Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 7.] 1. Jede grade Linie, welche, wie DE, durch ein Dreyeck ABC mit einer Seite desselben, z.B. mit BC, parallel gezogen ist, theilt die beyden andern Seiten des Dreyecks in proportionale ...

Dreyecke. Diese Zerfällung und Ausrechnung gradeliniger Figuren ist in vielen Fällen, besonders beym Feldmessen, sehr bequem.

Beyde Zerfällungen, besonders die letztere, kann man selbst auf krummlinige Figuren übertragen, nimmt man nur die Höhen der Trapezoide so klein, dass die krummlinige Seite sich ohne merklichen Fehler für gradelinig nehmen läfst, oder substituirt man statt der krummen Linie eine grade, so dass der Inhalt dabey nicht merklich verändert wird.]

[LEHRSATZ 7.]

Fig. 15. 1. *Jede grade Linie, welche, wie DE, durch ein Dreyeck ABC mit einer Seite desselben, z. B. mit BC, parallel gezogen ist, theilt die beyden andern Seiten des Dreyecks in proportionale Theile, so dass sich verhält AD : DB : AB = AE : EC : AC.*

2. *Sind umgekehrt zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks in den Punkten D und E proportional getheilt *, so ist die grade Linie DE, zwischen den beyden Theilpunkten, mit der dritten Seite BC des Dreyecks parallel.*

* E. 8.

Ist DE mit der Seite BC parallel, und man zieht BE, DC, so entstehn zwey Dreyecke BDE, CED, welche über gleicher Grundlinie DE, und zwischen gleichen Parallelen DE, BC stehn, und deshalb gleichen Inhalt haben *. Zugleich sind die Dreyecke BDE, EDA, EBA von gleicher Höhe, denn ihre Grundlinien liegen in einer graden Linie und ihre Spitzen fallen

* 2. §. 2.

in einem Punkte E zusammen *; und eben so sind * E. 2.
auch CDE, EDA, CDA Dreyecke von gleicher Höhe.
Folglich verhalten sich die Flächenräume dieser Drey- * 5. f. 1.
ecke wie ihre Grundlinien *, oder

$$\triangle ADE : \triangle BDE : \triangle ABE = AD : DB : AB$$

$$\text{und } \triangle ADE : \triangle DEC : \triangle ACD = AE : EC : AC$$

Da nun die Dreyecke BDE, DEC, und mithin auch die Dreyecke ABE, ACD gleichen Inhalt haben, so sind die Verhältnisse links vom Gleichheitszeichen in beyden Proportionen gleich; also auch die Verhältnisse rechts vom Gleichheitszeichen *, * Gr. 1

$$AD : DB : AB = AE : EC : AC,$$

und die beyden Linien AB, AC sind folglich proportional getheilt *. * E. 8.

2. Sind umgekehrt zwey Seiten eines Dreyecks AB, AC in D und E proportional getheilt, so verhält sich vermöge der proportionalen Theilung AD : DB = AE : EC. * Wäre bey dieser Voraussetzung die * E. 8. a.
grade Linie DE mit der dritten Seite BC des Dreyecks *nicht parallel*, so müsste eine andere grade Linie DO, die Parallellinien mit BC durch den Punkt D seyn. Dann verhielte sich aber, vermöge des eben Bewiesenen, AD : DB = AO : OC, und folglich, da dann in dieser und der vorigen Proportion die erstern Verhältnisse gleich sind, wäre auch AE : EC = AO : OC*; * Gr. 1.
welches unmöglich ist, da AE > AO, hingegen EC < OC ist *. Also muss DE mit BC parallel seyn. * V. 3. δ.

Zusatz I. *Auch wenn man zwey Schenkel AD, AE* Fig. 16.
eines Dreyecks ADE über die Grundlinie DE oder über die

Spitze A hinaus verlängert, so werden diese Verlängerungen durch jede Parallellinie mit der dritten Seite, z. B. durch BC oder durch β γ, den Schenkeln des Dreyecks proportional geschnitten. Denn im *erstern Fall* bildet ABC ein Dreyeck, dessen Schenkel AB, AC von einer Linie DE parallel mit der Grundlinie FG geschnitten, und folglich, unserm Lehrsatz zu Folge, proportional getheilt werden. — Im *zweyten Fall* nehme man auf dem Schenkel, auf dessen Verlängerung der Punkt β liegt, Ab gleich Aβ, und auf dem zweyten Ac gleich Aγ, und ziehe bc; so decken sich die beyden Dreyecke
* I. 6. Abc und Aβγ *, folglich sind die Winkel b, β, D
* I. 25. gleich, und daher die Linien βγ, bc, DE parallel *. Mithin werden, unserm Lehrsatz zu Folge, die Schenkel AD, AE durch die Parallellinie bc proportional getheilt, so dass sich verhält Ab : AD = Ac : AE, und
*E. 8. a. also auch Aβ : AD : βD = Aγ : AE : γE *, daher auch in diesem Fall die Linien βD, γE proportional getheilt sind.

Grade auf dieselbe Art beweist man (nach 2) *dass wenn zwey Linien βD, γE sich so in einem Punkte A durchschneiden, dass dieser Punkt beyde proportional theilt, die graden Linien zwischen den übereinstimmenden Theilpunkten βγ, DE, parallel seyn müssen.*

Zusatz II. *Zwey grade Linien, zwischen welchen Parallellinien in beliebiger Zahl und Entfernung gezogen sind, werden durch diese proportional getheilt.*

Fig. 10. Denn sind *erstens* diese beyden Linien selbst *parallel*, wie AB, CD, so schneiden je zwey der Parallellinien

auf beyden gleiche Theile ab *, daher die überein- *I. 33. f.
stimmenden Theile beyder im Verhältniss der Gleichheit stehn, und also beyde Linien proportional getheilt sind *. *E. 8. a.

Treffen dagegen *zweytens* die beyden Linien in einem Punkte A *zusammen*, wie z. B. BC, DE; so ent- Fig 17.
steht ein Dreyeck AGK, dessen Schenkel, in ihrer Verlängerung, von Parallellinien mit der Grundlinie GK durchschnitten, folglich, dem vorigen Zusatz gemäss, proportional getheilt werden, so dass je zwey übereinstimmende Theile der einen, und deren Summe, untereinander dasselbe Verhältniss wie in der andern haben *. * E. 8.

Sind umgekehrt zwey grade Linien proportional getheilt, so sind die graden Linien durch die übereinstimmenden Theilpunkte, insgesammt parallel, jene beyden Linien mögen parallel seyn oder sich durchschneiden. Dieses folgt auf dieselbe Art aus dem zweyten Theil des vorigen Zusatzes.

Anmerkung. Die übrigen fruchtbaren Sätze über proportionale Eintheilungen von Linien, verspare ich bis zum folgenden Buche. Der Beweis der hier vorgetragnen stützt sich unmittelbar auf dem Vorhergehenden, und ist uns in den gleich folgenden Materien von so vielem Nutzen, dass sie hier unstreitig an der schicklichsten Stelle stehn. Sie begründen nicht nur die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, sondern geben uns auch sogleich die einfachste *Methode* an die Hand, *zu drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie zu finden*; eine Methode, welche Aufg. 4 vorträgt, und die uns zur Verwandlung der Figuren in einander unentbehrlich ist.

d. U.]

Fig. 18. Zusatz III. *Wenn man die Seiten eines Dreyecks ABC insgesammt in zwey gleiche Theile theilt, und die halbirenden Punkte D, E, F durch grade Linien verbindet, so wird das gegebne Dreyeck dadurch in vier kleinere Dreyecke getheilt, welche insgesammt mit dem Gegebnen gleichwinklig sind, und sich einander decken.*

Denn je zwey Seiten des gegebnen Dreyecks sind halbirt, d. i. nach dem Verhältniss von 1 : 1, und mithin proportional getheilt *, daher die Linien DE, EF, FD mit den gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks ABC parallel laufen. Folglich sind die kleinen Dreyecke an den Ecken nach I. 25, und das Dreyeck DEF in der Mitte nach I. 31. Anm., mit dem gegebnen Dreyeck gleichwinklig. Dieses mittlere bildet mit jedem der Dreyecke an den Ecken, wegen des Parallelismus der gegenüberstehenden Seiten ein kleines Parallelogramm, wie AFDE, deckt sich folglich mit jedem derselben, und daher auch diese untereinander, so dass jedes der vierte Theil des ganzen Dreyecks ist.

* E. 8.

Grade Linien AD, BE, CF, welche man von den Eckpunkten des gegebnen Dreyecks nach den Punkten in der Mitte der gegenüberstehenden Seiten zieht, geben für diese kleinen Parallelogramme die zweyten Diagonalen ab, *halbiren sich also mit den Seiten des Dreyecks DEF wechselseitig* *. Verbindet man daher aufs neue ihre Durchschnittspunkte, so entstehn wiederum vier den vorigen gleichwinklige, sich deckende Dreyecke, die ein Sechzehntel des Gegebnen, und dessen Seiten ebenfalls halbirt sind, und umgekehrt die in dem kleinern Dreyeck liegenden Stücke der Li-

* I. 37.

nien AD, BE, CF, halbiren. Verbindet man immer wieder die halbirenden Punkte durch grade Linien, ſo geht dieſes ohne Ende fort; daher AG in Beziehung auf AF als Einheit, durch eine geometriſche ohne Ende fortlaufende Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \ldots$ deren Summe, wie die Arithmetik lehrt, $\frac{2}{3}$ iſt, gegeben wird; ein Satz, den wir im folgenden Buche auf ganz geometriſchem Wege darthun werden.

Zuſatz IV. *Wenn man alle Seiten irgend eines* Fig. 19. *Vierecks ABCD halbirt, und die halbirenden Punkte je zweyer Seiten, welche an einander ſtoſsen, durch grade Linien verbindet, ſo bilden dieſe ſtets ein Parallelogramm EFGH, deſſen Seiten mit den Diagonalen AC, BD des gegebnen Vierecks parallel ſind.* Denn jede dieſer Diagonalen zertheilt das Viereck in zwey Dreyecke, wie ADC, ABC, denen die Diagonale zur Grundlinie, und zwey der halbirenden Seiten des Vierecks zu Schenkeln dienen. Dieſe Schenkel ſind proportional getheilt, daher HG und EF beyde mit der Diagonale AC, alſo auch untereinander, und eben ſo GF, HE mit der Diagonale BD und untereinander parallel laufen. Mithin iſt EFGH ein Parallelogramm von der er- * 7. (2)
wähnten Beſchaffenheit.

Der Inhalt dieſes Parallelogramms iſt halb ſo groſs als der Inhalt des gegebnen Vierecks. Denn da CO und DO beyde nach demſelben Verhältniſs wie DC durch die Parallelen GH und GF eingetheilt *, mithin halbirt * 7. (1)
werden, ſo hat jedes der vier Dreyecke, in welche das gegebne Viereck durch beyde Diagonalen getheilt wird, z. B. AOD, eine doppelt ſo groſse Grundlinie und Höhe

als das kleine Parallelogramm OH, mithin auch
* 5. einen doppelten Inhalt *. Die vier kleinen Parallelogramme zusammengenommen sind also halb so groſs als die vier Dreyecke, d. ih. als das gegebne Viereck.

Die Quadrate der beyden Diagonalen AC, BD sind noch einmal so groſs, als die Quadrate der vier Seiten des Parallelogramms EFGH zusammengenommen. Denn jede der Diagonalen ist, nach dem eben Bewiesenen, das Doppelte der Seite des Parallelogramms, welche mit ihr pa-
*4.Z.3.3 rallel läuft *.

Endlich sind *die vier Dreyecke, worin die Diagonalen das gegebne Viereck theilen, einander proportional.* Denn je zwey dieser aneinander liegenden Dreyecke, z. B. AOD, DOC und so auch AOB, BOC, stehn über einer graden Linie, und ihre Spitzen fallen zusammen.
* E. 2. Sie haben also gleiche Höhe *, und verhalten sich folglich, jene sowohl als diese, wie ihre Grundlinien AO,
*2 f. 1. OC *, sind also Proportionalflächen.

[LEHRSATZ 8.]

Fig. 20. *Zwey grade Linien FH, GI, welche man durch einen Punkt E in der Diagonale eines Parallelogramms ABCD, mit den Seiten parallel zieht, theilen*

1) *die Flächen in vier kleinere Parallelogramme, welche unter sich, und mit dem Gegebnen, gleichwinklig und proportional sind,*

und 2) die Seiten in zwey proportionale Abschnitte.

3) *Die parallelen Seiten der Parallelogramme um die* **Diagonale**, *GF, HI, AC, stehn in*