Die Geometrie nach Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten

Gilbert, Ludwig Wilhelm

Halle, 1798

Lehrsatz 12. Das Quadrat der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreyecks ABC ist gleich den Quadraten über den beyden Katheten zusammen genommen, oder $B^2=AB^2+AC^2$.

urn:nbn:de:hbz:466:1-51104

[Zusatz I. *Unter allen Rechtecken die sich aus zwey Abschnitten einer gegebnen graden Linie MN bilden lassen, ist das Quadrat über ihre Hälfte MO das gröste, und der Inhalt wird immer kleiner, je mehr die Abschnitte MP, PN verschieden sind.* Denn denkt man sich die Linie in O gleich, und in P ungleich getheilt, so ist, nach Folgerung 1. α., $MP \times NP = MO^2 - OP^2$, und dieser subtractive Theil OP^2 wächst mit dem Unterschiede der beyden ungleichen Theile, und nimmt mit demselben ab, und fällt ganz fort, wenn beyde Abschnitte gleich sind. Fig. 25.

α) *Unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat mithin das Quadrat den grösten Inhalt.*

β) Und wenn zwey Rechtecke, welche aus Abschnitten gleicher Linien beschrieben sind, gleichen Inhalt haben, so sind auch die Abschnitte, welche ihre Seiten bilden, selbst gleich.

Zusatz II. Dagegen wird *die Summe der Quadrate aus den beyden Abschnitten MP, NP kleiner, wenn der Unterschied der beyden Abschnitte von einander abnimmt.* Denn da die Summe dieser Quadrate $MP^2 + NP^2 = MN^2 - 2 . MP \times PN$ ist *; nimmt sie ab, wenn das Rechteck aus den beyden Abschnitten MP, PN zunimmt, folglich wenn die beyden Abschnitte von einander weniger verschieden werden. (Eukl. X. 42. Lemma).] * 9.

LEHRSATZ 12.

Das Quadrat der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreyecks ABC ist gleich den Quadraten Fig. 27.

über den beyden Katheten zuſammen genommen, oder $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Es ſey ABC ein bey A rechtwinkliges Dreyeck, über deſſen Seiten Quadrate beſchrieben ſind. Fälle vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuſe ein Perpendikel AD, welches verlängert, die gegenüberſtehende Seite des Quadrats in E durchſchneide; ſo läuft dieſes Perpendikel mit den Perpen-
*I.E.19. dikeln BF, CG parallel * und theilt alſo das Quadrat der Hypotenuſe in zwey Rechtecke DF, DG. Jedes dieſer Rechtecke, behaupte ich, iſt dem Quadrat über einer Kathete, mit dem es einen Eckpunkt gemein hat, gleich.

Der Winkel ABF beſteht aus dem Stücke ABC und dem rechten Winkel CBF; eben ſo beſteht der Winkel CBH aus demſelben Stück ABC und dem rechten Winkel ABH. Alſo ſind die beyden Winkel ABF, HBC gleich. Ueberdem ſind die Schenkel des einen den Schenkeln des andern gleich, indem, als Seiten eines Quadrats, AB = BH und BF = BC iſt. Zieht man folglich AF und CH, ſo entſtehn zwey Dreyecke ABF, HBC, welche ſich decken, und mithin gleichen
* I. 6. Inhalt haben *.

Nun iſt aber der Inhalt des Dreyecks ABF halb ſo groſs als der des Rechtecks BE, welches mit jenem Dreyeck über gleicher Grundlinie BF ſteht, und zwi-
* 2. ſchen gleichen Parallelen BF, AE liegt *. Eben ſo iſt der Inhalt des Dreyecks HBC halb ſo groſs als der des Quadrats AH, indem beyde über der Grundlinie HB ſtehn, und zwiſchen den Parallelen HB, LA liegen,

von welcher letztern AC eine bloſse Verlängerung iſt, da BAL, BAC beyde rechte Winkel, folglich LA, AC in grader Linie ſind *. Daraus daſs der Inhalt der bey- den Dreyecke ABF, HBC gleich iſt, folgt alſo, daſs das Rechteck BE, als das Doppelte des Dreyecks ABF, dem Quadrat AH als dem Doppelten des Dreyecks HBC, dem Inhalt nach gleich ſeyn muſs. * I. 4.

Grade auf dieſelbe Art läſs ſich darthun, daſs das Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Flächenraum hat, indem, wenn man AG und BI zieht, ebenfalls zwey ſich deckende Dreyecke ACG, ICB entſtehn, welche die Hälften jener Vierecke ſind.

Folglich ſind beyde Quadrate AH, AI den beyden Rechtecken BE DG zuſammengenommen, mithin dem Quadrat der Hypotenuſe gleich, oder es iſt $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

[Dieſen Satz, einen der Wichtigſten in der Geometrie, ſoll nach der allgemeinen Sage des Alterthums *Pythagoras* erfunden haben, und er wird deshalb gewöhnlich der *pythagoreiſche Lehrſatz* genannt.]

Folgerung 1. *Das Quadrat einer der Katheten iſt gleich dem Quadrat der Hypotenuſe, weniger dem Quadrat der andern Kathete* *, *z. B.* $AB^2 = BC^2 - AC^2$. Mithin iſt das Quadrat einer der Katheten auch gleich einem Rechtecke, welches aus der Summe und und dem Unterſchiede der Hypotenuſe und der andern Kathete beſchrieben iſt, oder $AB^2 = (BC + AC) \times (BC - AC)$ * *Gr. 2. β * 11.

[*Folgerung* 2. Unſerm Beweiſe gemäſs hat das Rechteck BE mit dem Quadrate AH, und eben ſo das

Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Inhalt.

α) *Ein Perpendikel AD, welches aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreyecks auf die Hypotenuse gefällt wird, zerschneidet diese folglich so, dass das Rechteck aus jedem der beyden Abschnitte und der ganzen Hypotenuse, dem Quadrate derjenigen Kathete, welche an dem Abschnitte anliegt, gleich ist, oder dass* $BD \times BC = AB^2$ *und* $CD \times BC = AC^2$ *ist.*

β) *Das rechtwinklige Dreyeck selbst* wird durch das Perpendikel AD *in zwey kleinere rechtwinklige Dreyecke ABD, ACD zerfällt*, und zwar sind diese untereinander und mit dem Ganzen *gleichwinklig*, indem die Winkel $B + BAD$ und $BAD + DAC$ beyde einem Rechten

*I 31.f.2 gleich *, mithin $B = DAC$ und $C = DAB$ sind.

γ) Von jedem dieser kleinern Dreyecke gilt also

* (f. 1.) auch das Bewiesene, und es ist $AD^2 = AB^2 - BD^2$ * =

* (α) $BD \times BC$ * $- BD^2 = BD \times (BC - BD)$ *, also AD^2

*E.5.γ. $= BD \times DC$. *Das Quadrat über dem Perpendikel ist also dem Rechteck aus den beyden Abschnitten der Hypotenuse gleich*; eine elegante und fruchtbare Eigenschaft des rechtwinkligen Dreyecks.

δ) Verbindet man hiermit den Satz, dass die Sei-

*4 f. 1. ten gleicher Rechtecke verkehrt proportional sind *, so folgt aus γ, dass sich stets verhält $BD : AD = AD : DC$, und eben so folgen aus α, die Proportionen $BD : AB = AB : BC$ und $CD : AC = AC : BC$. Also wird *die Hypotenuse durch das Perpendikel AD so zerschnitten, dass* 1) *dieses Perpendikel selbst die mittlere Proportionallinie zwi-*

schen den beyden Abschnitten, *2) *jede der Katheten die mittlere Proportionallinie zwischen dem Abschnitt unter der Kathete und der ganzen Hypotenuse ist.* Hierauf werden wir einfache Methoden gründen, um zu zwey gegebnen Linien, oder zu einer Linie und einem Abschnitt derselben, mittlere Proportionallinien zu finden, und gegebne Rechtecke in Quadrate zu verwandeln. * V. 5.

ε) *Die Quadrate der beyden Katheten und der Hypotenuse verhalten sich zu einander, wie die beyden Abschnitte der Hypotenuse untereinander und zur ganzen Hypotenuse*, oder

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 = BD : DC : BC.$$

Denn die Rechtecke BE, DG, BG, denen jene Quadrate gleich sind, haben die Hypotenuse zur gemeinschaftlichen Höhe, verhalten sich also wie ihre Grundlinien *. — Durch Bildung eines rechtwinkligen Dreyecks wird es also möglich seyn Linien darzustellen, die sich wie zwey gegebne Quadrate verhalten, und umgekehrt.] * 3.

[Folgerung 3. α) *Das Rechteck aus den beyden Katheten hat gleichen Inhalt mit dem Rechteck aus der Hypotenuse und aus dem Perpendikel*, oder $AB \times AC = AD \times BC$. Denn diese beyden Rechtecke haben mit dem rechtwinkligen Dreyeck gleiche Grundlinien und Höhe, folglich beyde einen doppelt so grossen Inhalt als dieses Dreyeck, und mithin beyde einen gleichen Flächenraum. (Euklid. X. 34. Lemma)

β) *Der Inhalt des rechtwinkligen Dreyecks* selbst ist gleich $\frac{1}{2}$ AB × AC oder $\frac{1}{2}$ AD × BC, und *verhält sich* *zum Quadrat der Hypotenuse wie* $\frac{1}{2}$ *AD : BC;* und zum *Quadrat über einer Kathete, z.B. über AB, wie* $\frac{1}{2}$ *AC:AB oder wie* $\frac{1}{2}$ *AD : BD. Denn es ist*

$$\triangle ABC : BC^2 = \tfrac{1}{2} AD \times BC : BC^2 = \tfrac{1}{2} AD : BC \text{ und}$$

$$\triangle ABC : AB^2 = \tfrac{1}{2} AB \times AC : AB^2 = \tfrac{1}{2} AC : AB$$

$$\text{oder} = \tfrac{1}{2} AD \times BC : BD \times BC = \tfrac{1}{2} AD : BD.$$

γ) Da bey zwey gleichen Verhältnissen die Vorderglieder auch dem Doppelten der Hinterglieder pro-

*V. 4. η. portional sind *, so verhält sich

$$\triangle ABC : BC^2 + AB^2 + AC^2 = \tfrac{1}{2} AD : 2\,BC$$

$$= AD : 4\,BC.$$

(Gregor von St. Vincenz I. 23. 24.)

[*Folgerung* 4. Fällt man *im gleichschenkligen Drey-*

Fig. 28. *eck* ABC, aus der Spitze eines der gleichen Winkel an der Grundlinie, z. B. aus B, ein Perpendikel BD auf den gegenüberliegenden Schenkel, so ist *die Summe der Quadrate über alle drey Seiten des Dreyecks gleich* $CD^2 + 2\,AD^2 + 3\,BD^2$. Denn es ist $BC^2 = CD^2 + BD^2$ und $AB^2 = AC^2 = AD^2 + BD^2$, folglich $BC^2 + AB^2 + AC^2 = CD^2 + 2\,AD^2 + 3\,BD^2$. (Gregor von St. Vincenz I. 40.)

Sätze die ich mehr ihrer Nettigkeit als ihrer Brauchbarkeit halber hier mit aufnehme.]

Fig. 29. Zusatz. Ein Quadrat ABCD wird durch die Diagonale AC in zwey rechtwinklige Dreyecke getheilt, wovon jedes, wie z. B. ABC, gleichschenklig ist. Also sind die beyden Quadrate über die Katheten dieses Dreyecks einander gleich, folglich $AC^2 = 2 \cdot AB^2$. *In jedem Quadrate ist folglich das Quadrat der Diagonale doppelt so groß als das Quadrat einer der*

Seiten. — Dieses läſst ſich auch ſo beweiſen. Man ziehe durch die gegenüberſtehenden Winkelpunkte des Quadrats Parallellinien mit der zwiſchen ihnen liegenden Diagonale, ſo entſteht dadurch ein Parallelogramm EFGH, welches, da beyde Diagonalen gleich und auf einander ſenkrecht ſind *, das Quadrat der Diagonale * I. 37. iſt. Dieſes Quadrat enthält 8 rechtwinklige Dreyecke in ſich, die ſich decken, und deren 4 das Quadrat ABCD ausmachen; daher jenes Quadrat das Doppelte von dieſem iſt.

Es verhalten ſich alſo in jedem Quadrate ABCD, die über eine der Diagonalen und über eine der Seiten beſchriebnen Quadrate $AC^2 : AB^2 = 2 : 1$, folglich die Seiten dieſer beyden Quadrate, wie die Quadratwurzeln aus 2 und 1 *, oder $AC : AB = \sqrt{2} : 1$. Dieſe *4.Z 3.7 beyden Linien haben alſo *ein irrationales Zahlverhältniſs, und mithin ſind die Diagonale und die Seite eines jeden Quadrats untereinander incommenſurabel* *; ein Satz, *II.Auf. 19. a. womit Euklid ſeine Abhandlung über incommenſurable Flächen ſchlieſst (X. 117), und den wir weiterhin noch auf eine andre Art beweiſen werden.

[LEHRSATZ 13.]

In jedem ſchiefwinkligen Dreyeck iſt das Quadrat Fig. 30. *einer Seite BC, welche einem ſpitzen Winkel A gegenüber ſteht, kleiner, dagegen das Quadrat einer Seite bc, welche einem ſtumpfen Winkel a gegenüber ſteht, gröſser als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten. Und*