Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 3. Die Flächenräume zweyer Rechtecke von gleicher Höhe, verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

auch gleiche Höhe. Denn gesetzt sie hätten ungleiche, und zwar ABC die grösere Höhe, so nehme man in einem der Schenkel des höhern einen Punkt G, der so weit, als im andern Dreyeck die Spitze, von der Grundlinie absteht, und ziehe von demselben nach dem gegenüberstehenden Endpunkte der Grundlinie eine grade Linie GC, so entstünde dadurch ein Dreyeck GBC, welches mit dem Dreyeck DBC gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, also gleichen Inhalt, mithin auch mit dem Dreyeck DBC, wovon es doch nur ein Theil ist, gleichen Flächenraum hätte; welches ungereimt ist.

Die Spitzen aller Dreyecke von gleichem Inhalt, welche über derselben Grundlinie BC stehn, liegen folglich in einer Parallellinie mit der Grundlinie, und *eine solche Parallellinie AE ist der geometrische Ort für diese Spitzen* oder für die Aufgabe, von zwey gegebnen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich so durchschneiden, dass das Dreyeck zwischen dem Durchschnittspunkt und den beyden gegebnen Punkten, eine gegebne Grösse habe. Alle Punkte der Parallellinie, und keiner der Punkte ausser ihr, thun dieser Aufgabe genüge *. (Apollonius 1. 3.)] *I.E. 21.

LEHRSATZ 3.

Die Flächenräume zweyer Rechtecke von gleicher Höhe, verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Fig. 8. Wenn die Rechtecke ABCD, AEFD beyde die Linie AD zur Höhe haben, [folglich sich beyde zwischen zwey Parallellinien AB, DC legen lassen, deren Ab-
* E. 3. stand AD ist*,] so, behaupte ich, verhält sich der Inhalt dieser beyden Rechtecke, wie ihre Grundlinien AB, AE.

Denn gesetzt *erstens* die Grundlinien AB, AE sind *commensurabel*, so läst sich ihr Verhältniss in ein
*II.A.19 gleichgeltendes Zahlverhältniss verwandeln *. Dieses
Fall 1. sey z. B. das Verhältniss 7 : 4; so muss, wenn man AB in 7 gleiche Theile theilt, AE genau 4 solcher Theile enthalten. Errichtet man in jedem der Theilungspunkte ein Perpendikel auf der Grundlinie AB, so entstehn dadurch 7 kleine Rechtecke (rectangles partiels) die allesammt gleiche Grundlinien und gleiche
* 1. Höhe, folglich auch gleichen Inhalt * haben, und wovon 7 im Rechteck ABCD, 4 im Rechteck AEFD enthalten sind. Folglich verhalten sich diese beyden Rechtecke zu einander wie 7 zu 4, also wie die Grundlinien AB zu AE. Da sich dieselbe Schlussfolge auf jedes andre Zahlverhältniss übertragen läst, so verhalten sich allgemein, wenn die Grundlinien commensurabel sind, die Flächenräume der Rechtecke von gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien, oder

ABCD : AEFD = AB : AE.

Gesetzt *zweytens* die Grundlinien AB, AE sind un-
Fig. 9. ter einander *incommensurabel*, hätten kein gemeinsammes
*II.A.19 Maass *, so muss demungeachtet dieselbe Proportiona-
Fall. 2. lität zwischen den Flächenräumen und den Grundlinien statt finden. Denn wollte man dieses läugnen,

ſo müſste man behaupten nicht AE, ſondern irgend eine andre Linie AO, die gröſser oder kleiner als AE iſt, ſey die richtige vierte Proportionallinie zu den drey andern Linien. Wir wollen alſo ſetzen dieſes AO ſey um EO *gröſser* als AE, und es ſey dann

ABCD : AEFD = AB : AO.

Theilt man nun die grade Linie AB in gleiche Theile, welche kleiner als EO ſind *, ſo muſs zwiſchen E und O wenigſtens ein Theilpunkt I fallen. Durch dieſen ziehe man auf die Grundlinie ſenkrecht IK, ſo entſteht ein Rechteck AIKD, welches mit dem Rechteck ABCD gleiche Höhe hat, und deſſen Grundlinie AI mit der Grundlinie AB commenſurabel iſt [indem der angenommne Theil beyde miſst.] Die Flächenräume dieſer beyden Rechtecke ſind alſo, nach dem was vorhin bewieſen iſt, den Grundlinien proportional, alſo *II. A 5. a. 2.

ABCD : AIKD = AB : AI

Dieſe Proportion hat mit der Vorhergehenden, gleiche Vorderglieder in beyden Verhältniſſen. Alſo müſsten die Hinterglieder proportional ſeyn *, oder *V. 4. ζ.

AEFD : AIKD = AO : AI.

Nun aber iſt AI kleiner als AO, alſo müſste auch das Rechteck AIKD kleiner als das Rechteck AEFD ſeyn; folglich AI kleiner als AE, welches der Vorausſetzung widerſpricht. Alſo kann keine Linie AO, welche *gröſser* als AE iſt, die richtige vierte Proportionallinie zu den drey Gröſsen ABCD, AEFD, AB ſeyn, Durch eine ähnliche Schlufsfolge beweift man dafs auch keine Linie welche *kleiner* als AE ift, die richtige vierte Proportionalgröfse fein kann.

Nothwendig mufs diefes alfo AE felbft feyn.

Wie fich demnach auch in zwey Rechtecken von gleichen Höhen die Grundlinien verhalten, immer find ihre Flächenräume ABCD, AEFD den Grundlinien AB, AE proportional.

Folgerung 1. Gleich hohe Rechtecke über incommenfurabele Grundlinien befchreiben, find folglich ebenfalls incommenfurabel, indem ihr Verhältnifs
*II. A. 19. a. gleichfalls irrational ift *.

Folgerung 2. *Zwey grade Linien AC: CB verhalten fich ftets wie das Quadrat der einen, zum Rechteck aus beyden,* alfo wie Qdrat AC: Rechteck aus AC, CB oder wie Rechteck aus AC, CB : Qdrat CB, (Eukl. X. 23 Lemma). Auch verhalten fie fich wie Rechteck AB, AC : Rechteck AB, CB (Euklid X. 33)]

[Anmerkung. Der Beweis diefes dritten Lehrfatzes ftimmt in allem mit dem Beweis des 22ften Lehrfatzes im Zweyten Buche überein. Einige Bemerkungen über diefe Beweisart findet man dort in Zufatz I.]

LEHRSATZ 4.

Fig. 10. *Die Flächenräume zweyer Rechtecke ABCD, AEGF verhalten fich zu einander wie die Producte aus der Grundlinie eines jeden in deffen Höhe, oder es ift allgemein*

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF.$$