und Höhe dar. — Dem im ersten Buch * erklärten Kunstausdruck zu folge, ist also *jedes Rechteck aus seiner Grundlinie und Höhe beschrieben*, unter seiner Grundlinie und Höhe enthalten.

*I. E. 19.

* I. 34. A. 2.

α) Rechtecke aus gleicher Grundlinie und gleicher Höhe beschrieben decken sich, und haben gleichen Inhalt *. *Sind also die Gurndlinien AB, EF und die Höhen BC, FG zweyer Rechtecke gleich, so ist es auch der Inhalt, und sie decken sich.*

* I. 34 A. 3.

Fig. 3. β) Eben so *haben Quadrate über gleiche Linien AB, EF beschrieben, gleichen Inhalt.*

γ) *Haben* umgekehrt *zwey Quadrate gleichen Inhalt, so haben sie auch gleiche Seiten und decken sich.* Denn da sie beyde rechtwinklig sind, so kann man sie so aufeinander legen, dass zwey Seiten auf einander fallen. Wären nun die Seiten ungleich, wie z. B. AB, AK so wäre das eine Quadrat über AK = EFGH, nur ein

Theil des andern ACDE, und alſo wären beyde nicht gleich, gegen die Vorausſetzung.

[d. U.]

5.

[α) *Rechtecke von gleicher Höhe haben zuſammengenommen gleichen Inhalt mit einem Rechteck AG von derſelben Höhe AB, deſſen Grundlinie AH allen ihren Grundlinien zuſammengenommen gleich iſt.* Fig. 2.

Denn jene Rechtecke decken ſich zuſammengenommen mit dieſem einen Rechteck, weil ſich deſſen Grundlinie AH aus den Grundlinien jener Rechtecke, z. B. aus AD, DE, EH, der Vorausſetzung gemäſs zuſammenſetzen läſst. Errichtet man nemlich Perpendikel auf AH durch D und E, ſo theilen dieſe das Rechteck AG, in kleinere AC, DF, EG *, welche mit den gegebnen gleiche Grundlinien und Höhen haben, ſich alſo mit ihnen decken *, daher auch das ganze Rechteck AG ſich mit ihnen zuſammengenommen deckt, und folglich mit ihnen gleichen Inhalt hat.

*II.A 11
* 4. α.

β) Beſteht überdem die zweyte Seite eines Rechtecks aus mehreren Abſchnitten AI, IB etc, und man errichtet auch auf ihr in den Theilpunkten Perpendikel IM etc., ſo laufen auch dieſe mit dem Seiten AH, BG, parallel *, durchſchneiden die parallelen Linien DC, EF, HG insgeſammt rechtwinklig * und zertheilen deshalb jedes der vorigen Rechtecke AC, DF, EG in kleinere Rechtecke *, welche die Abſchnitte der Seite AB zur Grundlinie, und die erſtern AD, die zwey-

* I. 21.
*I.25 f.1
*I.E.19.

* I. 34 ten DE etc. zur gemeinschaftlichen Höhe haben*; daher *das Rechteck aus zwey graden Linien AB, AH, die beyde aus mehreren Abschnitten bestehn, gleichen Inhalt hat mit allen den Rechtecken zusammengenommen, welche aus je zwey Abschnitten der einen und der andern beschrieben sind.*

γ) Aus denselben Gründen ist *der Unterschied zweyer Rechtecke von gleicher Höhe* AF, AC einem Rechteck DF von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie ED dem Unterschiede ihrer Grundlinien AC, AB gleich ist.

Fig. 4. δ) Und *besteht eine grade Linie AB aus zwey Theilen AC, CD, so sind die Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem der beyden Theile*, d. h. Rechteck aus AB', AC und Rechteck aus AB', CB, mit dem Rechteck aus AB', und (AC + CB') d. h. mit dem Rechteck aus AB' und AB, also *mit dem Quadrat aus der ganzen Linie AB, von gleichem Inhalt.*

Fig. 5. ε) Hingegen ist *das Rechteck aus einer Linie AB, die aus den beyden Theilen AC, CB besteht, und aus einem der beyden Theile*, z. B. aus AC, gleich dem Rechteck aus AC', CB und dem Rechteck aus AC', AC, d. h. *gleich dem Rechteck aus den beyden Theilen AC, CB, sammt dem Quadrat des Theiles AC.*

Ist umgekehrt die Ergänzung eines Rechtecks CC', welches über einem Abschnitt AC einer graden Linie steht, zum (gleich hohen) Rechteck über der ganzen Linie ein Quadrat; so ist das erstere Rechteck aus den beyden Abschnitten AC, CB der gegebnen Linie beschrieben. (Euklid Lemma zu X. 18.)

Anmerkung. Die Sätze unter α, δ, ε machen die drey ersten Lehrsätze in *Euklids* zweytem Buch aus, wo sie mit umständlichern Beweisen, als es nöthig war, versehen sind. *Le Gendre* übergeht sie und die Sätze unter 4 ganz und gar, und das sehr mit Unrecht, da sie die Fundamentalsätze über die Vergleichung des Inhalts gradeliniger Figuren enthalten. Ihrer grossen Einfachheit wegen, habe ich sie hierher, und nicht unter die Lehrsätze gestellt. Dass man sie mit einer kleinen Modification auf alle Parallelogramme übertragen könne, sieht jeder. Sie sind den einfachsten Sätzen der Buchstabenrechnung analog, und wir werden in den Zusätzen zum vierten Lehrsatze zeigen, in wie fern sie auf diese hinauslaufen; nemlich die in *Erklärung* 4. auf die Sätze, dass, falls $a = c$ und $b = d$ ist, $ab = cd$ und $a^2 = c^2$, und umgekehrt, wenn $a^2 = c^2$, auch $a = c$ seyn muss. Die in *Erklärung* 5 hingegen auf die Sätze, dass $ab + ac + ad \ldots = a(b + c + d \ldots)$; ferner $ab - ac = a(b - c)$; und falls $a = b + c$ ist, $a^2 = ab + ac$ und $ac = bc + c^2$; und dass endlich $(a + b + c \ldots)(e + f \ldots) = ac + be + ce + af + bf + cf \ldots$ ist. d. U.]

6.

[*Erklärung über die Verhältnisse und Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen, und über dem wahren Sinn eines Produkts aus Linien.*

Wir haben in den beyden letzten Aufgaben des zweyten Buchs Methoden kennen gelernt, *wie sich jedes Verhältniss zwischen zwey Linien, zwey Kreisbogen, oder zwischen zwey Winkeln, auf ein gleichgeltendes Zahlverhältniss bringen lässt.* Da nun ein Verhältniss, z. B. zwischen zwey Linien A, B, auf der Vorstellung beruht, wie oft die eine A, oder ein bestimmter Theil derselben, in der andern B enthalten ist *, also auf * V. 1.

Vorstellung durch einen Zahlausdruck, (der nach
II A.16 Umständen selbst irrational seyn kann); so sieht man
Fall 2. leicht *dass es jenes Zahlverhältniss ist, an dass man sich halten muss, wenn man über Verhältnisse und Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen, sich richtige Begriffe machen will.*

Darauf macht auch Le Gendre aufmerksam, als auf etwas, das zur Einsicht in den wahren Sinn der folgenden Sätze sehr wichtig ist. „Bey allen Veränderungen, sagt er, die man in diesem und dem folgenden Buche mit Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen vornimmt, muss man stets die Glieder dieser Proportionen *als Zahlen* betrachten, deren jede sich auf ihre eigenthümliche Einheit bezieht. Thut man das, so wird man bey keinem dieser Verfahren, und bey keiner Folgerung die wir daraus ziehn, anstossen."

Bey jeder richtigen Proportion $A : B = C : D$ ist, wie bekannt, das Produkt der äussern Glieder $A . D$ dem Produkt der innern Glieder $B . C$ gleich. Das muss also auch der Fall seyn, wenn diese proportionalen Grössen alle vier Linien oder A und B Linien, C und D Flächen, oder andre Ausdehnungen sind, *vorausgesetzt* dass man sich beyde Verhältnisse in gleichgeltende Zahlverhältnisse verwandelt denkt. So kömmt man dann auf *Produkte aus Linien* oder auf *Produkte aus Linien in Flächen* u. d. m., doch *immer nur unter der Voraussetzung, dass die Linien, Flächen u. s. durch Zahlen ausgedrückt sind*, indem man sie auf ein bestimmtes Maass als Einheit bezieht. Ausser dieser Rücksicht hätten jene Begriffe keinen Sinn. *Das Produkt aus zwey Li-*

nien A und D ist also nichts anders als ein *Zahlprodukt*, und zwar das Produkt aus den Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in A und wie viel deren in B enthalten sind.

Eben so ist *das Produkt aus einer Linie A in eine Fläche B* nichts anders als das Produkt der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in A und wie viel Flächeneinheiten in B enthalten sind, u. s. f.]

Anmerkung. Die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen, sind *Buch I. Erkl. 23* beysammen gestellt, und man wird sich mittelst ihrer leicht helfen können, wenn man bey einer arithmetischen Vorstellung über die Verhältnisse in den folgenden Sätzen anstoſsen sollte. Ich verweise auf sie auch hier *durch das Marginal V*, z. B. V. 4. α, worunter man einen der Sätze über die Verhältnisse zu verstehn hat, die B. I. Erkl. 23. unter 4, α aufgestellt sind. Welchen? das wird jeder leicht herausfinden. d. U.

7.

[*Die Seiten zweyer Figuren*, z. B. die Seiten AB, AD und AF, AE der beyden Rechtecke von gleichem Inhalt ABCD, AFGE, *sind verkehrt proportional*, wenn sie in einer solchen Abhängigkeit von einander stehn, daſs in eben dem Verhältniſs als die eine Seite der einen Figur gegen die eine Seite der andern gröſser ist, z. B. AB gegen AF, die zweyte Seite der ersten Figur, AD, gegen die zweyte Seite AE der andern kleiner ist, oder daſs, wenn $AB = m \cdot AF$ ist, $AD = \frac{1}{m} \cdot AE$ seyn muſs. Fig. 10.

Dann verhält sich aber allemal AB : AF = AE : AD (indem die so gestellten Verhältnisse alsdann beyde
* V. 2. gleiche Exponenten m haben *) und mithin gehören dann die Vorderglieder, so wie die Hinterglieder der beyden gleichen Verhältnisse, als Seiten zu verschiednen Figuren.

Grade so können *die beyden Abschnitte zweyer zweytheiligen Linien verkehrt proportional* seyn.

Anmerkung. Dieser Begriff ist in der Arithmetik currenb und wird in der hier erklärten Bedeutung auch schon von Euklid gebraucht, wiewohl von ihm so wenig als von Le Gendre und den übrigen Geometern besonders erklärt. Eben so mangeln bey ihnen die fruchtbaren Begriffe der folgenden Erklärung, die gleichfalls aus arithmetischem Boden herstammen. d. U.]

8.

[*Zwey grade Linien sind proportional getheilt*, wenn in der einen die Theile nach demselben Verhältniss und in derselben Anzahl und Folge wie in der andern vor-
Fig. 15. handen sind. So z. B. die beyden *zweytheiligen Linien* AB, AC, in deren jeder die beyden Theile in gleichem Verhältniss unter sich und zur ganzen Linie stehn, (AD : DB : AB = AE : EC : AC); oder die beyden
Fig. 16. *dreytheiligen Linien* AB, AC, in deren jeder die drey Theile in gleichem Verhältniss unter sich und zur ganzen Linie, und zwar in beyden in derselben Folge, gedacht werden (Ab : bD : DB : AB = Ac : cE : EC : AC)

α) Ueberhaupt nennt man die ersten Theile zweyer eingetheilten Linien, und die, welche von den ersten um gleich viel Stellen abstehn, also die zweyten, dritten u. s. f. *übereinstimmende Theile*, und eben so die Gränzpunkte beyder Linien, und die welche von ihnen um gleich viel Stellen abstehn, *übereinstimmende Theilpunkte.* β) Diese liegen entweder in *gleicher* Folge, oder in *verkehrter* (*entgegengesetzter*) *Folge* wie z. B. wenn man in der einen Linie die Theilpunkte von der Linken zur Rechten, in der andern von der Rechten zur Linken zählt. γ) Zwey grade Linien sind also unserer Erklärung zu Folge proportional getheilt, wenn die übereinstimmenden Theile in der einen dasselbe Verhältnifs untereinander und zur ganzen Linie, als in der andern haben. δ) Liegen die übereinstimmenden Theile in verkehrter Folge, so pflegt man auch wohl zu sagen, dafs zwey solche Linien *in entgegengesetzter Folge proportional* sind.

Anmerkung. Ein Zeichen wie dieses $a : b : c = d : e : f$ sagt aus, dafs je zwey der Gröfsen links vom Gleichheitszeichen unter einander dasselbe Verhältnifs haben, als die beyden Gröfsen die rechts vom Gleichheitszeichen in denselben Stellen stehn, z. B. die ersten und zweyten, die ersten und dritten und die zweyten und dritten. Die obigen eingeklammerten Zeichen charakterisiren also die proportionalen Eintheilungen zweyer Linien sehr gut. In so fern eine Proportion in der Gleichheit zweyer Verhältnisse besteht, sind in diesen Zeichen eine Menge Proportionen eingewickelt, von denen man die heraussheben kann, die man zu der jedesmaligen Absicht, braucht.

Da ferner die ersten Gröfsen a, d in den zweyten b, e, und eben so in den dritten c, f, u. s. beyde (dem Begriff der Gleichheit unter, Verhältnissen gemäfs) gleich oft, ganz oder Theilweise, enthalten sind, und z. B. wenn $b = ma$ und $c = na$ ist, auch $e = md$ und $f = nd$ seyn mufs; so stehn dann auch die ersten Glie-

der, die zweyten Glieder, u. f. untereinander in demselben Verhältniss a : d = b : c = e : f etc; und ist das der Fall, so sind auch die Summen zweyer, dreyer oder aller übereinstimmender Glieder links vom Gleichheitszeichen und rechts von diesem
*V. 4. 7. Zeichen in demselben Verhältniss *.

α) Dieses auf proportionale Linien angewandt, sieht man also dass in ihnen je zwey übereinstimmende Theile in gleichem Verhältniss stehn, und so auch die Summe je zweyer, dreyer, kurz beliebig vieler, und folglich auch die Summe aller, d. h. die ganzen Linien; ein Satz den ich der Anwendung halber gleich mit in die Erklärung proportional getheilter Linien aufgenommen habe.

β) Sind umgekehrt zwey Linien AB, AC so eingetheilt, dass je zwey übereinstimmende Theile in demselben Verhältniss stehn, Ab : Ac = bD : cE = DB : EC, so sind sie proportional getheilt. Denn dann verhalten sich die Vorderglieder aller dieser Verhältnisse zu einander, wie die Hinterglieder, und das macht das Wesen einer proportionalen Theilung aus. d. U.]

LEHRSATZ I.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.

Fig. 6. [Man lege beyde Parallelogramme so aufeinander, dass ihre Grundlinien sich decken. Dann stehn beyde über der gemeinschaftlichen Grundlinie AB, und weil sie gleiche Höhe haben, fallen die Seiten DC, FE, welche der AB gegenüberstehn, in einerley Parallel-
* E. 3. linien mit der Grundlinie AB *. Und zwar liegen sie