Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 9. Ein Quadrat aus einer zweytheiligen Linie AC ist den Quadraten über den beyden Abschnitten AB, BC, und zwey Rechtecken, welche aus den beyden Abschnitten beschrieben sind, ...

Anmerkung. Die Sätze kommen Theilweise schon bey *Euklid* vor I. 43, VI. 24 und 26, und X. 54 Lemma. Bey Le Gendre fehlen sie, obschon sie gleich bey den folgenden Sätzen, und noch mehr für die Verwandlung der Figuren, und für die geometrische Analysis von Nutzen sind.

d. U.

LEHRSATZ 9.

Ein Quadrat aus einer zweytheiligen Linie AC ist den Quadraten über den beyden Abschnitten AB, BC, und zwey Rechtecken, welche aus den beyden Abschnitten beschrieben sind, zusammengenommen gleich; oder es ist AC^2 *d. h.* $(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC$. Fig. 21.

Beschreibe über AC ein Quadrat ACDE *, nimm AF gleich AB, und ziehe FG mit AB, und BH mit AE parallel. Dem vorigen Lehrsatz gemäss theilen diese Parallellinien das Quadrat über AC in zwey Quadrate AI, ID, welche über den beyden Abschnitten AB, BC der Seite des gegebnen Quadrats * beschrieben sind, und in zwey sich deckende Rechtecke IE, IC, deren jedes aus diesen beyden Abschnitten beschrieben ist *. Folglich ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC$.

*II. A. 11

* 8. (2)

* 8. (3)

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus, welcher die Zusammensetzung der zweyten Potenz einer zweytheiligen Zahl, aus den beyden Theilen derselben, aussagt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

[*Folgerung*. Fügt man zu den Grössen, welche der Lehrsatz als gleich angiebt, beyderseits noch das

Quadrat aus dem einen Abschnitt, z. B BC^2, hinzu, so wird, weil $2 . BC^2 + 2 . AB \times BC$ gleich ist $2 . BC \times$

*E. 5. α. $(AB + BC)$ d. h. gleich $2\ BC \times AC$ *, auch

$$AC^2 + BC^2 = 2 . BC \times AC + AB^2$$

eine Eigenschaft, die also gleichfalls von jeder zweytheiligen Linie gilt, und deren Wahrheit auch in Fig. 20 sogleich in die Augen fällt.]

Fig. 22. [Zusatz I. *Besteht eine grade Linie AB aus mehreren Abschnitten, AR, RS, SB etc., so ist das Quadrat derselben gleichfalls den Quadraten aller einzelnen Abschnitte und den doppelten Rechtecken aus je zwey Abschnitten zusammengenommen gleich, oder* $AB^2 = AR^2 + RS^2 + SB^2 + 2\ AR \times RS + 2\ AR \times SB + 2\ RS \times SB$ (ein Ausdruck, in welchem man statt der doppelten Rechtecke auch die Rechtecke $2\ AR \times RB + 2\ RS \times SB$ setzen kann *). Denn auch hier sind wiederum *erstens* die

*E. 5. α

Rechtecke an der Diagonale α, β, γ, Quadrate, und zwar die Quadrate aus den einzelnen Abschnitten der gegebnen Linie AB. *Zweytens* sind unter den Ergänzungsrechtecken je zwey einander gleich δ und δ, ε und ε, ζ und ζ etc., und diese Rechtecke sind überdem aus je zwey der verschiednen Abschnitte beschrieben, $\delta = AR \times RS$, $\varepsilon = AR \times SB$, $\zeta = RS \times SB$ etc. *

*8. Z. 1.

Zusatz II. Diese drey Rechtecke sind zusammengenommen gleich $AR \times RB + RS \times SB$ *, oder auch $AR \times RS + AS \times SB$, oder auch $RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, je nachdem man zwey, die einerley Höhe haben, in ein Rechteck zusammen nimmt. Daraus folgt

*E. 5. α.

1) dass *bey jeder dreytheiligen Linie* $AR \times RB + RS \times SB = BS \times SA + SR \times RA$ *ist*, und dass diese Eigenschaft auf ähnliche Art *für jede* in noch so viel Abschnitte *getheilte Linien gilt* (Gregor von St. Vincenz B. 1. S. 55.)

2) Dass eben so *für jede dreytheilige Linie* $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$ *ist*. Denn fügt man zum ersten und dritten jener Ausdrücke beyderseits RS^2 hinzu, so wird $AR \times RB + RS \times SB + RS^2 = RS^2 + RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, oder, da $AR \times RB + RS \times RB$ gleich $AS \times RB$ ist, $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$; eine artige Eigenschaft *dreytheiliger Linien*, auf welcher *Euler* den Beweis eines Satzes baut, den man vor ihm noch nicht bewiesen hatte, und den man im folgenden Buche findet.

Zusatz III. Da die dreytheilige Linie AB, erstens aus den beyden Abschnitten AS, SB besteht, so ist vermöge der Folgerung zu unserm Lehrsatz $AB^2 + BS^2 = 2\,BS \times AB + AS^2$; und da zweytens auch AS aus zwey Theilen AR, RS besteht, $AS_2 + RS^2 = 2\,RS \times AS + AR^2$. Folglich ist *für jede dreytheilige Linie* auch $AB^2 + BS^2 + RS^2 = 2\,BS \times AB + 2\,RS \times AS + AR^2$.

Anmerkung. Dem ersten dieser Sätze ist der arithmetische Satz $a\,(b + c) + bc = c\,(a + b) + ab$, dem zweyten der arithmetische Satz $(a + b)\,(b + c) = b\,(a + b + c) + ac$ analog.