Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 4. Die Flächenräume zweyer Rechtecke ABCD, AEGF verhalten sich zu einander wie die Produkte aus der Grundlinie eines jeden in dessen Höhe, oder es ist allgemein ABCD : AEGF = AB x AD : AE x ...

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Durch eine ähnliche Schluſsfolge beweiſt man daſs auch keine Linie welche *kleiner* als AE iſt, die richtige vierte Proportionalgröſse ſein kann.

Nothwendig muſs dieſes alſo AE ſelbſt ſeyn.

Wie ſich demnach auch in zwey Rechtecken von gleichen Höhen die Grundlinien verhalten, immer ſind ihre Flächenräume ABCD, AEFD den Grundlinien AB, AE proportional.

Folgerung 1. Gleich hohe Rechtecke über incommenſurabele Grundlinien beſchreiben, ſind folglich ebenfalls incommenſurabel, indem ihr Verhältniſs gleichfalls irrational iſt *.

* II. A. 19. a.

Folgerung 2. *Zwey grade Linien AC : CB verhalten ſich ſtets wie das Quadrat der einen, zum Rechteck aus beyden,* alſo wie Qdrat AC : Rechteck aus AC, CB oder wie Rechteck aus AC, CB : Qdrat CB, (Eukl. X. 23 Lemma). Auch verhalten ſie ſich wie Rechteck AB, AC : Rechteck AB, CB (Euklid X. 33)]

[Anmerkung. Der Beweis dieſes dritten Lehrſatzes ſtimmt in allem mit dem Beweis des 22ſten Lehrſatzes im Zweyten Buche überein. Einige Bemerkungen über dieſe Beweisart findet man dort in Zuſatz I.]

LEHRSATZ 4.

Fig. 10. *Die Flächenräume zweyer Rechtecke ABCD, AEGF verhalten ſich zu einander wie die Producte aus der Grundlinie eines jeden in deſſen Höhe, oder es iſt allgemein*

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF.$$

[Man lege beyde Rechtecke so an einander, dass sie einen Winkelpunkt A gemein haben, zugleich zwey ihrer Seiten AB, AE eine grade Linie bilden, und die beyden Rechtecke sich auf entgegengesetzten Seiten dieser Linie befinden. Da dann AD, AF auf demselben Punkte einer graden Linie senkrecht stehn, so liegen auch sie in grader Linie. *] Verlängert man *I.1.Z.2
die Seiten CD, GE bis zu ihrem Durchschnittspunkt H, so entsteht ein Rechteck AEHD, welches mit jedem der gegebnen Rechtecke zwischen denselben Parallellen CH, BE und DF, HG liegt *, mit ihnen *II.A.11
also einerley Höhe hat *, und dessen Flächenraum * E. 3.
sich deshalb zu den Flächenräumen jener Rechtecke, wie die Grundlinien EA, AB und DA, AF verhalten *, * 3.
oder

ABCD : AEHD = AB : AE
AEHD : AEGF = AD : AF.

Setzt man diese beyden Proportionen zusammen *, so *V. 4. δ.
erhält man, da aus den beyden ersten Produkten der Zahlausdruck des Rechtecks AEHD als gemeinschaftlicher Factor hinausfällt,

ABCD : AEGF = AB × AD : AE × AF *. * E. 6.

[Also sind die Flächenräume je zweyer Rechtecke den Produkten aus ihren Grundlinien in ihren Höhen proportional *, oder, was dasselbe sagt, *das Verhältniss* * E. 6.
der Flächenräume ist aus dem Verhältniss der Grundlinien und aus dem Verhältniss der Höhen beyder Rechtecke zusammengesetzt *.] *V. 4. δ

[*Folgerung* 1. *Haben die beyden Rechtecke ABCD, AEGF gleichen Inhalt*, so stehn sie im Verhältniss der

Gleichheit. Folglich müssen die Produkte aus den beyden Seiten, woraus sie beschrieben sind, d. h. die
* E. 6. Produkte aus den Zahlausdrücken dieser Seiten *) ebenfalls im Verhältniss der Gleichheit stehn, oder es muss AB × AD = AE × AF seyn, daher zwischen diesen Zahlausdrücken stets folgende Proportion besteht
*V. 3. γ

AB : AE = AF : AD *.

Die Seiten zweyer Rechtecke von gleichem Inhalt sind
* E. 7. *mithin stets verkehrt proportional *.*

Sind umgekehrt zweyer Rechtecke Seiten, verkehrt
* E. 7. *proportional *, so sind ihre Flächenräume gleich.* Denn verhält sich AB : AE = AF : AD, so sind die Produk-
* E. 6. te AB × AD und AE × AF gleich *, daher auch die
V. 3. β. Flächenräume beyder Rechtecke, welche dem Lehrsatz zu folge, in demselben Verhältnisse wie diese Produkte stehn, gleich seyn müssen.

Hat man also vier proportionale Linien, so ist allemal das Rechteck aus den mittlern dem Rechteck aus den äussern gleich.]

Fig. 11. [*Folgerung 2. Sind die Linien AB, CD, EF, GH, und so auch die Linien AK, CL, EM, GN, untereinander proportional, so sind auch die Rechtecke proportional, welche man aus den ersten, zweyten dritten und vierten dieser Linien beschreibt, oder*

Rechtk. AB, AK : Rechtk. CD, CL = Rechtk. EF, EM : Rechtk. GH, GN.

Denn aus der Zusammensetzung der beyden gegebnen Proportionen folgt, dass dann auch die Produkte aus den ersten, zweyten, dritten, vierten dieser

proportionalen Linien *, proportional sind, oder dass * E. 6.
sich verhält AB × AK : CD × CL = EF × EM : GH × GN *. Nun aber ist nach unserm Lehrsatz das erstere *V. 4. δ.
Verhältniss dieser Produkte, dem Verhältniss des Inhalts der Rechtecke, die aus den Linien in ihnen beschrieben sind, gleich, (Rechteck aus AB, AK : Rechteck aus CD, CL). Eben so ist das zweyte Verhältniss dieser Produkte dem Verhältniss der Rechtecke gleich, die aus den Linien in ihnen beschrieben sind (Rechteck aus EF, EM : Rechteck aus GH, GN). Da nun beyde Verhältnisse jener Produkte gleich sind, so sind es auch die Verhältnisse dieser Rechtecke, und *diese vier Rechtecke sind proportional.*

Insbesondere sind also die Quadrate vier proportionaler Linien proportional, z. B. in unserm Fall (q. AK : q CL = q. EM : q. GN.) Denn sind die Seiten der vier Quadrate proportional, so sind es auch immer ihre Grundlinien und Höhen *. * E. 4.

Die Wahrheit dieser Sätze erhellt unmittelbar auch daraus, dass unserm Lehrsatz zu Folge das Verhältniss der Flächenräume von Rechtecken aus dem Verhältniss ihrer Grundlinien und ihrer Höhen zusammengesetzt ist. Denn ist dieses, so müssen zwey Rechtecke untereinander dasselbe Verhältniss, als zwey andere haben, wenn die Grundlinien, so wie die Höhen der Erstern untereinander dasselbe Verhältniss, als die Grundlinien und die Höhen der Letztern haben.]

[Folgerung 3. *Sind umgekehrt vier Rechtecke, und zugleich deren Grundlinien, proportional, so müssen auch ihre zweyten Seiten proportional seyn;*

und stehn vier Quadrate in gleichen Verhältnissen ($q.AK : q.CL = q.EM : q.GN$,) so stehn darin auch ihre Seiten.

Denn da nach unserm Lehrsatz Rechtecke sich wie die Produkte aus ihren Seiten verhalten, so folgt
*V. 4. δ. durch Trennung * dieser Proportion und der, welche die Proportionalität einer Seite in den Rechtecken angiebt, die Proportionalität der zweyten Seiten. — Insbesondere folgt aus der gegebenen Proportionalität der Quadrate, die Proportionalität der Produkte $AK \times AK : CL \times CL = EM \times EM : GN \times GN$, und daraus die Proportionalität der Seiten $AK : CL =$
*V. 1. β. $EM : GN$ *].

Zusatz I. Die hier erwiesene *Proportionalität zwischen den Flächenräumen der Rechtecke und den Produkten aus ihren Seiten*, berechtiget uns die Produkte aus der Grundlinie in die Höhe eines jeden Rechtecks zum Maafs des Flächenraums der Rechtecke zu nehmen. Es versteht sich, dafs hierbey von den Zahlausdrücken der Grundlinie und der Höhe, und von
* E. 6. deren Produkten die Rede ist *; d. h. von Produkten der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten die Grundlinie, und wie viel deren die Höhe enthält.

Bey diesem Maafs ist dasselbe als bey dem zu bemerken, welches wir in den Zusätzen zu Lehrsatz 22 des zweyten Buchs für die Winkel aufgestellt haben. Es ist nicht absolut, sondern nur Beziehungsweise ein Maafs [oder vielmehr kein unmittelbares, sondern nur ein mittelbares Maafs]. Es fetzt voraus, dafs man irgend eines andern Rechtecks Flächenraum auf dieselbe Art bestimmt, indem man die Seiten desselben mit derselben Lineareinheit misst, und das Produkt dieser Zahlausdrücke nimmt. Das Verhältnifs beyder Produkte giebt dann das Verhältnifs der Flächenräume. Enthält z. B. die Grundlinie eines Rechtecks A 7, dessen Höhe 3 Lineareinheiten, so wird der Flächenraum dieses Rechtecks durch die Zahl 7 × 3 oder 21 vorgestellt, welche Zahl einzeln und für sich nichts bedeuten würde. Hat man aber ein zweytes Rechteck, dessen Grundlinie 12, und dessen Höhe 7 Lineareinheiten enthält, so wird der Inhalt desselben durch die Zahlen 12 × 7 oder 84 vorgestellt; woraus man schliefsen mufs, dafs die Flächenräume beyder Rechtecke A und B sich zu einander wie die beyden Zahlen 21 und 84 verhalten, dieses also das Vierfache von jenem ist, [da dem eben bewiesenen zu Folge die Flächenräume zweyer Rechtecke sich wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen verhalten.] Gesetzt man käme darin überein, das Rechteck A allgemein als Einheit beym Messen der Flächenräume zu gebrauchen, [also die Gröfse aller Flächenräume dadurch auszudrücken, wie vielmal sie das Rechteck A, oder welchen Theil desselben, sie enthalten] so wäre $\frac{84}{21}$ oder 4 das absolute [vielmehr das unmittelbare] Maafs des Rechtecks B, und das hiefse dann nichts anders, als, dieses Rechteck ist 4 solcher Flächeneinheiten gleich.

Nun ist es allgemein gebräuchlich, und in der That am einfachsten, *ein Quadrat zur Flächeneinheit zu nehmen*, und zwar braucht man dazu *das Quadrat, des-*

ſen Seite die Lineareinheit iſt, z. B. den Quadratzoll, den Quadratfuſs, die Quadratruthe u. ſ. f. [Wenn dieſes einmal feſtgeſetzt iſt, ſo geht jenes mittelbare Maaſs für den Flächenraum eines Rechtecks, durch die Produkte der Grundlinie in die Höhe, in ein unmittelbares über. Die Zahl 21, welche das Maaſs des Rechtecks A angab, bezeichnet dann 21 Flächeneinheiten, d. h. 21 Quadrate, deren Seite die Lineareinheit iſt; und daſs ein Rechteck deſſen Höhe 3 und deſſen Grundlinie 7 Lineareinheiten gleich iſt, in der That 21 ſolcher Quadrate in ſich enthalten müſſe, ſpringt ſogleich aus Erkl. 5. *e*, und auch unmittelbar aus der
Fig. 12. Figur in die Augen, indem ein ſolches Rechteck ſich mittelſt Perpendikel aus den Theilungspunkten in 3 Banden, deren jede 7 kleine Quadrate faſst, zertheilen läſst. — *Jeder andre* völlig begränzte *Flächenraum* iſt dem Inhalt nach irgend einem Rechteck gleich, [indem uns nichts hindert Rechtecke von jeder möglichen Gröſse zu denken,] wird ſich alſo ebenfalls, *durch ein Produkt aus zwey Linien* meſſen laſſen, [womit es denn immer die hier entwickelte Bewandtniſs hat, indem ein ſolches Produkt zunächſt den Inhalt eines Rechtecks giebt, das mit der andern Figur gleichen Flächenraum hat.]

Fig. 10. [Zuſatz II. Sind wir berechtigt uns den Flächenraum eines jeden Rechtecks ABCD durch ein Produkt aus der Grundlinie AB in die Höhe BC vorzuſtellen; ſo ſind wir auch befugt den *Flächenraum eines Rechtecks durch dieſes Produkt*, *oder durch AB × BC zu bezeichnen*, indem wir die Zeichen für die Grund-

linie und die Höhe durch das Multiplicationszeichen × verbinden. Und dieses Zeichens wollen wir uns hinfüro beständig bedienen um den Inhalt eines Rechtecks, das aus den Linien AB, BC beschribeen ist, oder dessen Grundlinie AB, dessen Höhe BC ist, zu bezeichnen.

Ein solches Produktenzeichnen zweyer Linien z. B. EF × GH kann man also hinfüro nach Willkühr *entweder durch Produkt aus den beyden Linien EF, GH, oder* durch *Rechteck aus den Linien EF, GH* übersetzen. Beydes kömmt nach dem hier Erklärten auf eins hinaus. Um indefs nicht gänzlich in die rechnende Geometrie überzutreten, wird es vortheilhafter seyn, wenn man sich im folgenden an die letztere Auslegung hält, und also bey einem solchen Zeichen stets an *ein Rechteck* aus den genannten Linien denkt. Hierbey fällt es sogleich in die Augen, dass *diese Bezeichnung für den Flächenraum eines Rechtecks*, (welche aus den Zeichen der Seite mittelst einer arithmetischen Beziehung abgeleitet ist), *lediglich unter der Bedingung gültig und Sinnvoll ist*, unter der es allein erlaubt war, den Flächenraum eines Rechtecks als ein *Produkt* aus seinen Seiten anzusehn; nemlich unter der Voraussetzung, dass wir ein für allemal den Flächenraum aller Rechtecke mit einem Rechtecke (als Flächeneinheit) messen, mit dessen einer Seite wir alle Grundlinien, mit dessen andrer wir alle Höhen gegebner Rechtecke vergleichen und ausmessen; und zwar haben wir dazu ein für allemal das *Quadrat* erwählt, welches über der Lineareinheit als Seite beschrieben ist. Und so ist demnach der *arithmetische*

Sinn dieſes Zeichens AB × BC, als Zeichen eines Flächenraums, ſtets ſo zu erklären, wie wir es mit der Vorſtellung ſelbſt, worauf daſs Zeichen fuſst, im vorigen Zuſatz gethan haben.

Mit dem *geometriſchen Sinn* dieſes Zeichens, bey dem wir ganz davon abſehn, daſs es eigentlich ein Produkt bedeutet, würden wir ohne die Sätze, welche die *Folgerungen* aus unſerm Lehrſatze, beſonders die erſte, ausſagen, nicht weit reichen. Dieſe berechtigen uns aber, grade ſo, wie wir aus der Proportionalität von vier Zahlen auf die Gleichheit der Produkte der innern und äuſsern Glieder ſchlieſsen, aus der Proportionalität von vier Linien AB : AE = AF : AD auf die Gleichheit des Flächenraums der Rechtecke aus den mittlern und aus den äuſsern Linien AB × AD = AE × AF zu ſchlieſsen, und umgekehrt, abgeſehn von aller arithmetiſchen Befugniſs zu dieſem Schluſse. Mittelſt ihrer wird daher der Geometer in den Stand geſetzt, die *arithmetiſche Anſicht* der Abhängigkeit zwiſchen Seiten und Inhalt der Rechtecke, gröſstentheils zu umgehn, und die Begriffe von *Produkten aus Linien* ganz zu vermeiden. Das thut Euklid, und die ihm folgen; daher ſie auch das Rechteck nicht auf die Art wie unſer Verfaſſer, ſondern durch ein den Eckbuchſtaben vorgezeichnetes ▭ oder *Rect.* bezeichnen, z. B. ▭ ABBC oder *Rect.* AC. Allein da das Weſen des Verhältniſſes und der Proportion am Ende doch auf Zahl, alſo auf arithmetiſche Vorſtellungen beruht; ſo dünkt es mich auf einen kleinen Miſsverſtand hinaus zu laufen, wenn man aus der Lehre des Verhaltens und der Proportionalität ausgedehnter Grössen, alles Arithmetische verbannen und es darin sorgfältig vermeiden will. Höchstens kann man es verstecken, wodurch aber diese Lehre wahrlich nicht erleichtert, sondern nur verdunkelt wird. Ueberdem müssen wir da, wo wir durch Zusammensetzen linearer Proportionen oder durch Multiplicationen auf Ausdrücke wie z. B. folgende kommen AB × BC × EF × GH, doch nothwendig zum arithmetischen Sinn unsere Zuflucht nehmen. Ich bleibe daher bey *Le Gendres* Bezeichnung, (welche dieser aus *Tacquets* und *Whistons Euklid*, oder vielmehr aus *Simpsons* Elementen, die sich ihrer durchgängig bedienen, entlehnt zu haben scheint), und die eben durch den arithmetischen Sinn, der zugleich in ihr liegt, vorzüglich und recht charakteristisch wird. Hier im Lehrgebäude der Geometrie übersetzen wir das Zeichen AB × BC durch *Rechteck* aus den Linien AB, BC, und das ist der *geometrische Sinn* desselben. Dagegen brauchen wir es nur nach seinem *arithmetischen Sinn*, als Produkt zweyer Linien AB, BC zu nehmen, um uns unmittelbar in die rechnende Geometrie zu versetzen.]

[Zusatz III. Produkte von gleichen Faktoren nennt der Arithmetiker *Potenzen*, und zwar nach der Anzahl der gleichen Faktoren, die wir in ihnen denken, die zweyte, dritte Potenz u. f. Das arithmetische Zeichen der zweyten Potenz aus einer Grösse a ist a^2, der dritten Potenz a^3, u. s. f. * α) Ganz dem Geiste unserer Bezeichnung gemäss, werden wir daher den *Flächenraum eines Quadrats, welches aus der Linie* *I.E. 22.

Fig. 4. *AB beſchrieben iſt, mit AB^2 bezeichnen* †). Denn als gleichſeitiges Rechteck wird es durch ein Produkt aus
*Z. 1. zwey gleichen Faktoren, AB × AB gemeſſen *, und muſs alſo durch das Zeichen der *zweyten Potenz* von
*Z. 2. AB, bezeichnet werden *; eine Bezeichnung, von der alles gilt, was wir über die vorige bemerkt haben, und bey der man ſich alſo allemal den *Flächenraum* des über der Linie AB beſchriebnen Quadrats denke, welches Euklid durch das Zeichen □ AB, andre, z. B. Tacquet, durch ABq., wie mich dünkt nicht ganz ſo vor-
*Z. 2. theilhaft bezeichnen *. β) Miſst man ferner *die Seite AB* mit der Lineareinheit, und verwandelt ſie auf dieſe Art in einen Zahlausdruck, *ſo enthält* □ *AB ſo viel über der Lineareinheit beſchriebene Quadrate* (d. i. Flächeneinheiten) *in ſich, als die zweyte Potenz jener Zahl an-*
*Z. 1. *giebt* *. — γ) *Weiſs man endlich umgekehrt den Zahlausdruck eines Quadrats,* □ *AB, in Beziehung auf die Flächeneinheit, ſo giebt die Quadratwurzel aus dieſer Zahl den Zahlausdruck für die Seite AB dieſes Quadrats in Lineareinheiten.* Dieſe beyden Sätze ſpringen auch durch Conſtruction, mittelſt Erkl. 5. β. ſogleich ins Auge.

†) *Le Gendre* fügt dieſem Zeichen durchgängig noch einen Strich über die beyden Buchſtabe hinzu, z. B. $\overline{AB}^2$. Allein da wir hinlänglich daran gewöhnt ſind, dieſe Buchſtaben ſtets als Ein Zeichen, nemlich als das Zeichen einer Linie anzuſehn, folglich nicht zu fürchten haben, daſs jemand ein Zeichen wie AB^2 für folgendes $A.(B)^2$ nehmen, und als ſolches überſetzen werde, ſo iſt dieſer den Druck erſchwerende Zuſatz, in den mehrſten Fällen überflüſſig. Auch bedient ſich Simpſon durchgängig des Potenzenzeichens ohne dieſen Zuſatz.

Denn enthält z. B. die Linie AB 2 oder 3 Lineareinheiten in sich, so läſst sich das Quadrat aus AB (d. h. ABDC oder AB' D'C) durch Perpendikel, welche auf den Seiten in den Theilungspunkten errichtet werden, in 2 oder 3 gleiche Banden zerschneiden, deren jede im ersten Fall aus 2, im zweyten aus 3 Quadraten besteht, welche über der Lineareinheit als Seite beschrieben sind; enthält mithin im ersten Fall 4, im zweyten 9 solche Flächeneinheiten in sich. Umfaſst es umgekehrt eine solche Zahl von Flächeneinheiten, so ist dessen Seite 2 oder 3 Lineareinheiten gleich.]

Anmerkung 1. *Der Zahlausdruck eines jeden Quadrats ist also eine Quadratzahl*, nemlich die zweyte Potenz aus dem Zahlausdruck der Seite; und *der Zahlausdruck der Seite umgekehrt eine Quadratwurzel*, nemlich aus dem Zahlausdruck der Quadratfläche. *Die Flächen zweyer Quadrate verhalten sich also zu einander stets wie zwey Quadratzahlen*, nemlich wie die zweyten Potenzen aus dem Zahlausdruck der Seiten, und umgekehrt *verhalten sich die Seiten zweyer Quadrate wie zwey Quadratwurzeln* nemlich wie die Quadratwurzeln aus dem Zahlausdrücken der Flächen.

Hieraus folgt *erstens*, *die Reduction verschiedener Flächenmaaſse auf einander.* Alle unsere Flächenmaaſse sind nemlich Quadrate, verhalten sich also wie die zweyten Potenzen der Zahlausdrücke ihrer Seiten. Enthält so z. B. 1 Ruthe 16 Fuſs, 1 Fuſs 12 Zoll, 1 Zoll 10 Theile in sich; so gehn auf 1 Quadratruthe $16^2 = 256$ Quadratfuſs, auf 1 Quadratfuſs $12^2 = 144$ Quadratzoll, und auf 1 Quadratzoll $10^2 = 100$ Quadrattheile; und verhalten sich der Pariser und Rheinländische Fuſs zu einander wie $1440 : 1391$, so ist das Verhältniſs beyder Quadratfüſse wie $1440^2 : 1391^2$ d. i. ungefähr wie $207 : 193$.

Wissen wir *zweytens* dass ein Quadrat z. B. 25 oder 169 Quadratzoll enthalt, so ist die Seite desselben $\sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{169} = 13$ Zoll lang. Ist folglich der Zahlausdruck eines Quadrats in Beziehung auf ein anderes, als Einheit, keine Quadratzahl, z. B. 15, so ist der Zahlausdruck für die Seite desselben, in Beziehung auf die Seite des andern, eine *Irrationalzahl*, $\sqrt{15}$; beyde Seiten sind also *incommensurabel*.

Drittens wird vermöge dieser Sätze und der analogen im zweyten Zusatze die ganze *Theorie von commensurablen und incommensurablen Flächen, und deren Verhalten*, auf die Lehre von den *Irrationalzahlen* zurück geführt, (wovon der eben aufgestellte Satz ein Beyspiel giebt, der bey Euklid X. 6, freylich anders ausgedrückt vorkömmt,) und mithin der eigentliche Gegenstand von Euklids zehntem Buch * aus der Geometrie in die Arithmetik verwiesen.

* II. A. 19, a.

Anmerkung 2. So wie unsere Bezeichnung für Rechtecke und Quadrate aus der Arithmetik entlehnt ist, so haben schon die *griechischen Mathematiker* (gestützt auf der Analogie des *Produkts* aus zwey Linien, und der *Fläche eines Rechtecks* welches aus diesen beyden Linien beschrieben ist, so wie *zweyter Potenzen* und der *Flächen von Quadraten*) theils die Begriffe von Flächen, Rechtecken, Quadraten und andre verwandte, aus der Geometrie in die Arithmetik, theils umgekehrt die arithmetischen Begriffe des Multiplicirens auf geometrische Constructionen übertragen. Nach dieser Analogie nennen sie z. B *in der Arithmetik* ein jedes Produkt aus zwey Zahlen eine *Flächenzahl*, die zweyte Potenz einer Zahl ein *Quadrat*, und die Division einer Zahl in die andre, *Applicatio numeri ad numerum*, nach der Aehnlichkeit mit dem Verfahren in Aufg. 3. am Ende dieses Buchs.

Umgekehrt deuten sie (oder vielmehr die Geometer des Mittelalters) die *Construction* eines Rechtecks aus zwey gegebnen Linien AB, BC so an: *multiplicire AB in BC*; das *Rechteck* selbst durch

durch den Ausdruck: *quod fit ex ductu alterius Lineae in alteram*, und das *Quadrat* einer Linie durch *Potestas lineae*, oder blos durch *potest*. Ausdrücke, die ohne diese Erläuterung allerdings sehr sonderbar schienen. So z. B. frägt *Clavius* nach dem Unterschiede der Quadrate zweyer Linien folgendermasen: *invenire id, quod plus potest major, quam minor*, und der Pythagoreische Lehrsatz wird oft so vorgetragen: *hypotenusa potest cathetos*; d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist dem Quadrat der beyden Katheten gleich. Selbst Euklid bezeichnet auf diese Art die Gleichheit des Quadrats einer Linie mit einem andern Rechteck, „Wenn eine Linie nach stetigem Verhältniss geschnitten ist, so *kann* das Quadrat des grösern Abschnitts das Rechteck aus dem kleinern Abschnitt und der Linie".

Anmerkung 3. Aus den Erörtrungen zu diesem Lehrs. erhellet endlich, in wie fern wir oben behaupten konnten, dass die in Erklärung 4 und 5 aufgestellten Satze, auf die Arithmetischen Satze, welche dort angeführt werden, hinaus laufen.

d. U.

LEHRSATZ 5.

Der Flächenraum eines Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe gemessen;

der Flächenraum eines Dreyecks durch das halbe Produkt aus der Grundlinie in die Höhe.

Denn ein Parallelogramm ABEC hat mit einem Rechteck CDFE, welches von gleicher Grundlinie AB und gleicher Höhe CD mit diesem Parallelogramme ist, gleichen Inhalt *, und also auch zum Maasse seines Flächenraums ebenfalls das Produkt AB × CD *. — Fig. 1. * 1. f. 1 *4. Z. 1.