Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

[Lehrsatz 8.] Zwey grade Linien FH, GI, welche man durch einen Punkt E in der Diagonale eines Parallelogramms ABCD, mit den Seiten parellel zieht, theilen 1) die Flächen in vier kleinere ...

als das kleine Parallelogramm OH, mithin auch
* 5. einen doppelten Inhalt *. Die vier kleinen Parallelogramme zusammengenommen sind also halb so groſs als die vier Dreyecke, d. ih. als das gegebne Viereck.

Die Quadrate der beyden Diagonalen AC, BD sind noch einmal so groſs, als die Quadrate der vier Seiten des Parallelogramms EFGH zusammengenommen. Denn jede der Diagonalen ist, nach dem eben Bewiesenen, das Doppelte der Seite des Parallelogramms, welche mit ihr pa-
*4.Z.3.3 rallel läuft *.

Endlich sind *die vier Dreyecke, worin die Diagonalen das gegebne Viereck theilen, einander proportional.* Denn je zwey dieser aneinander liegenden Dreyecke, z. B. AOD, DOC und so auch AOB, BOC, stehn über einer graden Linie, und ihre Spitzen fallen zusammen.
* E. 2. Sie haben also gleiche Höhe *, und verhalten sich folglich, jene sowohl als diese, wie ihre Grundlinien AO,
*2 f. 1. OC *, sind also Proportionalflächen.

[LEHRSATZ 8.]

Fig. 20. *Zwey grade Linien FH, GI, welche man durch einen Punkt E in der Diagonale eines Parallelogramms ABCD, mit den Seiten parallel zieht, theilen*

1) *die Flächen in vier kleinere Parallelogramme, welche unter sich, und mit dem Gegebnen, gleichwinklig und proportional sind,*

und 2) *die Seiten in zwey proportionale Abschnitte.*

3) *Die parallelen Seiten der Parallelogramme um die* **Diagonale**, *GF, HI, AC, stehn in*

gleichem Verhältniſs, und die Ergänzungen dieſer Parallelogramme, EA, EC, haben gleichen Inhalt, und ſind mittlere Proportionalflächen zwiſchen jenen.

4) *Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, ſo ſind auch die beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale Rhomben oder Quadrate aus beyden Abſchnitten der gegebnen Seite, und die beyden Ergänzungen decken ſich; und zwar ſind ſie im Fall eines Quadrats Rechtecke, die aus den beyden Abſchnitten der gegebnen Seite beſchrieben ſind.*

1) Vermöge der Conſtruction ſind AB, HF, DC miteinander parallel, und ſo auch AD, GI, BC. Beym Durchſchneiden dieſer Linien entſtehn alſo lauter Parallelen zwiſchen Parallelen, folglich lauter *Parallelogramme*, die unter ſich und mit dem gegebnen *gleichwinklig* ſind.

Je zwey derſelben, welche an einander liegen, z. B. HI, EC, haben gleiche Höhe, verhalten ſich folglich wie ihre Grundlinien HE, EF *. Dieſen Li- *5. f. 1.
nien ſind die Grundlinien der beyden andern, ebenfalls gleich hohen Parallelogramme AE, GF gleich. Mithin ſind dieſe vier Parallelogramme *Proportionalflächen*, oder es iſt p HI : p EC : p HC = p AE : p GF :
p AF = p AI : p GC : p AC *. *V. 4. β.

2) Weil EH mit AB, und EI mit BC parallel iſt, werden in den Dreyecken BDA, BDC die Schenkel DA, DC beyde dem gemeinſchaftlichen Schenkel DB

* 7. 1. proportional *, folglich auch *untereinander* selbst *pro-*
* Gr. 1. *portional getheilt* *, so daſs sich verhält DH : HA : DA = DI : IC : DC.

3) Jedes der *Parallelogramme um die Diagonale*, HI, GF, AC, ist aus zwey Seiten beschrieben, welche in dieser proportionalen Theilung übereinstimmen-
* 8. α. de Glieder ausmachen *, das erste aus den ersten Gliedern DH, DI, das zweyte aus den zweyten HA, IC, das dritte aus den dritten DA, DC. Folglich stehen die *parallelen Seiten* dieser Parallelogramme *in gleichem Verhältniſs*. (Hingegen sind die *Ergänzungen* aus den nicht-übereinstimmenden Gliedern dieser proportional getheilten Glieder beschrieben).

Da Parallelogramme, die einerley Höhe haben, sich
*5. f. 1. wie ihre Grundlinien verhalten *, so verhält sich ver-
* (2) möge der obigen Proportionalität * p DE : p. HG = p DE : p IF, daher wegen Gleichheit der Vorderglieder auch die Hinterglieder, Parallelogramm HG und Parallelogramm IF gleich seyn müssen. *Die beyden Ergänzungen* haben also immer *gleichen Inhalt*, und es ver-
* (1) hält sich mithin * p DE : p HG = p HG : p EB oder p DE : p DG = p DG : p DB, so daſs die Ergänzungen die *mittleren Proportionalflächen* zwischen den Parallelogrammen um die Diagonale sind.

4) Ist das gegebene Parallelogramm ein *Rhombus* oder ein *Quadrat*, so stehn dessen Seiten, mithin auch
* (1) die übereinstimmenden Abschnitte derselben *, im
* E. 8. Verhältniſs der Gleichheit *. Folglich sind dann die
κ. β. beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale

HI, GF, auch gleichseitig *, und überdem mit dem * (3)
Gegebnen gleichwinklig *, mithin Rhomben oder * (1)
Quadrate, und zwar jenes aus dem Abschnitt AG, dieses ist aus dem Abschnitt GB beschrieben. — Die Seiten der Ergänzungen sind dann gleichfalls untereinander gleich *, beyde Ergänzungen decken sich *, und * (3) *I.34Z1
im Fall des Quadrats ist jede das Rechteck aus AG, GB.

Zusatz I. *Auch wenn man durch mehrere Punkte der Diagonale, z. B. durch E und L,* (oder durch Punkte in der Verlängerung der Diagonale) *Parallellinien mit den Seiten des Parallelogramms AC zieht, wird das Parallelogramm in lauter gleichwinklige Parallelogramme getheilt, von denen die Aussagen des Lehrsatze gelten.* Denn alsdann sind die Parallelogramme HI und MN beyde auf die Art, wie es der Lehrsatz voraussetzt, eingetheilt; folglich haben die Parallelogramme um die Diagonale, LD, EL, ED, BE, BL und BD insgesammt proportionale Seiten, und sind, falls das Gegebene BD ein Rhombus oder Quadrat ist, allesammt Rhomben oder Quadrate, über den Abschnitten der Seite AB beschrieben *. Die Ergänzungen LI und * (3)
LH, EN und EM, EC und EA und folglich auch NI und MH, sind von gleichem Inhalt, und falls AC ein Rhombus oder ein Quadrat ist, decken sie sich, und sind aus je zwey Abschnitten der gegebnen Seite AB beschrieben. Endlich sind EN, EC, GC mittlere Proportionalflächen zwischen GF, und zwischen EL, ED, BD u. s. f.

Zusatz II. *Nimmt man auf der einen Seite eines Parallelogramms AC einen Punkt G, und auf der daran*

ſtoſsenden Seite einen Punkt F, ſo daſs B und BF in dem-
* Ag. 4. *ſelben Verhältniſs als die Seiten BA und BC ſtehn* *, *und zieht durch G und F mit den Seiten des Parallelogramms Parallellinien GI, FH; ſo durchſchneiden ſich dieſe beyden Parallellinien in einem Punkte E, der in der Diagonale des gegebnen Parallelogramms liegt.*

Denn da durch einen Punkt F nur eine einzige Pa-
*I24. Z 2 rallellinie EF mit einer graden Linie AB *, ſo wie zu drey gegebnen Linien nur eine einzige vierte Pro-
* V. 3. α. portionallinie möglich iſt *, und nach unſerm Lehrſatz die Parallellinie EF die Seite BC ſo durchſchneidet, daſs BA : BC ſich verhält wie BG : BF; ſo muſs, wenn man umgekehrt den Punkt F dieſer Proportion gemäſs beſtimmt, und durch ihn eine Parallellinie mit der Seite AB zieht, dieſe Parallellinie durch den Punkt E gehn, worin die Parallellinie GI die Diagonale durchſchneidet. *Folglich gelten von den ſo gezognen Parallellinien alle Ausſagen unſers Lehrſatzes;* und alſo auch ins beſondere, wenn AC ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, und man BF gleich BG nimmt.

Zuſatz III. Daſſelbe iſt endlich der Fall, wenn man *zwey gleichwinklige Parallelogramme*, deren Seiten in gleichem Verhältniſs ſtehn, wie GF, HI, ſo *aneinander*, oder wie GF, AC ſo *in einander* ſetzt, daſs die proportionalen Seiten in grader Linie liegen, und wenn man dann durch Verlängerung der Seiten dieſer Parallelogramme, das Parallelogramm AC ergänzt.

Anmerk.

Anmerkung. Die Sätze kommen Theilweise schon bey Euklid vor I. 43, VI. 24 und 26, und X. 54 Lemma. Bey Le Gendre fehlen sie, obschon sie gleich bey den folgenden Sätzen, und noch mehr für die Verwandlung der Figuren, und für die geometrische Analysis von Nutzen sind.

d. U.

LEHRSATZ 9.

Ein Quadrat aus einer zweytheiligen Linie AC ist den Quadraten über den beyden Abschnitten AB, BC, und zwey Rechtecken, welche aus den beyden Abschnitten beschrieben sind, zusammengenommen gleich; oder es ist AC^2 *d. h.* $(AB+BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC$. Fig. 21.

Beschreibe über AC ein Quadrat ACDE *, nimm AF gleich AB, und ziehe FG mit AB, und BH mit AE parallel. Dem vorigen Lehrsatz gemäss theilen diese Parallellinien das Quadrat über AC in zwey Quadrate AI, ID, welche über den beyden Abschnitten AB, BC der Seite des gegebnen Quadrats *beschrieben sind, und in zwey sich deckende Rechtecke IE, IC, deren jedes aus diesen beyden Abschnitten beschrieben ist *. Folglich ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC$.

*II. A. 11
* 8. (2)
* 8. (3)

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus, welcher die Zusammensetzung der zweyten Potenz einer zweytheiligen Zahl, aus den beyden Theilen derselben, aussagt: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

[*Folgerung*. Fügt man zu den Grössen, welche der Lehrsatz als gleich angiebt, beyderseits noch das