Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 6. Der Inhalt eines Trapezoid ABCD wird durch das Produkt aus der Höhe EF in die halbe Summe der parallelen Grundlinien desselben, AB, CD* gemessen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

Dasselbe gilt aus den nemlichen Gründen für die Parallelogramme. Diese Eigenschaft kömmt also den Rechtecken nicht ausschliesslich zu *.] *4. f. 1.

Anmerkung. Der Kürze halber pflegt man unsern Lehrsatz auch wohl so auszudrücken: *ein Parallelogramm ist dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe, und ein Dreyeck der Hälfte dieses Produktes gleich.* Hat man sich hierüber so wie wir im vierten Lehrsatze erklärt, so sieht man sogleich, dass hier bloss von den Zahlausdrücken für den Inhalt und die Seiten die Rede ist, und dann fällt alles Anstössige in diesem Ausdruck weg. Bezeichnet man diese Zahlausdrücke mit i, g, h, so ist für das *Parallelogramm* $i = gh$ und umgekehrt $g = \frac{i}{h}$ oder $h = \frac{i}{g}$ und für das *Dreyeck* $i = \frac{1}{2} gh$, $g = \frac{2i}{h}$, $h = \frac{2i}{g}$, so dass also jede dieser drey Grössen durch den Zahlausdruck der beyden andern, nach diesen leichten Formeln bestimmt wird. Ein Parallelogramm von 280 Quadratfuss, das über einer Grundlinie von 14 Fuss steht, hält so z. B. zur Höhe 20 Fuss, und ein Dreyeck vor 400 Quadratfuss, dessen Höhe 20 Fuss ist, eine Grundlinie von 40 Fuss.

d. U.

LEHRSATZ 6.

*Der Inhalt eines Trapezoid ABCD wird durch das Produkt aus der Höhe EF in die halbe Summe der parallelen Grundlinien desselben, AB, CD * gemessen.* Fig. 14. * E. 3.

Man halbire eine der nicht parallelen Seiten, z. B. BC im Punkte I, ziehe durch diesen Punkt parallel mit der gegenüberstehenden Seite AD die Linie KL, und verlängere DC, bis wo sie diese Linie trifft, In den Dreyecken IBL, ICK, ſind vermöge der Conſtruction die Seiten IB, IC und die Scheitelwinkel CIK, LIB gleich. Ueberdem ſind die Winkel ICK, IBL vermöge des Parallelismus der Seiten AB, DC gleich. Alſo decken ſich beyde Dreyecke, daher das Trapezoid ABCD mit dem Parallelogramm ADKL gleichen Inhalt, und folglich, ſo wie dieſes, das Produkt EF × AL zu ſeinem Maaſse hat. — Nun ſind aber auch die dritten Seiten CK, LB jener beyden Dreyecke gleich, mithin $DC + AB = DK + AL = 2AL$, weil in jedem Parallelogramm die gegenüberſtehenden Seiten gleich ſind. Es iſt alſo $AL = \frac{DC + AB}{2}$, und folglich hat der Flächenraum des Trapezoids ABCD zu ſeinem Maaſse das Produkt $EF \times \left(\frac{AB + DC}{2}\right)$.

Zuſatz I. Zieht man durch den Punkt I, der in der Mitte der Seite BC liegt, mit den parallelen Grundlinien des Trapezoids eine Parallellinie, IH, ſo entſtehn zwey gleichwinklige Parallelogramme AHIL,
* I. 35. HDKI*, worin *erſtens* (weil nach dem eben bewieſenen $KI = IL$;) auch $DH = HA$ iſt, alſo auch die zweyte Seite DA halbirt wird; und *zweytens* $HI = AL$ iſt. Folglich läſst ſich *der Inhalt eines Trapezoids* auch durch das Produkt $EF \times HI$ meſſen, d. h. durch das Produkt aus der Höhe in die grade Linie zwiſchen den Punkten, welche in der Mitte der nicht parallelen Seiten liegen.

[Zuſatz II. *Jede gradelinige Figur läſst ſich ſowohl in lauter Dreyecke, als auch in Dreyecke und Trape-*

zoide zerlegen, daher man mit Hülfe dieses und des vorigen Lehrsatzes *den Inhalt jeder gradelinigen Figur* ohne Schwierigkeit findet. Um die Figur in *Dreyecke* zu zerfällen, nimmt man irgend einen Punkt in ihr, oder in ihrem Umfange, und zieht von demselben nach allen Eckpunkten grade Linien, (läge der Punkt ausserhalb der Figur, so bekäme man additive und subtractive Dreyecke, welches unbequem wäre), und zwar ist es bey unregelmäfsigen Figuren am vortheilhaftesten, wenn man sie durch Diagonalen, die von einem Winkelpunkte aus nach den übrigen gezogen werden, in Dreyecke zertheilt. Jede dieser Diagonalen giebt die Grundlinie für zwey an einanderliegende Dreyecke ab. Misst man sie und die Höhen, so findet sich der Zahlausdruck für den Inhalt jedes der Dreyecke nach Lehrsatz 5, und ihre Summe ist der Zahlausdruck für die ganze Figur. Figur und Beyspiele wird sich jeder leicht selbst hierzu bilden.

Um eine gradelinige Figur in *Trapezoide* zu zerfällen, nehme man willkührlich eine grade Linie, und zwar ist es am vortheilhaftesten, wenn man hierzu die längste Diagonale wählt. Auf diese fälle man von allen Eckpunkten der Figur Perpendikel; so bilden je zwey dieser Perpendikel, sammt der Seite der Figur und dem Abschnitt der Diagonale, die zwischen ihnen liegen, ein *Trapezoid*, worin diese parallelen Perpendikel die Grundlinie, und der Abschnitt der Diagonale, der auf beyden senkrecht steht, die Höhe abgiebt. Die äussersten Perpendikel bilden mit den Seiten der Figur und dem Abschnitt der Grundlinie rechtwinklige

Dreyecke. Dieſe Zerfällung und Ausrechnung gradeliniger Figuren iſt in vielen Fällen, beſonders beym Feldmeſſen, ſehr bequem.

Beyde Zerfällungen, beſonders die letztere, kann man ſelbſt auf krummlinige Figuren übertragen, nimmt man nur die Höhen der Trapezoide ſo klein, daſs die krummlinige Seite ſich ohne merklichen Fehler für gradelinig nehmen läſst, oder ſubſtituirt man ſtatt der krummen Linie eine grade, ſo daſs der Inhalt dabey nicht merklich verändert wird.]

[LEHRSATZ 7.]

Fig. 15. 1. *Jede grade Linie, welche, wie DE, durch ein Dreyeck ABC mit einer Seite deſſelben, z. B. mit BC, parallel gezogen iſt, theilt die beyden andern Seiten des Dreyecks in proportionale Theile, ſo daſs ſich verhält AD : DB : AB = AE : EC : AC.*

2. *Sind umgekehrt zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks in den Punkten D und E proportional ge-*
*E. 8. *theilt *, ſo iſt die grade Linie DE, zwiſchen den beyden Theilpunkten, mit der dritten Seite BC des Dreyecks parallel.*

Iſt DE mit der Seite BC parallel, und man zieht BE, DC, ſo entſtehn zwey Dreyecke BDE, CED, welche über gleicher Grundlinie DE, und zwiſchen gleichen Parallelen DE, BC ſtehn, und deshalb glei-
*2. §. 2. chen Inhalt haben *. Zugleich ſind die Dreyecke BDE, EDA, EBA von gleicher Höhe, denn ihre Grundlinien liegen in einer graden Linie und ihre Spitzen fallen